Le CAC 40 comme suite de cycles

Table des matières

Résumé....2
Modèle de cycle....3
Analyse d'un cycle du CAC40....3
Modèle de cycle....3
Relation amplitude vs durée....4
Etablir la répartition composée amplitude et durées....7
Forme composée du signal....9
Analogies dans le monde des sciences....14
Comportement de systèmes physiques....14
Comportement de variables économiques....15
Comportement d'un tas de sable....18
Conclusion....23

Résumé

Ce chapitre propose une lecture du CAC 40 comme une succession de cycles emboîtés, plutôt que comme une simple série temporelle irrégulière. L'idée centrale est que le marché peut être représenté comme un système bouclé, organisé par des mécanismes de contre-réaction et d'amplification, ce qui conduit naturellement à une modélisation cyclique du signal. L'auteur cherche ainsi à décrire l'évolution de l'indice à partir d'une équation générique de cycle appliquée au logarithme du CAC 40, en identifiant pour chaque cycle une amplitude et une durée.

Le texte insiste particulièrement sur les bulles financières et les krachs, considérés comme les manifestations les plus critiques de cette dynamique. Pour comprendre leur formation, il établit une analogie avec la fatigue des matériaux : de même qu'un matériau soumis à une contrainte répétée finit par rompre après une phase d'endommagement progressif, un marché porté par la confiance spéculative finit par céder après une phase de bulle. Cette analogie conduit à rechercher une loi reliant la pente de croissance d'une bulle à sa durée, sur le modèle de la loi de Miner en mécanique. L'objectif est de dégager une « loi des pentes » susceptible d'éclairer la durée probable des phases spéculatives et les signaux avant-coureurs des krachs.

Le chapitre s'intéresse ensuite à la manière de représenter un signal fluctuant comme une composition de cycles aléatoires. Deux approches sont mises en regard : une approche statistique globale, fondée sur les corrélations, le spectre et les modèles stochastiques, et une approche locale multi-échelles, fondée sur l'analyse des cycles et des fluctuations. Dans ce cadre, la méthode du rainflow counting occupe une place importante. Venue de l'analyse de fatigue et déjà utilisée en océanographie, elle permet de compter les cycles d'une série temporelle et d'en étudier les amplitudes et durées. L'auteur montre qu'elle peut être étendue au CAC 40 pour construire une densité de probabilité conjointe des amplitudes et des périodes, en tenant compte du type de loi aléatoire sous-jacente, gaussienne, laplacienne ou de Lévy.

Les résultats empiriques conduisent à une image forte : les déclenchements des cycles d'achat suivent approximativement un processus de Poisson, tandis que les durées des cycles suivent une loi de puissance, signe d'une organisation fractale. Le marché apparaît alors comme un processus de Poisson filtré, composé d'une cascade de cycles de durées variables et distribués à toutes les échelles. Cette structure permet de reconstruire le signal comme superposition de cycles élémentaires, définis par une forme générique et par quelques paramètres aléatoires.

Enfin, le texte élargit cette modélisation par analogie à d'autres domaines. Il rapproche le comportement du marché de certains systèmes physiques, des cycles économiques de type Goodwin, et surtout des avalanches dans un tas de sable. Dans tous ces cas, on retrouve des successions d'événements distribués selon des lois de Poisson et des

durées de cycle obéissant à des lois de puissance proches de celles des phénomènes de premier passage. Le chapitre conclut ainsi que le CAC 40 peut être interprété comme un système complexe fractal, relevant d'une classe générale de processus de branchement et de cascades, à la frontière entre finance, physique statistique et théorie des systèmes dynamiques.

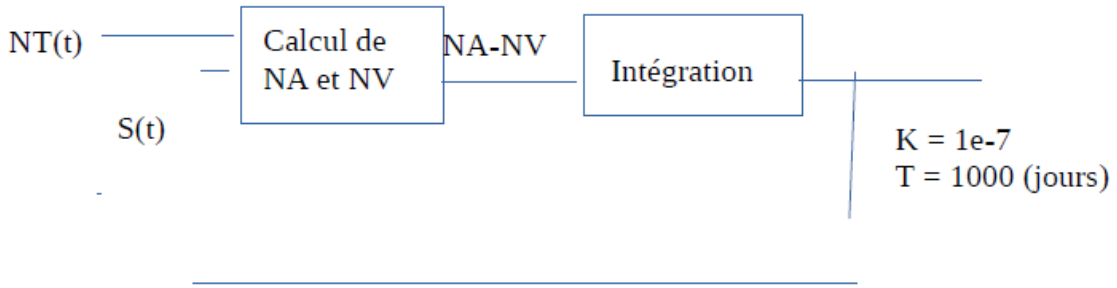
Modèle de cycle

Le but de ce chapitre est l'étude d'un indicateur financier (CAC 40 journalier sur 30 ans)

Analyse d'un cycle du CAC40

Modèle de cycle

Nous pouvons représenter le système suivant de la manière suivantes



Nous sommes en présence d'un système bouclé. Avec une contre réaction négative sur S. Cela implique une force de rappel sur S..

Modélisation des cycles du signal S

Les grandes variations de NA et NV semblent nous conduire vers la modélisation des cycles du signal S. L'idée consiste à partir d'une équation générique de cycle et le l'appliquer au signal ln(S).

L'équation générale de cycle est la suivantes

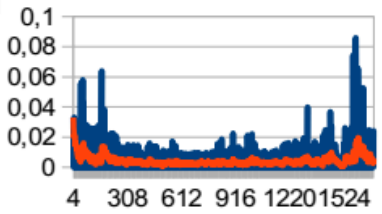
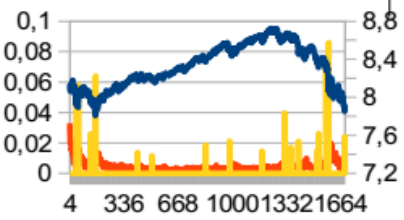
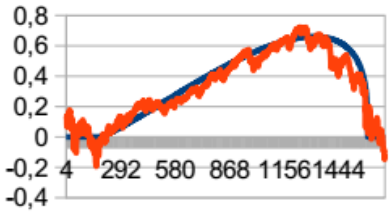
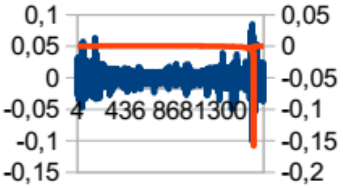
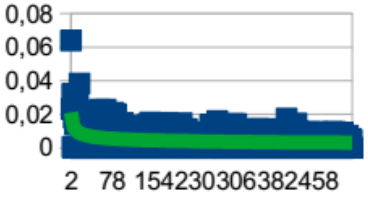
$$C(t) = A \times \left(\frac{t}{T}\right)^{\alpha} \times \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\beta}$$

où A représente l'amplitude du cycle et T représente la durée, le temps t ayant son origine au début du cycle. Cette équation est issue de la dérivation mathématique de la forme générale des courbes de croissance (cf. chapitre XX).

Nous allons donc sur un cycle donné du signal S chercher à identifier les paramètres du modèle C(t) à partir du signal ln(S). Ceci conduit à l'identification des différents paramètres.

Le cycle est défini par la relation suivantes

$$\frac{dC}{dt} = N_A - N_V$$

Choix du cycle : krach de 2008		
	Superposition de NA et de sa moyenne (20 jours).	Coïncidence des pics de NA avec les fronts montants du cycle
Modèle C(t) alpha = 1,2 beta = 0,3 A = 1,4 T=1420 jours		
	Modèle générique de cycle et mesure des paramètres. Superposition à la courbe de ln(S)	Superposition de la dérivée de cycle générique avec le signal NA-NV.
		
	Mesure de l'exposant de la dérivée de cycle générique à l'origine du cycle. On mesure une valeur -0,4	

Nous allons montrer que les paramètres identifiés sont généraux. Pour cela, nous disposons de données sur différents krachs boursiers de l'histoire économique du XX ème siècle..

Relation amplitude vs durée

Ce qui est à craindre en Bourse, ce sont les krachs boursiers. Après une forte croissance loin de l'équilibre, portée par la spéculation, le système revient brusquement à sa position d'équilibre (croissance normale) en perdant tout ce qui a pu être acquis durant la phase de croissance du krach. La phase de croissance du krach s'appelle une bulle financière. La confiance des investisseurs crée de la spéculation et la valeur grimpe au-delà de ce que représente la réalité économique (travail, croissance des entreprises). Les valeurs atteintes pendant cette phase de bulle sont des valeurs fictives, liées uniquement à l'envolée de la confiance des investisseurs. Il est possible durant ces bulles de gagner beaucoup d'argent, à condition de vendre au bon moment, avant que les valeurs ne s'effondrent. Quelle est la durée d'une phase de croissance de bulle financière ? Quels sont les signaux avant coureurs de kracks boursiers ? Nous allons par un simple raisonnement par analogie relier le mécanisme de bulle financière à un phénomène d'usure par fatigue qui conduit à la ruine des matériaux. Un critère macroscopique quantitatif de la ruine par fatigue est la loi de Miner reliant l'élasticité du matériau à la durée de stress du matériau. En termes de bourse, l'élasticité est comparable à la pente de croissance de la bulle qui traduit la confiance des investisseurs. La durée de la bulle est comparable à la durée de stress du matériau. Par ailleurs les mécanismes microscopiques de la ruine par fatigue d'un matériau et de la croissance d'une bulle financière font appel à une même théorie : la percolation et les systèmes critiques.

L'analyse expérimentale des quelques krachs boursiers du siècle permettra de trouver une loi expérimentale reliant la pente de la bulle et sa durée. C'est ce que nous appelons loi des pentes.

Considérons une éprouvette (morceau de métal préparé pour une telle expérience). Soumettons-la à une contrainte **?** (t) (effort mécanique) cyclique inférieure à la limite élastique. Au bout d'une durée T, l'éprouvette finit par casser.

La phase initiale de la rupture est l'apparition d'une minuscule fissure qui peut prendre naissance à la surface du métal, sur un défaut très minime. Elle se propage peu à peu vers l'intérieur de la pièce métallique, jusqu'au moment où la section travaillante, se trouvant progressivement réduite, la rupture brutale survient, sans aucune déformation plastique.

Si on examine les bords de la cassure attentivement, on y trouve toujours 3 zones :

La zone d'amorce : qui comporte souvent un défaut local (inclusion, tapure, marque d'outil, angle vif)

La zone de propagation : lisse, présentant les positions successives du front de propagation de la fissure. On peut voir un réseau de courbes parallèles très caractéristique des ruptures par fatigue et que l'on nomme lignes de repos ou lignes d'arrêt, liées aux périodes de repos de la pièce : périodes pendant laquelle la fissure cesse momentanément de se propager.

Une zone de rupture finale : elle correspond à l'apparition de l'ouverture brutale de la fissure lorsque la section travaillante étant trop réduite, le métal ne peut plus résister aux efforts exercés. Il n'y a aucune déformation au voisinage, ce qui donne l'aspect d'une rupture fragile.

Nous nous intéresserons à l'aspect macroscopique de l'usure par fatigue (théorie de Miner) qui nous donne la relation entre **?** et T. Il existe deux constantes K et P telles que

$$T \times \sigma^{P} = K$$

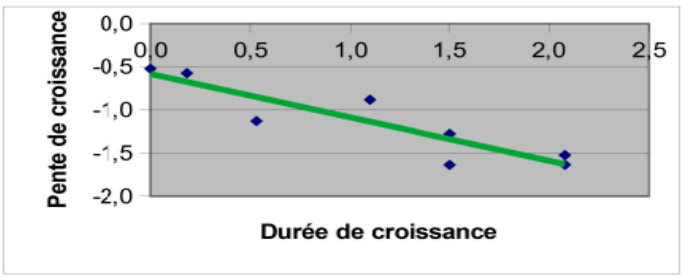
Lors d'une bulle boursière le paramètre d'élasticité est la confiance des investisseurs. Petit à petit cette confiance s'émousse (propagation d'informations économiques liées à un défaut du système financier). Vient un moment où beaucoup d'investisseurs informés décident de vendre. Le niveau d'énergie de la bulle est la pente **?** de l'indicateur boursier. Comme pour l'endommagement par fatigue, nous chercherons une loi du type

$$T \times \sigma^{P} = K$$

Cette analogie est par ailleurs fondée sur des études en physique mathématique des systèmes critiques. La mécanique de la rupture comme la fluctuation des indices boursiers semble obéir aux mêmes modèles physiques : les systèmes critiques et la percolation.

Sur les courbes d'indices boursiers (CAC40, Dow Jones…), nous avons mesuré la durée de croissance du krach (bulle financière) et la pente (exprimée en %) de croissance de la bulle. Le tableau suivant donne les résultats.

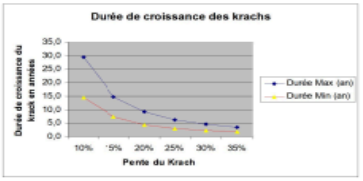
	Date	Durée	Niveau Min	Niveau Max	Pente	Log Durée	Log Pente
Bulle internet	2000	4,5	2000	7000	0,27839177	1,5	-1,3
Subprimes	2007	4,5	2500	6000	0,19454961	1,5	-1,6
Dow Jones 1929	1929	1	210	380	0,58306372	0,0	-0,5
Dow Jones 1987	1987	1,2	1400	2750	0,56260723	0,2	-0,6
DJA 1929	1929	8	70	400	0,21787116	2,1	-1,5
Indice Nikkei	1950	8	8000	38000	0,19476806	2,1	-1,6
Nasdaq Comp	1985	3	1300	4500	0,41390436	1,1	-0,9
DJA 1987	1987	1,7	1500	2600	0,32355667	0,6	-1,1



La recherche d'une loi telle que celle de Miner conduit à porter les points obtenus en échelle logarithmique, ce qui donne la courbe suivante :

$0{,}3 \leq T \times \sigma^{1{,}7} \leq 0{,}59$La forme de la loi obtenue est de la forme :

Pente	Durée Max (an)	Durée Min (an)
10%	29,6	14,5
15%	14,8	7,3
20%	9,1	4,5
25%	6,2	3,1
30%	4,6	2,2
35%	3,5	1,7



Les courbes minimale et maximale sont données pour différentes valeurs de pente par le tableau suivant et la courbe suivante :

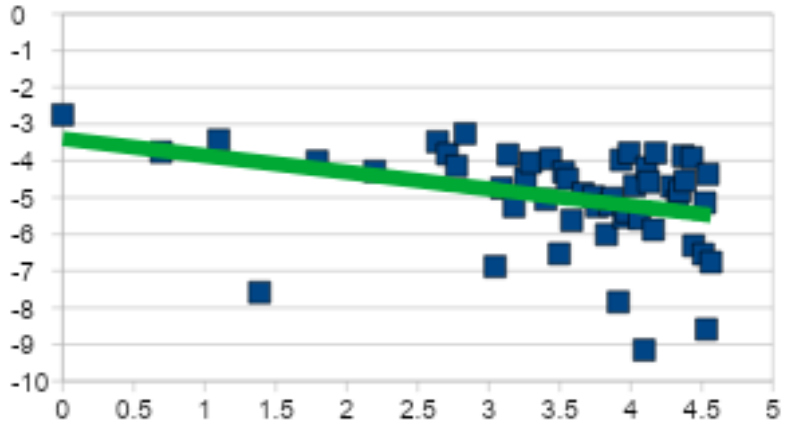
La formule de cycle conduit après dérivation à la formule locale autour de l'origine :

$\frac{dC}{dt} = K \cdot T^{\alpha-1}$avec alpha <1

soit

$\left(\frac{dC}{dt}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot T = K$

Si alpha = 0,45 (lu sur la courbe expérimentale des achats), l'exposant est proche de 1,8



Les considérations sur l'espérance de durée des cycles devrait permettre de réduire les pertes financières.

Etablir la répartition composée amplitude et durées

Cela pose une autre question qui est la représentation d'un signal fluctuant, i.e une série temporelle avec une suite de varaiations (fluctuations, ou cycles).

Nous voyons les 2 approches suivantes

Approche statistique globale	Approche locale multi échelles
Equation différentielle stochastique	Série composée de cycles à durée variable (aléatoire) et à des instants aléatoires (loi de Poisson?)
Analyse spectrale, corrélation, modèles ARMA ...	Analyse par ondelettes, forme générale des cycles, processus de Poisson filtrés ou « renewal counting process ») ...
Probabilité de signal définie par les équations de Fokker Planck Kolmogorov	Loi de probabilité combinée des durées de cycles et des amplitudes des cycles.
Algorithme de Transformée de Fourier rapide	Algorithme de comptage des cycles et périodes (passages par zéro de la dérivée à une échelle donnée, « rainflow counting »), lois théoriques dans le cas gaussien)
Signaux stationnaires	L'hypothèse de stationnarité n'est pas nécessaire.

Les méthodes de « Rainflow counting » sont utilisées depuis les années 1960 pour les prédictions d'endommagement par fatigue des structures. Récemment , ils ont été utilisés dans le cadre de l'océanographie pour analyser la houle et les états de surface de la mer. La bibliographie est nombreuse et des bibliothèques logicielles existent

Quelques références

WAFO. Wave Analysis for Fatigue and Oceanography (lth.se) : WAFO est une bibliothèque d'outils Matlab qui contient des outils relatifs au calcul d'endommagement par fatigue, la génération d'états de mer, une bibliothèque statistique et des fonctions mathématiques.

Application of the Rain-flow Counting Method in Fatigue - Guojun Liu1, a Dahuan Wang1, b and Zeyou Hu1, 2016

Wave Analysis Using Rainflow Information - Rebeca Gomez; Rafael Molina; Enrique Castillo; Carmen Castillo – IEEE – 2012

RAINFLOW CYCLE DISTRIBUTION AND FATIGUE DAMAGE IN GAUSSIAN RANDOM LOADINGS

DENIS BENASCIUTTI ROBERTO TOVO 2004

Cycle Range Distributions for Gaussian ProcessesV Exact and Approximative Results - GEORG LINDGREN – 2004

Applied probability and statistic processes – Michel K Ochi – 1990 – Wiley & Sons

Le pont entre les deux méthodes d'analyse semble correspondre à l'analyse par ondelettes dont le « rainflow counting » peut être vu comme une approximation et l'analyse spectrale comme une projection sur l'axe des fréquences.

Cette méthode de « rainflow counting » peut s'appliquer à toute série temporelle caractérisée par une suite de fluctuations (ou cycles) à toutes les échelles.

Calcul de la densité de probabilité conjuguée des amplitudes des cycles et des durées pour un signal de loi quelconque à spectre large

Nous partons des formules reprises dans la référence suivante :

Applied probability and statistic processes – Michel K Ochi – 1990 – Wiley & Sons

La densité conjointe des amplitudes et périodes f est directement reliée à la probabilité qu'un maxima Z excède une valeur x avec une accélération a soit P(x,a). Nous avons la relations

$$f(x,a) = \frac{d}{dx} \cdot (1 - P(x,a))$$

Si N(x,a) est le nombre moyen de dépassements de la valeur x avec l'accélération a

Si N est le nombre moyen de de maxima par unité de temps

Nous avons la relations

$$P(x,a) = \frac{N(x,a)}{N+(x)}$$

Si nous considérons la loi de répartition du signal, S sur position x, vitesse v et accélération a, nous pouvons écrire

$$N(x,a) = \int_{x}^{\infty} |a| \cdot S(u,0,a)du$$

$$N = \int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{0} |a| \cdot S(x,0,a) \cdot dadx\right)$$

Ces équations conduisent à la relations

$$f(x,a) = \frac{|a| \cdot S(x,0,a)}{N}$$

Nus devons calculer la fonction conjugué S(x,a) . Nous prenons x et a corrélés selon une droite de corrélation passant par l'origine des axes x et a. Les figures formées sont des « ellipsoïdes » définissant deux axes orthogonaux faisant un angle θ avec l'axe x. Nous définissons les variables u et v obtenues par la rotation des axes.

$$u = x \cdot cos(\theta) \pm a \cdot sin(\theta)$$
$$v = x \cdot sin(\theta) + a \cdot cos(\theta)$$

Nous disons que selon les axes u et v la loi S se projette sur le même type de loi q avec des facteurs déchelle différents. La formule de changement de varaiable des densités de probabilités conduit à

$$S(x,a) = q\left(\frac{u(x,a)}{H1}\right) \cdot q\left(\frac{v(x,a)}{H2}\right)$$

La dernière relation à introduire est la relation entre x, a et la période T en supposant un mouvement localement sinusoïdal au voisinage de (x,a)

$a = -\omega^2 \cdot x$avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$qui désigne la pulsation instantanée.ce qui conduit à un nouveau changement de variable dont le déterminant (jacobienne) vaut $J = \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot x}{T^3}$

On peut donc écrire S(x,T) liée au changement de variables

$$S(x,T) = \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot x}{T^3} \cdot q\left(\frac{u\left(x,-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x\right)}{H1}\right) \cdot q\left(\frac{v\left(x,-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x\right)}{H2}\right)$$

Ceci nous permet d'exprimer f(x,T) ddp cherchée

$f(x,T) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x \cdot S(x,T)$à une constante de l'intégration près (intégrale double unitaire) qui dépend de θ, H1 et H2.

La loi q définit le type de processus aléatoire. Si nous nous plaçons dans un contexte à faibles fluctuations, nous pourrons prendre pour q une loi de Gauss ou de Laplace. Dans le cas d'une forte variabilité, nous prendrons plutôt une loi de Lévy.

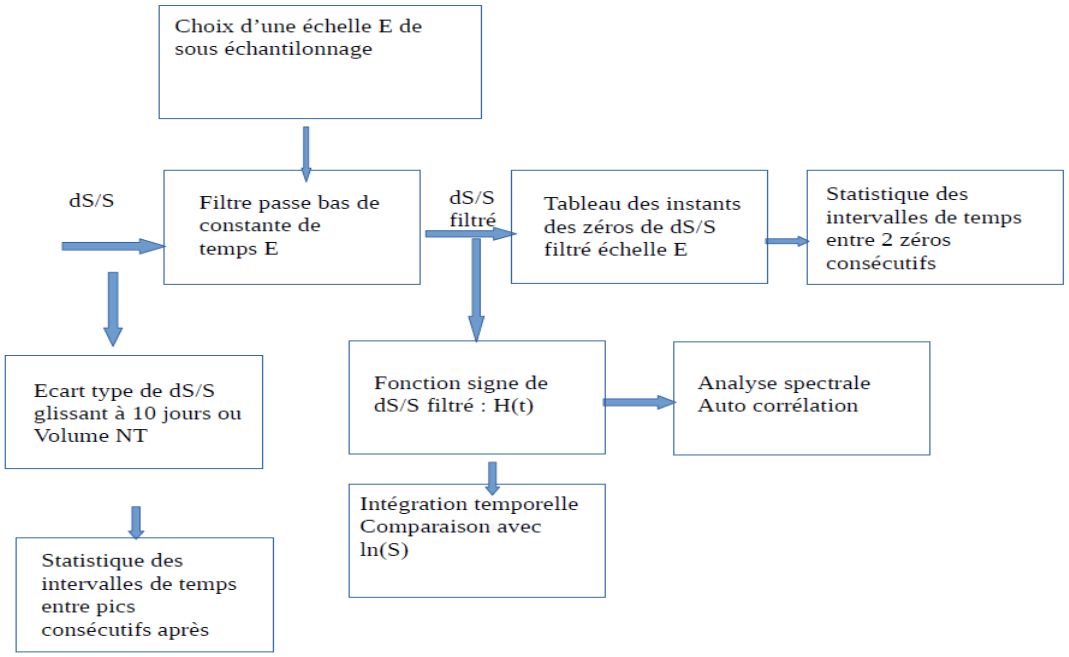
Forme composée du signal

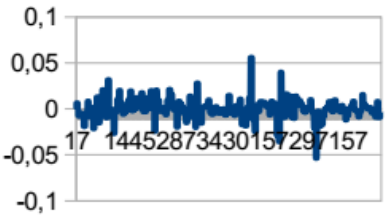
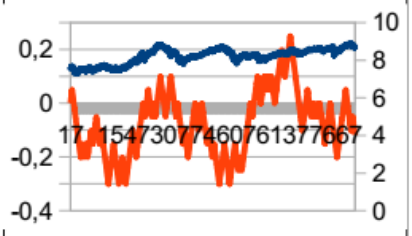
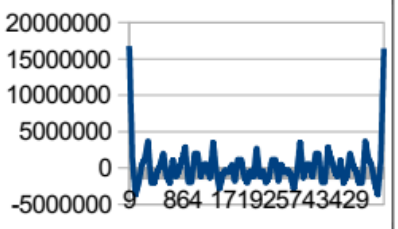
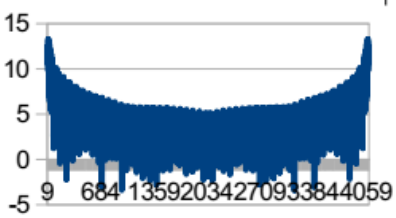
Les cycles se produisent de manière fractale. Nous allons étudier la répartition des cycles. Les cycles sont caractérisés par leur extremum, soit les zéros de la dérivée. Nous allons étudier les zéros de dS/S. Cette répartition dépend de l'échelle d'observation (période d'échantillonnage ou filtre passe bas comme outil d'analyse).

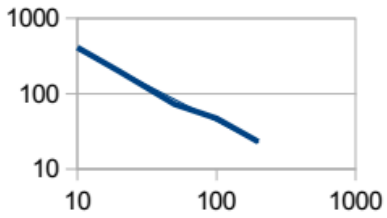
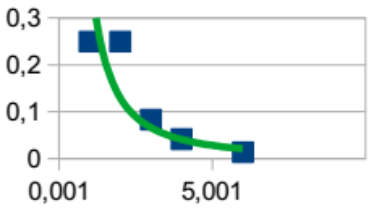
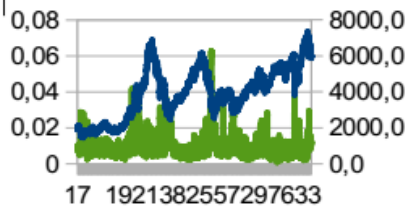
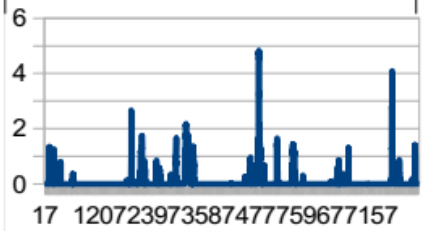
L'architecture d'analyse est la suivante :

A titre d'exemple, nous choisissons une échelle de E = 50 jours

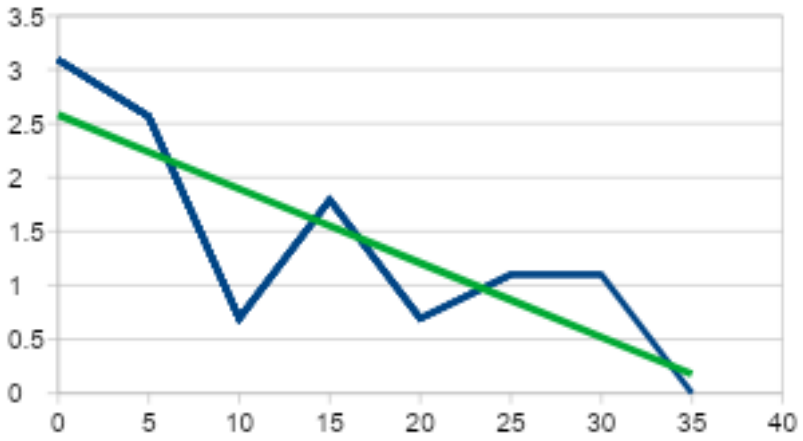
Nous donnons les résultats d'analyse



Sous échantillonnage de dS/S à l'échelle E=50 jours		
	Série temporelle de dS/S(E) échantillonné à 50 jours. Les passages par zéro sont au moins séparés de E.	Signe de dS/S(E). Cette fonction de bascule est suffisante pour interpréter la fonction ln(S).
		
	Reconstitution du signal ln(S) par intégration de signe de dS/S(E). Nous obtenons une forme très irrégulière qui respecte sensiblement les cycles de ln(S).	
		
	Auto corrélation du signe de dS/S(E).	Spectre du signe de dS/S(E). C'est le spectre d'un bruit blanc modulé par la forme du signal

		
	Loi de Richter : Evolution du nombre de zéros de dS/S(E) sur la durée d'observation (8800 valeurs) en fonction de E. On trouve un exposant proche de -1.	Histogramme des intervalles entre deux zéros consécutifs (durées de cycles). Nous trouvons une fonction de puissance de t/E avec un exxposant -1,6 = -5/3 (ratio le plus proche)
		
	Calcul de l'écart type de dS/S filtré (filtre passe bas à 10 jours). Nous voyons que les pics se superposent aux fronts montants et descendants des cycles de S (grandes variations).	Traitement du signal d'écart type. On ne garde que les pics les plus élevés (supérieurs à moyenne glissante + sigma glissant). On peut dès lors calculer les intervalles entre pics consécutifs et faire une statistique.

Histogramme des intervalles entre deux achats consécutifs (instants de début des cycles) calculés à partir des pics positifs de dS/S (intervalles enttre deux pics consécutifs). On trouve une loi exponentielle décroissante avec une constante de temps de 13 jours. Nous sommes pour les processus d'achats en présence d'un processus de Poisson de paramètre 13 jours.



Nous sommes donc en présence d'un système complexe, en ce sens qu'il est composé à la fois de boucles d'asservissement (négatives) et de boucles d'amplification (positive).

Passons à la modélisation des cycles par un système dynamique. Nous proposons un modèle à partir de l'équation générique des cycles.

Un cycle C(t) est la dérivée d'un processus de croissance H(t). Nous avons les équations d'un modèle général de croissance qui généralise l'équation logistique :

$$\frac{dH}{dt} = K \times H^{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{H}{\mu}\right)^{\beta}$$

et l'équation du cycle C(t) dérivée de H

$C(t) = \frac{dH}{dt}$

Si nous posons le flux Φ des achats / ventes

$\Phi(t) = N_A - N_V$

Les relations de modélisation de dS/S en fonction des cycles donne

$\Phi(t) = \frac{dC}{dt}$

$\frac{dS}{S} = \frac{Gdt}{T} \times \Phi(t)$où G est une constante d'ajustement et T est la durée de corrélation de ln(S).

Nous pouvons dès lors modéliser la cascade fractale de cycles par la relation suivantes

$$\frac{dS}{Sdt} = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right)$$

avec t(i) est une date d'achat tirée au hasard et T(i) une durée de cycle tirée au hasard. N est tel que t(N) correspond au dernier tirage avant la fin de la suite de données. t(i) et T(i) dépendent d'une échelle d'observation E et de la période d'échantillonnage de dS/S (heure, jour, mois …).

Les paramètres du modèle sont

- L'amplitude du cycle Mu (en relation avec T(i)) : variable aléatoire (tirage selon une loi de Laplace)
- La forme de cycle : exposants alpha et beta et la constante K
- Le paramètre G/T.

- L'échelle d'approximation E (sous échantillonnage)

Nous avons ainsi défini une analyse puis une reconstruction par l'application d'une ondelette particulière. Ce processus est un processus de Poisson filtré. Les déclenchements (achats) sont répartis selon une loi de Poisson de paramètre 13 jours. La durée des cycles est une loi de puissance avec un exposant -1,6.

Je renvoie à deux références quant aux éléments théoriques sur les processus de Poisson filtrés :

Applied probability and stochastic processes – Michel K Ochi – John Wiley & Son – 1990

Applied Non Gaussian processes – Mircea Grigoriu – Prentice Hall - 1995

Analogies dans le monde des sciences

Comportement de systèmes physiques

Ces équations basées sur l'observation peuvent être interprétées de manière physique par une construction d'analogie avec la physique élémentaire . En effet certains auteurs ont montré que comme tout phénomène physique, les marchés financiers obéissent à une dualité entre un principe créateur (diffusion) et un principe de « réaction » ou de mort

Référence :

A reaction–diffusion model for market fluctuations – A relation between price change and traded volumesStevenYuvan, MartinBier∗ Physics Letters - 2018

	Energie	Variable d'état	Dynamique, Mouvement	Force	Mécanisme de diffusion	Mécanisme de réaction
CAC 40	Impulsion initiale du Marché qui est une fonction croissante de H, se transforme en dynamique C et se disperse (Krach) par le retour progressif à la réalité du marché	Variable H : Correspond à une « taille » du phénomène de croissance du cycle d'achats/ventes	Cycle élémentaire C (cycle de vie du flux d'achats, ventes)	PHI = dC/dt (Achats et ventes)	Volume d'achats/ Ventes (NT = NA+NV)	« Résistance » du marché : prix « vrai » des actions (loi de l'offre et de la demande » caractérisée par la probabilité d'achat (NA/NT)

	(offre et demande)					
Mécanique	Energie mécanique	Position (Energie potentielle)	Vitesse (Energie cinétique)	Accélération	Force	frottement (dissipation d'énergie)
Electricité	Puissance électrique	Charge (capacité, réserve d'énergie)	Intensité (courant électrique)	Tension	Tension électrique	Résistance du conducteur
Turbulence	Energie initiale du tourbillon qui se transforme en taille et vitesse et se disperse en viscosité	vitesse et taille	Cycle de vie du tourbillon et d'échange d'énergie	Vitesse du fluide	Viscosité dynamique (Vitesse d'entraîn ement)	Viscosité (dissipation de l'énergie)

Comportement de variables économiques

Nous avons mis en dualité deux grandeurs :

- Le prix de l'action qui conditionne l'achat/vente de la part des investisseurs
- La probabilité d'achat qui traduit le comportement global des investisseurs. Le système dynamique montre qu'il y a adaptation des investisseurs à la réalité du marché. Cette probabilité traduit une loi des grands nombres (stratégie majoritairement chooisie à un instant donné).

Nous avons ainsi déterminé une contre réaction entre le prix des actions et la probabilité des achats. Le sysème différentiel proie/prédateurs est représentable par un jeu de contre réactions positives et négatives

Références

A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics - Lars Weber – 2005

Cette analyse peut être généralisée à d'autres systèmes à la fois issus des sciences physiques, mais aussi des sciences sociales. La principale application de cette approche concerne l'analyse des cycles économiques. Nous avons exploité

- les données de l'économie américaine de 1947 à 2019 (taux de croissance des salaires par personne) et chiffres du chômage (205 à 2019)
- Les chiffres de l'indice des prix en France et des niveaux de ventes des biens de consommation (France de 2005 à 2022 ; chiffres INSEE).

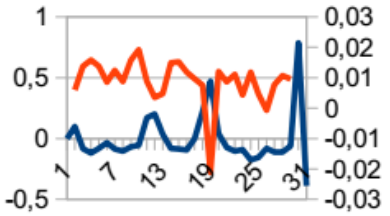
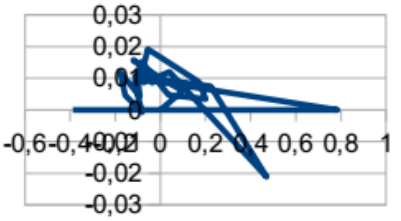
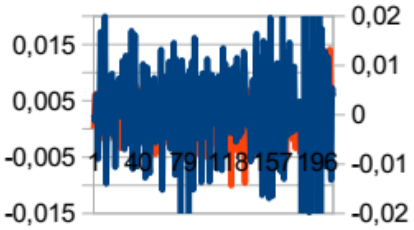
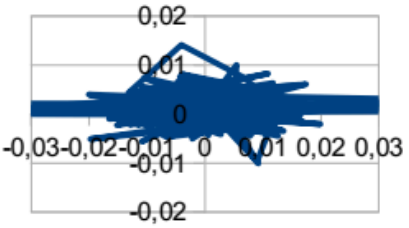
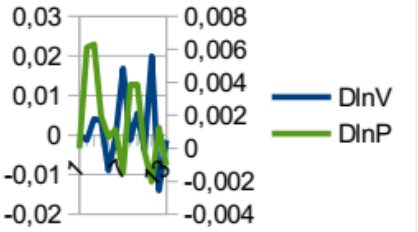
A l'image des marchés financiers, nous avons mis en dualité :

- Le Taux de croissance des salaires (équivalent au prix de l'action) et le taux de chômage (que nous pouvons directement corréler à une probabilité d'emploi, reflet d'un comportement global de la population)
- L'indice des prix est équivalent à une valeur de prix de biens. Les chiffres de vente sont liés aux achats par les ménages (probabilité qui sous tend une tendance générale pour une population donnée).

Nous avons traité ces informations de manière symétrique :

- Calcul de l'évolution temporelle du logarithme de la grandeur LNG (t)
- Evaluation d'une moyenne glissante M(t) de la valeur (filtre passe bas du 1er ordre avec une constante de temps proche de 1 an) et calcul de la dérivée DLNG
- Calcul de la valeur absolue du rapport R(t) = (LNG(t)-M(t))/M(t)
- Représentation d'un espace des phases avec DLN pour la valeur de prix et pour la valeur de probabilité. L'idée consiste à comparer les variations des deux ratios (opposition de phase).

Nous représentons les résultats relatifs à notre analyse de la croissance américaine et de l'indice des prix en France.

Croissance américaine		
	Variations comparée de la variation de taux de croissance et du taux d'emploi. Nous observons une variation inverse.	Cycle limite de la croissance comparée à l'emploi
Indice des prix en France		
		
	Variations comparée de la variation de l'indice des prix et des ventes. Nous observons une variation inverse soit une opposition de phase (zoom).	Cycle limite prix/ventes

D'un point de vue économique, nous sommes sur des cycles de Goodwin caractérisés par des cycles limites proies/prédateurs. Ces cycles comme pour les marchés financiers apparaissent à toutes les échelles d'observation. Nous sommes ainsi en présence de processus de branchement. Les cycles mettent en dualité deux grandeurs qui évoluent en sens inverse (opposition de phase).

La théorie de Goodwin pour les cycles économiques date de 1962. Depuis des travaux d'études économiques ont été réalisées. Néanmoins peu d'analyses expérimentales sur des données économiques ont été réalisées.

Nous proposons les références suivantes :

A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective - Lars Weber (2005)

AN EMPIRICAL STUDY OF GOODWIN GROWTH MODELS - ADITYA MAHESHWARI, M.Sc. - Thesis - 2015

PREDATOR-PREY: AN EFFICIENT MARKETS MODEL OF STOCK MARKET BUBBLES AND THE BUSINESS CYCLE – Eduard Garcia - 2019

Comportement d'un tas de sable

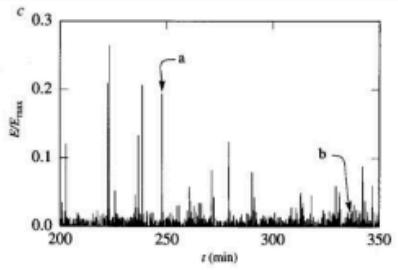
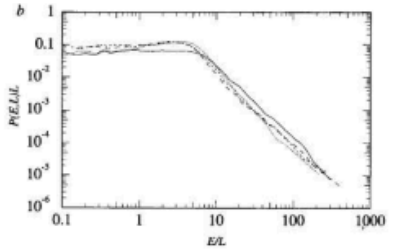
L'analogie entre phénomènes physiques est un moyen très efficace de construire des modèles. Néanmoins, toute analogie doit reposer sur une validation sur l'expérience. Nous ne disposons hélas pas de données sur la dynamique d'avalanches. Cependant ce phénomène a été observé et il existe une bibliographie importante sur les résultats d'observation ou de simulation. Nous nous appuierons sur les références suivantes :

Références :

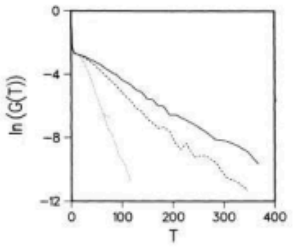
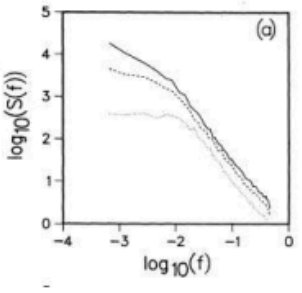
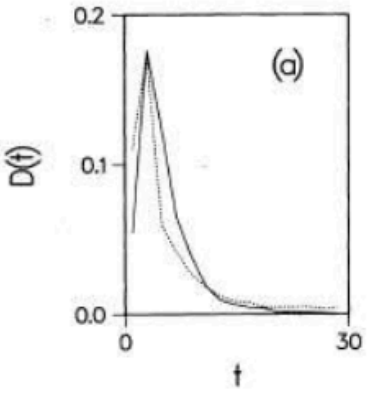
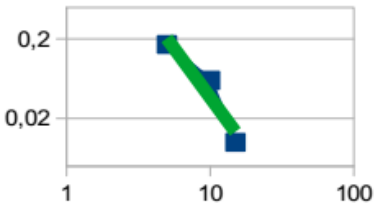
1/f noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand - Henrik Jejdtoft Jensen, Kim Christensen and Hans C. Fogedby - Physical review. B, Condensed matter · October 1989

Avalanche dynamics of a pile of rice – Vidar Frette , Kim Christensen – Letters to Nature – 1996

Dans ces 3 articles, nous voyons que la succession des avalanches est un processus de renouvellement. Les caractéristiques sont les suivantes

Avalanche dynamics of a pile of rice. Dans cet article, les auteurs réalisent une expérience avec une plaque inclinée et un écoulement continu de riz, pour deux catégories de riz avec des formes de grains différentes.		
	La succession des pics d'avalanche (date inférieure du cycle d'avalanche) assez rapprochés montrerait une loi de Poisson : pas de grands écarts entre pics	La loi de répartition des tailles d'avalanches pour une catégorie de riz est une loi de puissance avec un exposant proche de -2. Pour une autre catégorie de riz, les courbes de répartitions ne sont pas tracées en échelle logarithmique, nous pouvons difficilement comparer.

Dans le problème des avalanches de tas de sable, nous définissons un cycle élémentaire comme le déroulement d'une avalanche. La durée de cycle correspond à la durée de l'avalanche. Nous voulons comprendre le modèle de loi de puissance pour ces durées.

1/f noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand Dans cet article , le tas de sable étudié est un simulateur à base d'algorithme de « Lattice Gaz » qui reproduit les propriétés d'une expérience avec du sable réel.		
	Fonction de corrélation du signal d'avalanches. Nous constatons en échelle semi Log une loi exponentielle décroissante (Laplace)	Le spectre associé est un spectre en 1/f à la puissance 2 (Lorentzienne).
		
	Densité de probabilité des intervalles de temps entre avalanches (trait pointillé) et durée des avalanches (traits pleins). Les échelles n'étant pas logarithmiques, il est difficile de conclure.	Nous considérons une représentation de la loi de probabilité des durées des avalanches (Incertitude liée à la lecture sur la courbe précédente). Nous obtenons pour la densité une loi de puissance avec un exposant d'ordre -2,5. Nous ne savons conclure sur cet exposant (manque de données et forte incertitude)

Pour cela, la représentation graphique en arc d'un cycle nous conduit à dire qu'il existe un moment aléatoire où la valeur de redescente correspond à la valeur initiale. Ceci correspond à un « premier passage » du signal aléatoire ou première rencontre (« first hitting » en Anglais). Le problème se ramène donc à l'établissement d'une densité de premier passage (densité des durées de cycles) pour un signal à queue lourde (amplitudes des avalanches).

Référence :

First passage and first hitting times of Lévy flights and Lévy walks - Vladimir V Palyulin , George Blackburn , Michael A Lomholt4 , NicholasW Watkins Ralf Metzler , Rainer Klages and Aleksei V chechkin – New journal of physics – 2019

Cet article donne les éléments de réponse d'un point de vue asymptotique. En effet nous pouvons considérer la succession des avalanches comme un processus de Lévy. La loi des premiers retours obéit alors à une loi de puissance d'exposant -3/2.

De ce fait notre tas de sable serait une composition de cycles (avalanches)

- dont les dates de début seraient réparties selon une loi de Poisson
- dont les durées de cycle seraient réparties selon une loi de premier passage, donc de puissance avec un exposant -3/2. De même pour les retours du CAC 40, les durées de cycle sont réparties selon une loi de puissance avec un exposant -3/2. La valeur 1,6 trouvée pour le CAC semble convenir. La valeur 2,5 sur le tas de sable expérimental semble plus lointaine (forte incertitude et peu de points?)

Nous aurions ainsi dressé une analogie entre les deux phénomènes. Pour confirmer cette analogie, nous allons établir des résultats statistiques sur des données de simulation de tas de sable.

Référence :

Modeling temporal fluctuations in avalanching systems - M. Rypdal and K. Rypdal – 2008 – Physical Review

L'idée consiste à considérer une équation différentielle stochastique particulière, donnée en référence et à l'étudier en simulation. Nous présentons les résultats sur un rejeu déjà significatif alors qu'un Monte Carlo serait plus pertinent.

L'équation différentielle stochastique se met sous la forme

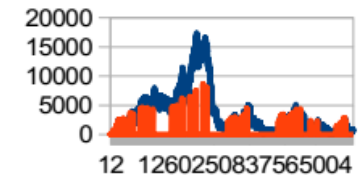
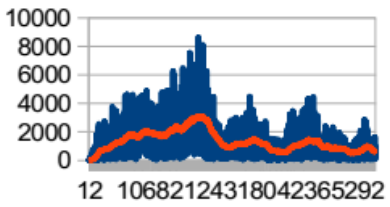
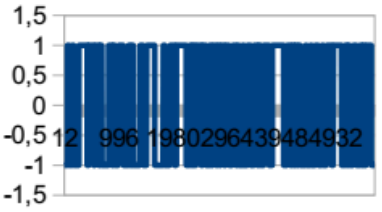
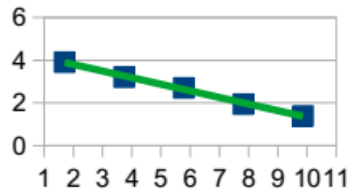
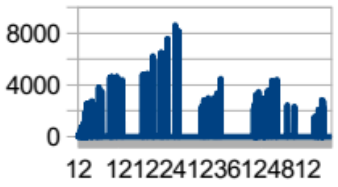
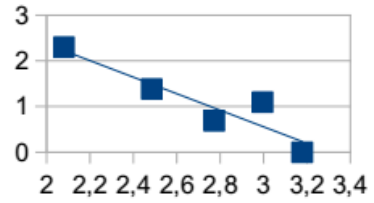
$$\frac{dS}{S^{\alpha}} = W(t) \cdot dt$$

où W(t) est un bruit blanc décorrélé et alpha est un nombre positif inférieur à 1.

L'intégration de cette équation s'écrit

$$S(t) = \left(\left| \int_0^t W(u) du \right| \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Nous appliquons sur le rejeu et sa dérivée les mêmes traitements que sur les return du CAC et sa dérivée

Alpha = 0,5 Niveau de W(t) : 1 Echelle d'analyse des zéros 30 Echelle de filtrage du signal 100 Seuil de détection des pics 2,5		
	Superposition du signal S(t) et des pics de dérivée après seuillage	Seuillage de la valeur absolue de la dérivée. Filtre passe bas de constante de temps 100 pas d'échantillonnage donne une valeur moyenne m(t). le seuil est fixé à 2,5 *m(t).
Analyse des zéros de la dérivée		
	Signal de bascule obtenu sur les maxima relatifs.	Statistique des intervalles de temps entre deux maxima consécutifs. On obtient sensiblement une loi de Poisson.
Analyse de la durée des cycles		
	Représentation temporelle des pics de dérivée, sensés donner une approximation de la durée des cycles.	Les durées mesurées suivent une loi de puissance avec un exposant proche de -3/2.

Conclusion

Cette étude nous conduit à dresser une analogie (mêmes propriétés statistiques entre la physique du tas de sable, les processus de marchés financiers et les processus de branchement

	Processus de branchement	Marché financier	Tas de sable
Equation	$\frac{dx}{x.dt} = 1T \times \left[\frac{E(t)}{S} \cdot 1\right]$	$\frac{dS}{S} = \frac{Gdt}{T} \times \Phi(t)$	$\frac{dS}{S^{\alpha}} = W(t) \cdot dt$
Bruit W(t)	Si nous considérons W(t)=E(t)-1 comme un bruit blanc stable, nous pouvons nous ramener au cas du tas de sable par le changement de variable en identifiant les deux termes différentiels : $ln(x) = \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}$	Phi se comporte de manière macroscopique comme un bruit blanc de Laplace. Nous sommes analogues au processus de branchement et par changement de variable au tas de sable	Le tas de sable est analogue au marché financier et au processus de branchement par changement de variable.
Solution en terme de cycles	$ln(S) = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} C\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right)$	$ln(S) = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right.$	$ln(S) = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} C\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right.$
Analyse des cycles	Les cycles C sont aléatoires.	La fonction Phi est la fonction de cycle générique. Les amplitudes dépendent des durées et obéissent à une loi de Laplace.	Après changement de variable. Les cycles C (avalanches) sont des cycles aléatoires en amplitude
Statistique des fronts montants de cycles	Loi de Poisson	Loi de Poisson	Loi de Poisson
Statistique des durées de cycles : probabilité de 1er passage.	Loi à queue lourde (exposant -3/2)	Loi à queue lourde (exposant -3/2)	Loi à queue lourde (exposant -3/2)
Auto spectre	$S(f) = \frac{1}{f^2}$	$S(f) = \frac{1}{f^2}$	$S(f) = \frac{1}{f^2}$

Nous avons ainsi défini une classe de processus qui s'appuie sur les processus de branchement. Nous pouvons encore généraliser aux dérivations fractionnaires.

	Dérivée entière	Dérivée fractionnaire
Variables	x, s	x, s
Bruit blanc W(t)	Bruit gaussien ou bruit à ddp à décroissance rapide.	Bruit de Lévy ou bruit à ddp à queue lourde.
Changement de variable	$ln(x) = \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ et $y = ln(x)$	$ln(x) = \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} y = ln(x)$
Equation	$\frac{dy}{dt} = \frac{W(t)}{T}$	$\frac{d^{\beta} \cdot y}{dt^{\beta}} = \frac{W(t)}{T^{\beta}}$
Densité spectrale de y (transformée de Fourier d'une dérivée)	$S(f) = \frac{1}{f^2}$	$S(f) = \frac{1}{f^{2\beta}}$
Fonction d'auto corrélation (analogie avec la fonction caractéristique des lois de Lévy)	$C(t) = exp\left(\frac{-t}{T}\right)$	$C(t) = exp\left(-\left(\frac{t}{T}\right)^{\beta}\right)$
Solution en terme de cycles	$y = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} C\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right)$	$y = \frac{G}{T} \times \sum_{i=1}^{N} C\left(\frac{t-t_i}{T_i}\right)$
Statistique des durées de cycles T(i)	Loi de puissance d'exposant -3/2	Loi de puissance d'exposant -3/2
Statistique des fronts montants t(i)	Loi de Poisson	Loi de Poisson
Modèle de cycle C(t)	$C(t) = A \times \left(\frac{t}{T}\right)^{\eta} \times \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\zeta}$	$C(t) = A \times \left(\frac{t}{T}\right)^{\eta} \times \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\zeta}$
Statistique des signaux	Loi de Laplace	Loi de Lévy
Loi amplitude/ période des cycles	Loi de probabilité composée en prenant q comme loi de Laplace	Loi de probabilité composée en prenant q comme loi une loi de Lévy

Ces systèmes définissent une cascade sur les cycles de différentes durées (Loi de puissance avec un exposant -3/2). Cette cascade crée une courbe dite fractale, très irrégulière de par la superposition de cycles à toutes les échelles.

Ce système a le même comportement qu'un système de Lotka Volterra dont les paramètres sont des bruits gaussiens et évoluent avec le temps.