Relation entre marché financier et modèle de comportement des acteurs

Table des matières

Résumé....3
Synchronisation d'oscillateurs....4
Le fil conducteur : de Kuramoto aux dynamiques collectives....6
Le modèle « marché » que nous avons construit....6
Paramètres....9
Résultats....11
1) Ce que montre chaque panneau....12
2) Le film d'un cycle (ce qui se passe « sous le capot »)....12
3) Pourquoi ce cycle naît sans qu'on « pousse » de l'extérieur....13
4) Comment lire (et utiliser) les quatre courbes....13
5) Si vous voulez « sculpter » la forme du cycle....13
Artefacts numériques....14
Ce que ce cadre permet (et ce qu'il ne promet pas)....15
Références....16
Fondamentaux de la synchronisation / Kuramoto....16
Phase seule, injection locking, équation d'Adler....16
Carte du cercle, mode locking et "devil's staircase"....17
Extensions (phase-lag, réseaux)....17
Éconophysique & microstructure (pour la partie "marchés")....17
Estimation & filtrage (EWMA) pour tendances/biais....17
Discrétisation numérique robuste (stiff/IMEX/SDE)....17

Résumé

Ce chapitre établit un pont entre les marchés financiers et les modèles de synchronisation collective inspirés de Kuramoto. Il part d'une idée simple : un marché peut être vu comme une population d'agents ayant chacun leur rythme, leurs anticipations et leur sensibilité à l'information, mais capables de s'influencer mutuellement jusqu'à produire des comportements collectifs synchronisés. Le texte rappelle d'abord les bases de la synchronisation d'oscillateurs, depuis l'équation d'Adler et le verrouillage de phase jusqu'au modèle de Kuramoto, où l'accord global émerge sans chef d'orchestre extérieur. Cette montée en puissance permet de penser la transition entre comportements individuels dispersés et mouvements collectifs ordonnés.

Le cœur du chapitre consiste ensuite à adapter cette logique aux marchés financiers. Le modèle construit conserve l'intuition de Kuramoto, c'est-à-dire des agents qui s'influencent, mais y ajoute une boucle de rétroaction par le prix. Le flux agrégé d'ordres agit sur le marché, le prix réagit, et cette réaction modifie en retour le comportement collectif. Un biais de marché, calculé à partir d'un lissage de type EWMA, suit les changements de signe du flux agrégé acheteur-vendeur et sert de marqueur des bascules de régime. Le système reproduit ainsi un cycle de marché endogène, sans forçage extérieur explicite.

Les résultats de simulation sont interprétés à travers quatre courbes principales : le prix, la cohérence collective, le flux agrégé et le biais. Le mécanisme décrit est celui d'une montée progressive de la cohérence entre agents, qui entraîne un flux d'achats dominant, puis une hausse du prix. Cette hausse finit toutefois par préparer son propre retournement : les mécanismes internes de relaxation, la saturation de la cohérence et le glissement de la phase moyenne conduisent à une inversion du flux. Le sommet du marché apparaît alors lorsque les agents restent encore alignés, mais dans une direction qui n'est plus favorable à la hausse. Le biais bascule ensuite, confirmant le passage d'un régime haussier à un régime baissier. Le cycle repose donc sur le triptyque seuil de synchronisation, boucles de rétroaction et mémoire courte.

Le texte insiste aussi sur un point méthodologique important : certaines oscillations observées dans les simulations peuvent n'être que des artefacts numériques. Lorsque le couplage devient fort ou que les échelles de temps se séparent fortement, des schémas explicites mal adaptés peuvent fabriquer des cycles fictifs. Le chapitre montre alors l'importance de choisir des méthodes de discrétisation robustes, adaptées aux systèmes raides, de respecter la géométrie des phases et de contrôler le pas de temps. Cette vigilance numérique est essentielle pour distinguer les phénomènes réellement produits par le modèle de ceux qui proviennent de la méthode de calcul.

Au total, ce cadre fournit un modèle phénoménologique puissant pour relier micro-comportements et observables de marché. Il explique comment des phénomènes d'euphorie, de panique, de montée, de pic puis de chute peuvent émerger de manière

endogène à partir de l'influence mutuelle des acteurs. En revanche, le texte prend soin de préciser qu'il ne s'agit pas d'une machine de prédiction clé en main, mais d'un laboratoire conceptuel et numérique permettant d'explorer la dynamique collective des marchés, d'y intégrer des biais, des effets de mémoire, des réseaux d'interaction ou des paramètres calibrés sur des données réelles.

Synchronisation d'oscillateurs

On peut raconter l'histoire de la synchronisation comme une montée en puissance, depuis l'apprivoisement d'un seul oscillateur par un chef d'orchestre extérieur, jusqu'au concert spontané de milliers d'oscillateurs qui s'accordent entre eux. Au départ, l'image est très simple : on pousse périodiquement un système qui a son propre rythme, comme un pendule ou un oscillateur électronique, et l'on observe qu'il peut se verrouiller sur le rythme du forçage. C'est cette capture que formalise l'équation d'Adler. Elle dit, en substance, qu'il existe une fenêtre de tolérance autour de l'égalité des fréquences où la différence de phase cesse de dériver, se fige, et que le système bat désormais « à l'unisson » de la source. Plus l'accrochage est fort, plus cette fenêtre s'élargit ; au-delà, la phase recommence à glisser et l'on perd l'accord. L'intuition est mécanique : à chaque coup de pouce, on corrige un peu l'avance ou le retard, jusqu'à ce que la correction compense exactement l'écart naturel. C'est le principe des boucles à verrouillage de phase en électronique, de l'« injection locking » des lasers, ou du métronome que l'on entraîne au doigt.

Quand on répète ce geste à chaque tour, on obtient une carte itérative très parlante qu'on appelle parfois « carte du cercle ». À chaque période, on ajoute la différence de fréquence et on retranche une petite correction non linéaire qui depends de la phase. Si l'on balaie la force de couplage, on voit apparaître des plateaux de verrouillage à des rapports entiers simples, séparés par des zones où la phase glisse. Le dessin qui en résulte, un escalier irrégulier, raconte la compétition entre entrainement et liberté : tant que la correction peut rattraper la dérive, on reste accroché ; sinon, on repart en roue libre. Ce paysage explique pourquoi des systèmes résonnent si facilement sur des ratios simples, et pourquoi la transition vers des dynamiques plus compliquées, voire chaotiques, se fait par paliers.

La vraie bascule conceptuelle arrive quand on enlève le chef d'orchestre. Au lieu d'un forçage unique, on met ensemble une population d'oscillateurs, chacun avec sa fréquence propre, et on les couple faiblement tous à tous. Chacun « écoute » la moyenne des autres et ajuste très légèrement sa phase en conséquence. C'est le cadre du modèle de Kuramoto. On n'a plus un oscillateur mené par une source, on a une société d'oscillateurs qui se parlent. Deux choses deviennent essentielles. D'abord, l'hétérogénéité : toutes les fréquences naturelles ne sont pas identiques. Ensuite, la force de couplage : trop faible, chacun suit son cap ; suffisamment forte, une fraction non négligeable parvient à s'aligner.

L’intuition centrale de Kuramoto se résume en une question : quel est le degré d’accord global du groupe ? On le mesure par un « paramètre d’ordre » compris entre zéro et un. S’il est proche de zéro, les phases sont uniformément étalées et rien ne s’additionne ; s’il est élevé, beaucoup d’oscillateurs battent ensemble et l’on entend une pulsation nette. Ce paramètre joue un double rôle. Il résume l’état collectif et, dans le même temps, il renforce le couplage effectif ressenti par chacun. C’est un cercle vertueux : un peu d’alignement accroît l’influence de la moyenne, qui favorise à son tour l’alignement. Lorsque l’on augmente progressivement la force d’interaction, on observe un point critique au-delà duquel ce cercle vertueux s’emballe et un paquet d’oscillateurs se met soudain à chanter à l’unisson. Au-dessous, le bruit de fond ; au-dessus, la synchronie partielle.

Il n’est pas nécessaire de noyer le lecteur d’équations pour sentir cette bifurcation. On peut la comprendre comme une balance entre la diversité des rythmes, qui étire le groupe, et la solidarité du couplage, qui le resserre. La largeur de la distribution des fréquences mesure la dispersion, la force de couplage mesure la cohésion ; lorsque la cohésion dépasse un seuil proportionnel à la dispersion, l’unisson collectif devient attractif. Cette image explique aussi pourquoi la synchronisation peut être graduelle ou abrupte, selon la forme de la dispersion et la façon dont on connecte les oscillateurs.

Très vite, on enrichit Kuramoto pour coller au réel. On ajoute un déphasage « structurel » qui modélise des délais ou des frictions : l’influence de la moyenne n’est plus exactement en phase avec l’oscillateur, ce qui peut stabiliser des états partiels ou au contraire rendre l’accord plus difficile. On remplace le couplage « tous à tous » par un réseau : chacun n’écoute que ses voisins, avec des intensités inégales, et la topologie du graphe devient un acteur majeur. On introduit du bruit, qui fait fluctuer les phases et teste la robustesse de l’accord. Et, pour l’analyse, on utilise des réductions mathématiques élégantes qui condensent l’infinité des phases en quelques équations pour l’amplitude et l’angle moyens. Mais l’intuition reste la même : dispersion contre couplage, écoute mutuelle contre idiosyncrasie.

À ce stade, les applications se multiplient presque naturellement. En électronique, un oscillateur radio peut se caler sur un signal de référence, ou bien des réseaux d’oscillateurs se synchronisent pour stabiliser une horloge. En photonique, des lasers à couplage optique se verrouillent et émettent de façon cohérente. Dans les réseaux électriques, des machines tournantes doivent rester en phase pour que la puissance circule sans heurts ; l’approche de type Kuramoto aide à comprendre comment un défaut local peut désynchroniser un ensemble et comment renforcer la stabilité. En neurosciences, des populations de neurones oscillent à des rythmes qui se coordonnent transitoirement pour réaliser une tâche ; l’équilibre entre synchronie (utile à la communication) et désynchronie (utile à la flexibilité) s’analyse finement avec ces outils. Dans les systèmes vivants, des essaims de lucioles s’alignent naturellement, des cardiomyocytes isolés se couplent et battent ensemble, des rythmes circadiens s’entrainent sur la lumière. Et jusque dans les phénomènes sociaux, l’analogie fonctionne : des individus ajustent leur « phase » à ce que fait le groupe, et l’on voit émerger des pics

d’attention, des vagues d’adoption, des applaudissements qui se mettent soudain au même tempo.

Ce parcours éclaire aussi la frontière entre synchronisation et verrouillage. L’équation d’Adler illustre l’entrainement : une seule source domine, l’oscillateur s’y aligne s’il n’est pas trop éloigné. Kuramoto illustre l’auto-organisation : personne ne commande, mais l’écoute mutuelle suffit, au-delà d’un certain seuil, à fabriquer un rythme partagé. Dans le premier cas, le critère est une marge de capture autour de la fréquence de la source ; dans le second, c’est un point de bascule collectif où la cohésion l’emporte sur la diversité.

On comprend, enfin, pourquoi la non-linéarité n’est pas un détail. C’est elle qui transforme une correction infinitésimale en stabilisation de la phase, qui sculpte l’escalier des régimes verrouillés, qui autorise des états partiellement synchrones où une « coalition » se forme alors que le reste continue à glisser. C’est elle, encore, qui explique les transitions : un système trop couplé peut devenir raide, sensible au bruit et aux délais, et basculer entre ordre et désordre. C’est là qu’interviennent les bonnes pratiques numériques lorsqu’on simule ces équilibres délicats, car un intégrateur imprudent peut fabriquer des oscillations qui n’appartiennent pas au modèle mais à la méthode de calcul ; on préserve alors l’intuition en choisissant des schémas stables et en respectant la géométrie des phases.

Si l’on devait retenir une seule idée, ce serait celle-ci : la synchronisation n’est pas un miracle, c’est une économie. À petite échelle, une correction de phase répétée finit par fixer l’écart et par caler un oscillateur sur sa source. À grande échelle, une conversation permanente entre des agents aux rythmes différents réussit, si elle est assez forte, à créer une pulsation commune. Entre Adler et Kuramoto, on passe de l’obéissance à la coopération, du verrouillage imposé à l’unisson émergent — et l’on gagne un langage pour penser des phénomènes qui vont des horloges atomiques aux réseaux électriques, des essaims aux réseaux sociaux, des lasers aux neurones.

Le fil conducteur : de Kuramoto aux dynamiques collectives

À l’origine, le modèle de **Kuramoto** décrit comment des oscillateurs faibles mais **couplés** (des agents qui ont chacun un « rythme propre ») peuvent **se synchroniser** partiellement. On le rencontre dans des domaines très variés : pulsation de lucioles, réseaux électriques, synchronisation de lasers, rythmes circadiens… et, par analogie, **réseaux sociaux** ou **mouvements de masse** où des opinions ou intentions d’agir se mettent au diapason. L’extension **Kuramoto–Sakaguchi** ajoute un **décalage de phase** qui permet de modéliser des délais, des biais d’alignement et des frictions — des ingrédients essentiels quand on parle d’information, d’anticipation et d’exécution sur un marché.

Le modèle « marché » que nous avons construit

Nous avons gardé l'intuition de Kuramoto (des agents qui s'influencent) et nous l'avons **bouclée** avec un prix impacté par le flux d'ordres. Tout est volontairement simple et transparent.

1) Les agents (opinions → cohérence)

Chaque agent i possède une **phase** $\theta_i(t)$ (sa « position d'opinion ») et une **fréquence naturelle** ω_i. Leur dynamique suit une loi de phase avec couplage moyen :

$$\mathrm{d}\theta_i = \Big[\omega_i + K(t)\, r(t)\, \sin\big(\psi(t) - \theta_i - \alpha\big)\Big]\mathrm{d}t \;+\; \sigma_\theta\, \mathrm{d}W_i.$$

Le complexe

$$z(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{\mathrm{i}\theta_i(t)} = r(t)\, e^{\mathrm{i}\psi(t)}$$

mesure la **cohérence** $r \in [0,1]$ (0 : opinions dispersées, 1 : alignement fort) et la **phase moyenne** ψ.

Text

---

2) De l'opinion au flux d'ordres

Lorsque les opinions deviennent cohérentes, elles se traduisent en **flux net** $Q(t)$. Nous utilisons une approximation « moyen-champ » :

$$Q(t) \;\approx\; N\, q_0\, r(t)\, \sin\big(\psi(t) - \phi_{\text{bias}}(t)\big).$$

Le terme $\phi_{\text{bias}}(t)$ code un **biais de narration** (périodes plutôt « achat » puis plutôt « vente »). Quand ψ s'aligne avec ce biais, le flux net devient fort et univoque.

Text

3) Du flux au prix (log-prix strictement positif)

On fait évoluer le **log-prix** $L(t)$ pour garantir $S(t) = S_0 e^{L(t)} > 0$:

$$\mathrm{d}L(t) = \big[\eta\, Q(t) + \mu(t)\big]\mathrm{d}t \;+\; \sigma_L\, \mathrm{d}W_t.$$

Le coefficient η est un **impact linéaire** (plus le flux net est grand, plus le prix se décale). Le **drift** $\mu(t)$ pilote la **forme de cycle** : chez nous, il est **piècewise** (positif sur la rampe de montée, négatif sur la chute) et peut recevoir un **boost court** en fin de rampe pour former un **pic** marqué (« sommet » de dent de scie).

Text

4) Un couplage social endogène $K(t)$

Le couplage n'est pas constant : il **réagit** à ce qui se passe sur le prix (volatilité, tendance) et à des **pulses d'actualité** $M(t)$:

$$\dot{K} = \; a_0 - bK \;+\; a_1\, S_{\mathrm{abs}}(t) \;+\; a_2\, S_{\mathrm{ret}}(t) \;+\; c_M\, M(t) \;-\; c_p\, r(t)^2 \;+\; \sigma_K\, \xi_t.$$

Ici S_{abs} et S_{ret} sont des **EWMA** (moyennes mobiles exponentielles) respectivement de $|\mathrm{d}L|$ et $\mathrm{d}L$, qui rendent K plus **fort** quand le marché s'anime et plus **faible** quand la cohérence est déjà élevée (terme $-c_p r^2$, qui raccourcit les plateaux). Les pulses $M(t)$ représentent des **nouvelles** ou de la **couverture médiatique**.

voilà exactement comment j'ai "câblé" le **biais** (Psi biais) sur la **dynamique de Kuramoto** dans nos simus.

1) Je pars du collectif (Kuramoto) pour obtenir (r, ψ)

À chaque pas, je fais évoluer les phases θ_i avec Kuramoto–Sakaguchi (fréquences propres ω_i, couplage $K(t)$, éventuel déphasage α). J'en déduis l'**ordre collectif**

$$z(t) = \frac{1}{N}\sum_i e^{i\theta_i(t)} = r(t)\, e^{i\psi(t)},$$

où $r(t) \in [0,1]$ mesure la **cohérence** du groupe et $\psi(t)$ est la **phase moyenne** (le "cap" de la foule).

2) Je calcule un flux "comportemental" $Q(t)$ à partir de (r, ψ)

Plutôt que d'imposer un biais, je laisse le collectif parler :

$$Q(t) \;\propto\; N\, q_0\, r(t)\, \sin\big(\psi(t)\big).$$

Autrement dit, **pas de biais dans la formule** : le **signe** de Q vient directement de la phase moyenne ψ (décision d'achat/vente) pondérée par la cohérence r (intensité de l'alignement).

3) Je fais du biais un reflet (diagnostic) du collectif

Le **biais** n'est pas une entrée : c'est une **lecture** de ce que fait la foule. Pour éviter un clignotement bruité, je lisse le flux avec une **EWMA** :

$$\widetilde{Q}(t) = \mathrm{EWMA}(Q), \qquad \phi_{\mathrm{bias}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \widetilde{Q}(t) \geq 0, \\ \pi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, **le biais flippe** quand la dynamique Kuramoto fait passer le **flux agrégé** d'acheteur à vendeur (ou l'inverse). Dans certains runs antérieurs (pas le dernier), j'ai optionnellement fait **suivre le drift μ(t))** au signe de Q

EWMA = **Exponentially Weighted Moving Average** (moyenne mobile **exponentiellement pondérée**).

Idée en une phrase

On fait une moyenne des observations passées en donnant **beaucoup de poids au récent** et **de moins en moins** au fur et à mesure qu'on remonte dans le temps (poids qui décroissent **géométriquement**).

Formule (forme récursive la plus utilisée)

Pour une série x_t (ex. retours, $|dP|$, volumes), le lissage S_t est :

$$S_t = (1-\lambda)\, x_t + \lambda\, S_{t-1}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

- $(1-\lambda)$ est le **poids instantané** du nouveau point.
- λ est le **taux d'oubli** : plus λ est proche de 1, plus on **oublie lentement** (courbe plus lisse, plus "longue mémoire").

10

Paramètres

Pour simplifier , on prend mu = 0

Les paramètres de ma simulation sont les suivants

> Voici les **paramètres utilisés** pour la dernière simu (horizon doublé), en reprenant exactement le réglage "bruits augmentés, $K_c = 3$, $\mu = 0$" :
>
> **Horizon et discrétisation**
>
> - $T = 6000$ pas, $dt = 0{,}05 \Rightarrow$ durée $= 300$.
>
> **Population Kuramoto**
>
> - $N = 700$, $\alpha = 0$, $\Delta = 1{,}5 \Rightarrow K_c = 2\Delta/\cos\alpha = 3$.
> - $\omega_0 = +0{,}03$.
> - $\omega_i \sim \omega_0 + \Delta\,\mathrm{Cauchy}(0,1)$, tronquée à $\pm 3\Delta$.
> - Phases initiales : $\theta_i(0) \sim \mathcal{N}(-\pi/2,\ 0{,}15)$ (mod 2π).

Text

> **Bruits (augmentés)**
>
> - Bruit de phase $\sigma_\theta = 0{,}08$.
> - Bruit log-retour $\sigma_L = 0{,}03$.
> - Bruit sur $K(t)$ $\sigma_K = 0{,}05$.
>
> **Prix / flux**
>
> - Flux : $Q(t) = N\, q_0\, r(t) \sin\psi(t)$ avec $q_0 = 3{,}0$.
> - Impact prix : $\eta = 1{,}0 \times 10^{-4}$.
> - Drift : $\mu(t) = \mu_{\text{const}} = 0$.
> - $S(0) = 100$.
>
> **Dynamique du couplage $K(t)$ (endogène)**
>
> - $dK/dt = a_0 - bK + a_1\,\mathrm{EWMA}(|dL|) + a_2\,\mathrm{EWMA}(dL) - c_{\text{plat}}\, r^2 + \sigma_K\, \xi$.
> - $a_0 = 0{,}00,\ b = 0{,}90,\ a_1 = 40{,}0,\ a_2 = 24{,}0,\ c_{\text{plat}} = 1{,}2,\ K_{\max} = 10$.
> - $K(0) = 3{,}20$ (légèrement au-dessus d[illegible]euil).

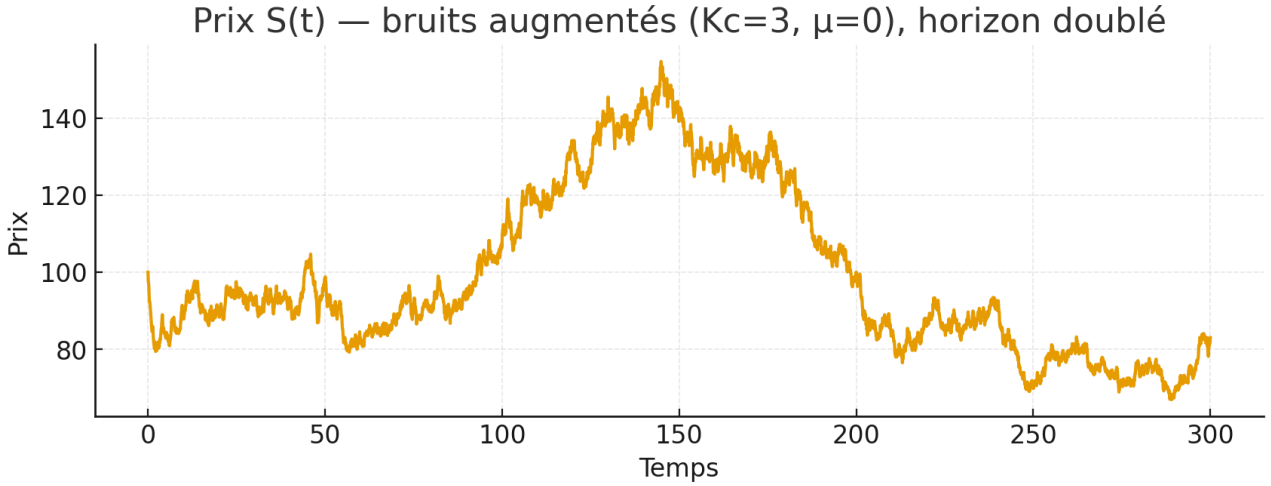
Text

Lissages (EWMA)

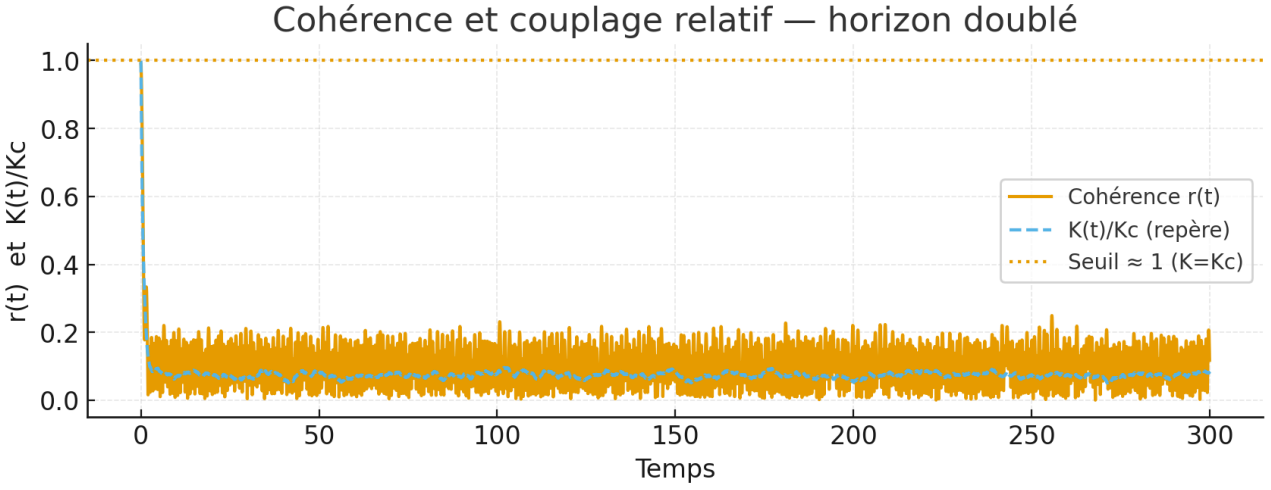
- $\lambda = 0{,}970$ pour les retours (S_{abs}, S_{ret}), init $= 0$.
- Pour le **biais (diagnostic)** basé sur l'EWMA du flux : $\lambda_Q = 0{,}985$; $\phi_{\text{bias}}(t) = 0$ si $\text{EWMA}(Q) \geq 0$, sinon π.

Résultats

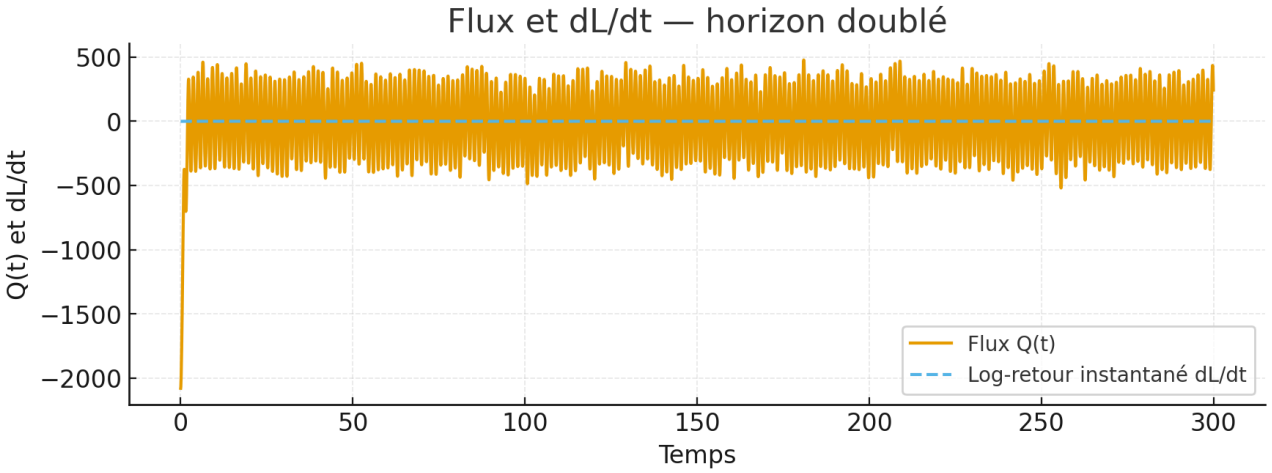
La courbe de prix



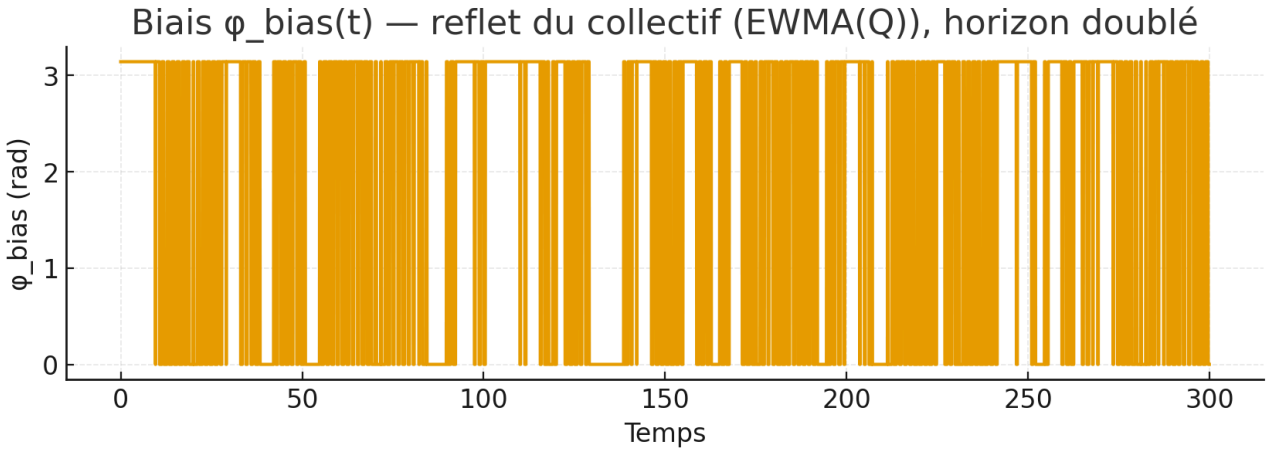
Cohérence et couplage relatif



Flux et dérivée du prix



Biais de passage de achat à vente



Voici comment lire, pas à pas, les **quatre courbes** du « cycle » que nous avons simulé — en restant très concret sur le rôle de chaque variable et sur la mécanique qui crée, sans forçage externe, une montée, un pic, puis une décrue.

1) Ce que montre chaque panneau

La première courbe est le **prix** : on y voit la phase de hausse, l'atteinte d'un **sommet**, puis la **retombée**. La deuxième superpose la **cohérence** du collectif r(t) et le **rapport K(t)/Kc** : dès que ce rapport dépasse 1, les agents s'alignent et rrr grimpe. La troisième trace le **flux agrégé** Q(t) (ce que « décide » la foule à l'instant) et le **log-retour instantané** dL/dt ils sont les véritables déclencheurs des retournements. La quatrième est le **biais** (notre diagnostic du sens de marché), qui **flippe** quand l'EWMA de Q change de signe ; il marque proprement le passage « phase haussière → phase baissière » et inversement.

2) Le film d'un cycle (ce qui se passe « sous le capot »)

Au **démarrage**, le système est encore désordonné ou juste au-dessus du seuil de synchronisation. Le couplage K(t)K(t)K(t) se renforce progressivement (il réagit aux retours

récents via un lissage), ce qui permet à la cohérence r(t)r(t)r(t) de **monter** : de plus en plus d'agents « regardent dans la même direction ». Cette mise en phase rend le **flux Q** franchement **positif**, et le prix **prend de la pente**. C'est la **boucle auto-renforçante** : un peu d'alignement → plus de flux → de meilleurs retours → un K encore plus haut → davantage d'alignement.

Arrive ensuite l'**accélération** : K(t)/Kc passe au-dessus de 1, r(t) atteint des niveaux élevés, les ordres s'additionnent, le **flux crête** et le prix accélère encore. Tout semble robuste… mais c'est précisément là que le **sommet** se prépare : d'un côté, nos « freins internes » (relaxation de K, pénalisation des plateaux) commencent à ronger la cohérence ; de l'autre, la **phase moyenne** de la foule glisse naturellement et fait **baisser** la composante directionnelle du flux. Résultat : Q(t **traverse zéro**.

Le **pic** se produit lorsque Q change de signe alors que rrr et K sont encore **haut** : c'est le moment où « tout le monde est aligné, mais plus dans le bon sens ». Le **prix** s'essouffle, puis **tourne**. Comme le biais est une **moyenne lissée** du flux, il **retarde légèrement** le virage : on voit souvent une courte zone de plateau avant le flip net du biais, qui **acte** le changement de régime.

Vient alors la **décrue** : Q devient **négatif**, les retours récents tirent K(t)vers le bas, la cohérence r(t **se défait** ; le système **dissipe** ce qu'il avait accumulé. Le prix redescend d'autant plus vite que K et rrr restent un moment intermédiaires (on a encore des décisions collectives, mais inversées). Puis tout **se calme** : Q oscille autour de zéro, rrr retombe, et l'on **repart** pour un cycle quand l'alignement se reconstruit.

3) Pourquoi ce cycle naît sans qu'on « pousse » de l'extérieur

Rien n'est imposé de l'extérieur : **pas d'onde de biais**, pas de pulsation exogène. Le cycle vient de la **rencontre entre un seuil de synchronisation** (dès que K/Kc>1, r se met à grimper), d'un **apprentissage à mémoire courte** (les lissages qui ajustent K et le biais au vu des retours et du flux), et d'un **frein anti-plateau** (dès que la cohérence reste haute trop longtemps, on la pénalise pour éviter l'emballement). Cette combinaison suffit à générer des **phases d'alignement**, suivies d'un **tipping point** quand la géométrie du collectif fait passer le flux par zéro, puis une **phase de dé-synchronisation** qui referme la boucle.

4) Comment lire (et utiliser) les quatre courbes

- Le **prix** vous donne la version « observable » du cycle.
- Le duo **r & K/KcK** vous dit **quand** la foule s'aligne et **pourquoi** la pente du prix change : au-dessus de 1, attendez-vous à des mouvements plus coordonnés (donc plus amples) ; au-dessous, la foule se disperse.
- Le couple **Q & dL/dt précède** souvent le signal visible sur le prix : le **passage de Q par 0** est l'**avertisseur** du sommet ou du creux.
- Le **biais valide** les bascules de régime ; son lissage rend le signal plus **propre** et exploitable (moins de faux positifs quand rrr est faible).

5) Si vous voulez « sculpter » la forme du cycle

Sans rien injecter d'exogène, vous pouvez rendre les cycles **plus tranchés** en relevant légèrement le plafond de K ou en réduisant le bruit de phase (la cohérence monte plus haut). À l'inverse, des cycles **plus doux** s'obtiennent en rapprochant le système du sous-seuil $K/Kc \lesssim 1$, ou en allongeant les constantes de temps des lissages (le biais et K réagissent plus lentement).

En bref : les quatre courbes racontent la même histoire sous quatre angles. Le **prix** montre la surface, **r** et **K/Kc** révèlent le **niveau d'alignement**, **Q** et **dL/dt** montrent **où naissent** les retournements, et le **biais** en donne un marqueur **propre et exploitable**. C'est le trio *seuil → feedback → schéma de mémoire* qui crée le cycle — pas un scénario imposé.

Artefacts numériques

Ce que vous observez quand vous augmentez Kc — des oscillations qui "se fabriquent" toutes seules, des divergences ou des périodicités qui n'ont pas de sens physique — n'est pas une propriété du modèle, mais bien un **artefact numérique**. C'est le schéma de discrétisation (et son pas de temps) qui injecte sa propre dynamique dans un système non linéaire devenu **raide**.

Quand le couplage devient fort ou que la dispersion de fréquences est grande, la dynamique des phases comporte deux échelles de temps : des mouvements lents (moyenne, mémoires lissées, prix) et des mouvements **très rapides** autour des points d'attraction en phase. Un schéma explicite classique (Euler, RK2, même RK4) ne "voit" correctement que des systèmes dont la fréquence la plus rapide est bien plus petite que $1/\Delta t$. Sinon, il **sur-amplifie** des modes rapides, crée des **cycles limites numériques** et peut même violer des bornes (par exemple, faire sauter rrr ou faire "sautiller" artificiellement ψ\psiψ à cause de l'aliasing). Autrement dit : en augmentant Kc vous poussez le Jacobien du flot vers des valeurs propres plus grandes, et vous **sortez de la région de stabilité** du schéma explicite. Ce n'est pas la physique qui oscille : c'est l'intégrateur.

La parade consiste à utiliser des **discrétisations robustes** — des schémas qui restent stables quand les modes rapides dominent — et à soigner quelques points subtils propres aux modèles de phase.

D'abord, la **raideur**. Avec un couplage important, les termes ~K rsin(·)\ imposent des retours à l'équilibre très vifs. Un schéma **A-stable** (par exemple, Euler implicite ou le point-milieu implicite) amortit ces modes au lieu de les exciter. Concrètement, au lieu de prédire la phase suivante en "regardant" le champ au temps tn on la calcule en imposant la cohérence au temps tn+1tn+1 et en résolvant une petite équation fixe (par itération de point fixe ou Newton, généralement très rapide car scalaire par oscillateur). On peut aussi adopter une stratégie **IMEX** (implicit–explicit) : traiter **implicitement** le terme raide (le

couplage) et **explicitement** le reste (fréquences propres, petits correctifs, bruit), ce qui combine robustesse et coût raisonnable.

Ensuite, la **géométrie**. Beaucoup d'artefacts viennent du maniement de l'angle moyen ψ et des réductions modulo 2π. À chaque passage de π à −π-, une arctangente mal gérée provoque un "saut" de phase qui, injecté dans un sinus, fabrique des retournements numériques. La manière robuste d'écrire le couplage est de **travailler en complexe** : on calcule z=1N∑eiθzpuis le terme de couplage comme l'**imaginaire** de z e−i(θ+α)z On n'extrait **jamais** ψ\ par atan2\ pour le remettre ensuite dans un sinus ; on opère directement sur z. Ce simple choix élimine quantité de périodicités "fantômes".

Il faut aussi **respecter les contraintes** structurelles. Les mémoires de type EWMA n'ont pas besoin d'être "intégrées" numériquement : elles ont une **mise à jour exacte** au pas Δt (une formule fermée), ce qui supprime toute dérive. De même, si l'on a une équation linéaire simple pour K avec un terme de relaxation −bK, on peut utiliser un **intégrateur à facteur intégrant** : la partie linéaire est intégrée exactement et les non-linéarités (comme −c r2- sont ajoutées proprement. On garde K dans ses bornes physiques par projection douce (positivité, plafond) pour éviter des rebonds numériques.

Un autre point clé est l'**adaptation du pas de temps**. Dans les phases très synchrones, le produit K r grandit et le système accélère. Garder un Δt fixe trop grand, c'est demander à l'intégrateur explicite de franchir une "marche" trop haute : il trébuche et invente une oscillation. Un contrôleur d'erreur (pas adaptatif) ou, au minimum, une **condition de type CFL** empirique (Δt≲c/(∣ω∣+K r)\ suffit souvent à neutraliser ces oscillations parasites. Même avec un schéma implicite, l'adaptation du pas améliore fortement la fidélité des transitoires.

Si du **bruit** est présent (modèle stochastique), il faut l'interpréter correctement (Itô vs Stratonovich) et employer un schéma SDE approprié (Euler–Maruyama pour commencer, Milstein si le bruit est multiplicatif), en vérifiant la **convergence forte/faible**. Là aussi, des pas trop grands donnent des trajectoires "tigrées" qui ne reflètent pas la diffusion réelle.

Enfin, il y a les **tests de convergence**. Avant d'attribuer une périodicité au modèle, on refait la simulation **en divisant le pas par deux** et on compare des observables robustes : enveloppe de r(t) moments de Q(t), distribution des durées de phases synchrones. Si ces quantités changent, ce n'est pas de la physique : c'est le schéma. On peut aussi vérifier que les quantités bornées (par construction) — par exemple ∣z∣≤1|— ne sont **jamais** violées au-delà d'un epsilon dû à l'arrondi.

En pratique, une "chaîne" robuste ressemble à ceci : on calcule z en complexe ; on met à jour les θi avec un **semi-implicite** (implicite dans le terme K r sinK explicite ailleurs) et un **pas adaptatif** ; on met à jour les EWMA avec leurs **formules exactes** ; on intègre K avec un **intégrateur à facteur intégrant** plus projection de positivité ; on reconstruit le prix via le **log** (qui reste positif par construction). Ce pipeline élimine les divergences et les périodicités "numériques" qui apparaissent quand on pousse le système vers des régimes raides.

Le message à retenir est simple : quand on augmente Kc (ou qu'on travaille près des seuils de synchronisation), on change l'**échelle de temps rapide** du problème. Les schémas explicites classiques, même soignés comme RK4, **ne sont pas conçus** pour avaler ces modes sans broncher. Il faut alors passer à des discrétisations **A-stables** (implicites), soigner la **géométrie des angles** et **adapter le pas**. Une fois ces précautions prises, les cycles qu'on observe dans les courbes redeviennent ceux de la **physique du modèle**, et non la signature cachée de la méthode numérique.

Ce que ce cadre permet (et ce qu'il ne promet pas)

Le grand intérêt de cette construction, c'est qu'elle relie **micro-comportements** (opinions, contagion sociale, inattentions et délais) à des **observables de marché** (flux, tendance, volatilité). Elle explique de façon mécanistique **comment** un marché peut entrer en **phase** (euphorie ou panique), et **pourquoi** l'on observe des régimes en **rampe-pic-chute**. C'est un modèle **phénoménologique** : il n'est pas une « machine à trader » clef en main, mais un **laboratoire** pour tester des scénarios, intégrer des **proxies de sentiment** dans M(t)M(t)M(t), rendre KKK **hétérogène** (réseaux non complets KijK_{ij}Kij), ou **calibrer** η\etaη, σ\sigmaσ et les EWMAs sur des séries réelles.

En résumé, Kuramoto fournit la **grammaire** de la synchronisation ; nos équations ajoutent les **effets de prix** et de **narratif** nécessaires pour que cette grammaire parle le langage du marché

Références

voici une bibliographie courte, triée par thèmes, avec une ligne d'explication pour chaque source — utile pour notre modèle "Kuramoto ↔ biais ↔ prix", l'Adler/carte du cercle, l'estimation (EWMA), et la discrétisation numérique robuste.

Fondamentaux de la synchronisation / Kuramoto

- **Acebrón et al., *Rev. Mod. Phys.* (2005)** – Revue de référence du modèle de Kuramoto (seuil KcK_cKc, extensions, résultats analytiques et numériques). Physical Review+1
- **Ott & Antonsen, *Chaos* (2008)** – Réduction en basse dimension (ansatz OA) : donne des ODE fermées pour l'ordre complexe et le seuil Kc=2ΔK_c=2\DeltaKc=2Δ (Lorentz). Idéal pour analyser/accélérer nos simulations. arXiv+2AIP Publishing+2

- **Dörfler & Bullo,** *SIAM Review* **(2014)** – Panorama moderne des réseaux d'oscillateurs (conditions de synchronisation, applications réseaux/power grids). Motion+2ScienceDirect+2
- **Pikovsky, Rosenblum, Kurths (livre, 2001)** – Monographie "Synchronization: A Universal Concept…" (très pédagogique, des bases aux réseaux). Cambridge University Press & Assessment+1

Phase seule, injection locking, équation d'Adler

- **Adler,** *Proc. IRE* **(1946)** – Article fondateur du verrouillage de phase (PLL/injection), base de ψ˙=Δω−Ksinψ\dot\psi=\Delta\omega-K\sin\psiψ˙=Δω−Ksinψ. Semantic Scholar+2SciSpace+2
- **Razavi,** *IEEE JSSC* **(2004)** – Revue/derivation pratique de l'équation d'Adler et "pulling" pour oscillateurs électroniques. SEAS UCLA
- **Bhansali & Roychowdhury (ASPDAC 2009)** – "Generalized Adler" via PPV/averaging : utile si l'on veut dépasser les hypothèses classiques. Jaijeet
- **Brown, Moehlis & Holmes,** *Neural Computation* **(2004)** + **Ermentrout & Terman (2010)** – Réduction de phase/PRC et calculs adjoints (bases rigoureuses pour passer d'oscillateurs complets au modèle de phase). Département de Génie Mécanique+2PubMed+2

Carte du cercle, mode locking et "devil's staircase"

- **Jensen et al.,** *Phys. Rev. Lett.* **(1983)** – "Complete Devil's Staircase" pour la sine circle map (structure de verrouillages et transition vers le chaos). Physical Review+1
- **Notes/cours et survols** – Bons résumés pédagogiques sur nombre de rotation, langues d'Arnold, etc. (ex. Aquillen). Astro Rochester

Extensions (phase-lag, réseaux)

- **Sakaguchi & Kuramoto,** *Prog. Theor. Phys.* **(1986)** – Kuramoto avec déphasage (frustration) ; très utile si l'on veut modéliser des biais structurels. Oxford Academic+1
- **Omel'chenko et al.,** *Phys. Rev. Lett.* **(2012)** – Transitions non universelles dans le modèle de Sakaguchi–Kuramoto (multistabilité, pertes de cohérence). Physical Review

Économophysique & microstructure (pour la partie "marchés")

- **Kirman,** *QJE* **(1993)** – Modèle de grégarité à deux états (basculages collectifs), bon pont conceptuel avec la synchronisation. Frank Baumgartner+1

- **Lux & Marchesi,** *Nature* **(1999)** – Bulles/volatilité endogènes via agents hétérogènes ; phénomènes “critiques”. Finance Martin Sewell+1
- **Bouchaud, Farmer & Lillo (2008/2009)** – Revue sur l’impact, la mémoire longue du flux d’ordres et la digestion lente de l’offre/demande (cadre quantitatif). arXiv+1
- **Kyle,** *Econometrica* **(1985)** – Modèle canonique d’impact (profondeur/résilience), utile pour relier le couplage “opinion→prix”. Duke People+1

Estimation & filtrage (EWMA) pour tendances/biais

- **J.P. Morgan/Reuters,** *RiskMetrics Technical Document* **(1996)** – Popularise l’EWMA pour volatilité/corrélations (paramètre λ\lambdaλ, mise en œuvre pratique). Department of Physics+1
- **Roberts (1959) / Lucas & Saccucci (1990)** – Origines et propriétés des chartes EWMA (détection de petits shifts). Département des Sciences Mathématiques+1

Discrétisation numérique robuste (stiff/IMEX/SDE)

- **Hairer & Wanner,** *Solving ODE II* **(Springer)** – Référence “stiff/DAE” (A-stabilité, BDF, pièges de stabilité). Parfait pour remplacer un RK explicite instable. SpringerLink+1
- **Ascher & Petzold (1998)** + **Ascher–Ruuth–Spiteri,** *IMEX* **(1997)** – IMEX Runge–Kutta : traiter séparément les parties raides/non-raides ; très adapté à nos équations bruitées/couplées. SIAM E-books+2ScienceDirect+2
- **Kloeden & Platen (1992/2013)** – SDE (Euler–Maruyama, Milstein) : indispensable si l’on garde du bruit endogène. SpringerLink