Des équations de Navier-Stokes à l'équation d'amplitude réduite

Table des matières

Résumé....3

1. Des équations de Navier-Stokes à une dynamique de perturbation....4

2. Analyse linéaire, seuil d'instabilité et mode critique....5

3. Réduction modale et équation d'amplitude....6

Dérivation réduite : saturation cubique, réduction stochastique et équation de Langevin....7

4. Saturation cubique : comment le terme $-gA^3$ émerge réellement 7

4.1 Décomposition en mode critique et modes esclaves 7

4.2 Développement perturbatif de w 8

4.3 Rétroaction cubique sur A 8

4.4 Lecture physique du terme $-gA^3$ 9

5. Élimination des modes rapides : pourquoi apparaît un bruit effectif 9

5.1 Système lent-rapide 9

5.2 Principe d'homogénéisation 9

5.3 Interprétation physique 10

6. Apparition d'une équation de Langevin pour l'amplitude 10

6.1 Forme générale 10

6.2 Densité de probabilité associée 10

6.3 Franchissement de barrière 10

6.4 Limite de cette première forme 11

Turbulence intermittente et émergence d'un bruit d'intensité fluctuante.... 11

De Landau-Ginzburg à la turbulence intermittente Vers une équation universelle des systèmes complexes....13

Résumé

Ce chapitre cherche à montrer comment une équation réduite à une seule variable peut émerger des équations de Navier-Stokes, pourtant infiniment riches. Le point de départ est la dynamique d'un fluide incompressible, décrite par le champ de vitesse complet. L'idée centrale est qu'au voisinage d'une transition ou d'un changement de régime, une grande partie de la dynamique peut être portée par un petit nombre de structures dominantes. On introduit alors un état de base, puis une perturbation, afin de séparer la dynamique linéaire, les effets de cisaillement et la non-linéarité propre des perturbations.

L'analyse linéaire du système permet ensuite d'identifier un mode critique, c'est-à-dire une structure privilégiée qui devient lente et dominante près d'un seuil d'instabilité. Ce mode joue le rôle de variable d'ordre. En projetant la dynamique sur ce mode et sur son adjoint, on obtient une équation d'amplitude. Le terme linéaire traduit l'amplification ou l'amortissement du mode, tandis que la saturation cubique apparaît par l'intermédiaire des modes esclaves, excités par la non-linéarité quadratique puis rétroagissant sur le mode principal. C'est ainsi qu'émerge une équation réduite de type Landau :

$$\dot{x} = \mu x - g x^3$$

Cette équation correspond à un mouvement dans un potentiel quartique, possédant un ou deux minima selon le signe de μ. Elle donne donc une première lecture physique claire : la dynamique macroscopique du système peut être vue comme l'évolution d'une variable lente dans un paysage de stabilité. Cependant, cette forme déterministe ne suffit pas à représenter la richesse des systèmes réels. En éliminant les nombreux degrés de liberté rapides, leur effet cumulé apparaît sous la forme d'un bruit effectif. Le système réduit devient alors une équation de Langevin, où la variable d'ordre évolue dans un potentiel quartique sous l'effet d'une agitation aléatoire.

Le texte va plus loin en montrant que, dans un milieu turbulent réel, ce bruit ne peut pas être supposé constant. La théorie raffinée de Kolmogorov enseigne que la dissipation n'est pas homogène, mais intermittente et concentrée dans des structures locales intenses. Cela conduit à introduire une intensité de bruit fluctuante σ(t), reliée à une dissipation locale coarse-grained. Le modèle devient alors

$$dx = \left(\mu x - g x^3\right)dt + \sigma(t) dW_1 + s dW_2$$

où s dW_2 représente un bruit de fond homogène, tandis que σ(t) dW_1 traduit le forçage turbulent intermittent.

La mémoire longue de σ(t) s'explique ensuite par la cascade multiplicative de la turbulence. L'énergie se transmet entre échelles, et le logarithme de l'intensité du bruit peut être représenté comme une somme ou une convolution à mémoire longue. On introduit alors une variable lente

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

qui porte cette hiérarchie temporelle. Cette construction rapproche directement le modèle réduit des phénomènes observés dans les marchés financiers : intermittence, clustering de volatilité, événements extrêmes et organisation multi-échelle.

La conclusion générale du chapitre est forte. À partir d'un problème concret, celui de la réduction de Navier-Stokes, on aboutit à une forme canonique qui relie théorie des bifurcations, physique des transitions de phase, turbulence intermittente et modélisation des systèmes complexes. Le modèle final décrit un mode collectif évoluant dans un paysage non linéaire et plongé dans un bain turbulent multi-échelle. Cette structure est proposée comme une équation universelle possible pour de nombreux systèmes complexes naturels, technologiques ou sociaux, dès lors qu'ils possèdent un mode dominant, une saturation non linéaire et un environnement fluctuant hiérarchique.

1. Des équations de Navier-Stokes à une dynamique de perturbation

Le point de départ naturel est l'équation de Navier-Stokes incompressible, qui décrit l'évolution d'un champ de vitesse u(r,t) dans un fluide newtonien de densité constante ρ. Ici, ν désigne la viscosité cinématique, p la pression et f un forçage externe éventuel. Ces équations sont complètes, mais elles décrivent un objet de dimension infinie : le champ de vitesse en tout point de l'espace. Votre modèle, lui, repose sur une seule variable x(t). Le problème consiste donc à comprendre comment une telle variable réduite peut émerger d'un système aussi riche.

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -(1/\rho)\nabla p + \nu \Delta u + f$$

L'idée centrale est qu'un écoulement complexe ne vit pas toujours de manière uniforme dans tout son espace de phases. Très souvent, surtout près d'une transition ou d'un changement de régime, une partie importante de la dynamique est portée par un petit nombre de structures dominantes. Cela peut être un mode cohérent, une amplitude d'onde, une intensité globale d'activité, ou plus généralement ce que la physique appelle une variable d'ordre. La réduction cherchée consiste précisément à isoler cette composante dominante.

Pour cela, on commence par introduire un état de base ou état de référence $U_0(r)$, supposé solution stationnaire ou lentement variable de Navier-Stokes. On décompose alors le champ total en une partie de base et une perturbation.

$$u(r,t) = U_0(r) + u'(r,t)$$

$$p(r,t) = P_0(r) + p'(r,t)$$

Comme U_0 est supposé satisfaire l'équation stationnaire, on peut soustraire cette relation à l'équation complète pour obtenir l'équation d'évolution de la perturbation u′.

$$\left(U_0 \cdot \nabla\right)U_0 = -(1/\rho)\nabla P_0 + \nu \Delta U_0 + f$$

Il faut alors développer soigneusement le terme non linéaire.

$$(u \cdot \nabla)u = \left(U_0 + u'\right) \cdot \nabla\left(U_0 + u'\right)$$

En développant, on obtient la décomposition complète du terme convectif. Après soustraction de l'équation vérifiée par U_0, il reste l'équation dynamique de la perturbation. La contrainte d'incompressibilité devient $\nabla \cdot u' = 0$.

$$(u \cdot \nabla)u = \left(U_0 \cdot \nabla\right)U_0 + \left(U_0 \cdot \nabla\right)u' + (u' \cdot \nabla)U_0 + (u' \cdot \nabla)u'$$

$$\partial_t u' + \left(U_0 \cdot \nabla\right)u' + (u' \cdot \nabla)U_0 + (u' \cdot \nabla)u' = -(1/\rho)\nabla p' + \nu\Delta u'$$

$$\partial_t u' = Lu' + N(u', u')$$

$$Lu' = -\left(U_0 \cdot \nabla\right)u' - (u' \cdot \nabla)U_0 - (1/\rho)\nabla p' + \nu\Delta u'$$

$$N(u', u') = -(u' \cdot \nabla)u'$$

Cette écriture est essentielle parce qu'elle sépare déjà trois niveaux de physique. Le premier niveau est la propagation ou l'advection linéaire de la perturbation par l'état de base, donnée par $(U_0 \cdot \nabla)u'$. Le deuxième niveau est la sensibilité de la perturbation au cisaillement ou à la structure de U_0, donnée par $(u' \cdot \nabla)U_0$. Le troisième niveau est la non-linéarité propre des perturbations, représentée par $(u' \cdot \nabla)u'$. C'est cette dernière qui, plus tard, produira la saturation cubique dans l'équation réduite.

Pour clarifier encore la structure, on regroupe les termes linéaires dans un opérateur L, et le terme quadratique dans un opérateur bilinéaire N. À ce stade, rien n'a encore été simplifié sur le plan physique. On a seulement reformulé Navier-Stokes de façon à pouvoir distinguer la partie qui tend à amplifier ou amortir les perturbations, et la partie qui couple ces perturbations entre elles.

2. Analyse linéaire, seuil d'instabilité et mode critique

L'étape suivante consiste à comprendre ce que fait l'opérateur linéaire L. Le raisonnement est classique : avant même d'aborder toute la turbulence, on cherche à savoir si certaines perturbations ont tendance à croître, à décroître, ou à rester presque neutres.

$$\partial_t u' = Lu'$$

On commence donc par négliger provisoirement le terme non linéaire N(u′,u′), ce qui donne le problème linéaire. On cherche alors des solutions séparées sous la forme u′(r,t)=a(t)ϕ(r), ou plus classiquement u′(r,t)=e^{λt}ϕ(r), ce qui conduit au problème spectral Lϕ=λϕ.

$$u'(r, t) = a(t)\phi(r)$$

$$u'(r, t) = e^{\lambda t}\phi(r)$$

$$L\phi = \lambda\phi$$

Les valeurs propres λ déterminent le comportement du mode ϕ. Si Re(λ) < 0, le mode décroît. Si Re(λ) > 0, il croît. Si Re(λ) ≈ 0, il est marginal, donc potentiellement dominant sur des temps longs.

En général, l'état de base dépend d'un paramètre de contrôle R, qui peut être un nombre de Reynolds, un cisaillement imposé, une intensité de forçage, une différence de température, ou dans un contexte astrophysique une intensité de rotation ou de champ magnétique. Les valeurs propres dépendent alors de ce paramètre. On suppose qu'il existe une valeur critique R_c telle qu'une valeur propre traverse l'axe imaginaire. Au voisinage de ce seuil, un mode devient lent. C'est lui qui va dominer la dynamique à grande échelle.

$$\lambda = \lambda(R)$$

$$\mu = \alpha\left(R - R_c\right)$$

Dans le cas le plus simple, on a un mode réel dont la partie réelle traverse zéro : λ(R) ≈ μ, avec μ = α(R − R_c), où α est un coefficient non nul. Si R < R_c, alors μ < 0 et le mode est amorti. Si R > R_c, alors μ > 0 et le mode devient instable.

C'est là qu'apparaît la première brique de votre modèle : le terme linéaire μx. Il représente simplement l'amplification ou l'amortissement d'un mode dominant proche d'un seuil.

Il est très important de bien voir ce qui se passe physiquement. Au voisinage du seuil, presque tous les modes continuent d'être rapidement amortis, sauf un ou quelques-uns, qui deviennent lents. Cela signifie que la dynamique globale se replie spontanément sur une petite sous-variété de l'espace des états. Ce principe justifie l'existence d'une variable réduite.

$$L^{\dagger}\phi^{\dagger} = \bar{\lambda}\phi^{\dagger}$$

$$\langle \phi^{\dagger}, \phi \rangle = 1$$

Pour préparer la projection future, il faut aussi introduire le mode adjoint. L'opérateur L n'est en général pas auto-adjoint, surtout dans les problèmes hydrodynamiques avec advection et cisaillement. On définit donc un mode adjoint ϕ† vérifiant L†ϕ† = λ̄ϕ†, où L† est l'adjoint de L pour le produit scalaire choisi, et λ̄ est le conjugué complexe de λ. On normalise souvent les modes de sorte que ⟨ϕ†,ϕ⟩ = 1. Cette normalisation sera précieuse pour extraire proprement l'amplitude du mode critique.

Il y a ici une idée physique très forte. Le mode critique ϕ n'est pas n'importe quelle fluctuation. C'est la forme spatiale privilégiée par le système lorsqu'il devient instable. Il représente la structure la plus apte à concentrer la dynamique naissante. Dans une convection, ce serait une cellule ; dans un plasma, une onde ou une structure cohérente ; dans un écoulement cisaillé, un tourbillon dominant ; dans votre cadre généralisé, cela pourra devenir la variable d'ordre x(t).

3. Réduction modale et équation d'amplitude

Nous arrivons maintenant à l'étape centrale : passer d'un champ u′(r,t) à une amplitude scalaire A(t). L'idée de base est que, près du seuil, la perturbation peut être approchée par la contribution dominante du mode critique, plus un reste plus rapidement amorti.

$$u'(r,t) = A(t)\phi(r) + w(r,t)$$

Si l'on veut extraire A(t), la manière naturelle consiste à projeter sur le mode adjoint : A(t) = ⟨ϕ†,u′(·,t)⟩. C'est ici que la présence du mode adjoint est essentielle : dans un problème non auto-adjoint, la projection orthogonale naïve sur ϕ n'est pas la bonne. Le mode adjoint fournit la coordonnée dynamique correcte.

$$A(t) = \langle \phi^{\dagger}, u'(\cdot, t) \rangle$$

Partons alors de l'équation complète des perturbations et projetons-la sur ϕ†. Le premier terme à gauche devient simplement Ȧ, tandis que le terme linéaire se simplifie près du seuil grâce à la relation spectrale. On obtient ainsi une forme générale de l'équation d'amplitude.

$$\langle \phi^{\dagger}, \partial_t u' \rangle = \langle \phi^{\dagger}, Lu' \rangle + \langle \phi^{\dagger}, N(u', u') \rangle$$

$$\langle \phi^{\dagger}, Lu' \rangle \approx \lambda A$$

$$A^{\cdot} = \lambda A + \langle \phi^{\dagger}, N(u', u') \rangle$$

À ce stade, l'équation n'est pas fermée parce que u′ contient encore w. Il faut donc développer plus loin. Si l'on remplace formellement u′ ≈ Aϕ, le terme non linéaire donne N(u′,u′) ≈ A²N(ϕ,ϕ), et donc une première correction quadratique dans l'équation d'amplitude.

$$N(u', u') \approx A^2 N(\phi, \phi)$$

$$A^{\cdot} = \lambda A + c_2 A^2 + \cdots$$

$$c_2 = \langle \phi^{\dagger}, N(\phi, \phi) \rangle$$

Cependant, dans de nombreux problèmes présentant une symétrie A ↦ −A, ou lorsque la structure de la bifurcation est de type Landau supercritique, le terme quadratique effectif disparaît dans l'équation normale. La première saturation non triviale apparaît alors à l'ordre cubique.

Pour le voir proprement, il faut en fait tenir compte du fait que la non-linéarité quadratique génère des composantes dans les modes esclaves w, qui rétroagissent ensuite sur A. C'est ce mécanisme de retour qui produit le terme cubique effectif. On suppose que w est petite et esclave de A, avec un développement du type $w = A^2 w_2 + A^3 w_3 + \cdots$. En remplaçant dans l'équation complète et en identifiant les ordres, on trouve que le terme quadratique alimente principalement les modes stables w_2, puis que l'interaction entre Aϕ et w_2 redonne un terme d'ordre A^3 dans l'équation projetée pour A.

$$w = A^2 w_2 + A^3 w_3 + \cdots$$

$$A^{\cdot} = \mu A - g A^3 + O\left(A^5\right)$$

Le résultat normal-forme est alors $\dot{A} = \mu A - g A^3 + O(A^5)$, où μ = Re(λ) mesure la distance au seuil, et g est un coefficient de saturation qui dépend des couplages non linéaires projetés. Dans le cas supercritique stable, on a g > 0.

Nous retrouvons exactement la structure déterministe qui vous intéresse. Cette équation a une lecture immédiate. Le terme μA tend à amplifier le mode lorsque μ > 0. Le terme −gA³ empêche cette croissance indéfinie et stabilise une amplitude finie. Le système ne diverge pas : il s'auto-limite.

$$A^{\cdot} = - dV/dA$$

$$V(A) = - (\mu/2)A^{2} + (g/4)A^{4}$$

$$A_{\pm} = \pm \sqrt{(\mu/g)}$$

$$x(t) \equiv A(t)$$

On peut aussi la réécrire sous forme de gradient dans un potentiel. On voit alors apparaître le potentiel quartique. Si μ < 0, A = 0 est l'unique état stable. Si μ > 0, le point A = 0 devient instable et deux minima apparaissent : A_± = ±√(μ/g). C'est l'origine mathématique précise du paysage à deux régimes. Votre variable réduite x(t) pourra être identifiée à cette amplitude A(t), donc x(t) ≡ A(t).

$$x^{\cdot} = \mu x - g x^{3}$$

À ce stade, nous avons déduit à partir de Navier-Stokes, par linéarisation puis projection sur le mode critique, une équation déterministe de type Landau : ẋ = μx − gx³. C'est déjà une étape majeure : le cœur du potentiel quartique est en place.

Note

Les équations sont placées sur des lignes distinctes et centrées pour une compatibilité maximale avec Word. Elles restent faciles à convertir en objets d'équation Word si vous souhaitez ensuite les retravailler dans l'éditeur mathématique.

Dérivation réduite : saturation cubique, réduction stochastique et équation de Langevin

4. Saturation cubique : comment le terme −gA³ émerge réellement

Dans la section précédente, nous avons obtenu l'équation projetée

$$A^{\cdot} = \lambda A + \langle \phi^{\dagger}, N(u', u') \rangle$$

où, pour alléger l'écriture, on note u′ le champ de perturbation et φ, φ† le mode critique et son adjoint. Le point délicat est que, même si la non-linéarité de Navier-Stokes est quadratique, l'équation d'amplitude effective devient très souvent cubique. Il faut donc comprendre le mécanisme de ce passage.

4.1 Décomposition en mode critique et modes esclaves

On écrit plus précisément

$$u' = A(t)\phi + w$$

où A(t)φ appartient à la direction lente critique, et w appartient au sous-espace stable complémentaire. Par construction, on impose

$$\langle \phi^{\dagger}, w \rangle = 0$$

La dynamique complète se projette alors sur deux équations couplées :

$$A^{\cdot} = \lambda A + \langle \phi^{\dagger}, N(A\phi + w, A\phi + w) \rangle$$

et

$$\partial_t w = L_s w + QN(A\phi + w, A\phi + w)$$

où L□ est la restriction de l'opérateur linéaire au sous-espace stable, et Q le projecteur sur ce sous-espace. L'idée physique est simple : le mode critique porte la dynamique lente, tandis que les autres modes sont plus rapidement amortis. Ils ne sont pas nuls, mais ils s'ajustent rapidement à l'amplitude A. On dit qu'ils sont esclaves du mode critique.

4.2 Développement perturbatif de w

Comme w est petit près du seuil, on cherche un développement en puissances de A :

$$w = A^2 w_2 + A^3 w_3 + O\left(A^4\right)$$

Pourquoi l'ordre A² apparaît-il en premier ? Parce que le terme non linéaire N(Aφ, Aφ) est quadratique et produit donc une contribution proportionnelle à A².

En négligeant les dérivées lentes de w à l'ordre dominant, l'équation de w donne au premier ordre non trivial :

$$L_s w_2 = - QN(\phi, \phi)$$

Si L□ est inversible sur le sous-espace stable, on obtient

$$w_2 = - L_s^{-1} QN(\phi, \phi)$$

Cette relation est très importante. Elle dit que la non-linéarité quadratique génère d'abord des modes secondaires w_2, qui ne sont pas critiques mais qui rétroagissent ensuite sur le mode principal.

4.3 Rétroaction cubique sur A

Revenons maintenant à l'équation de A. En remplaçant u′ = Aφ + A²w_2 + ⋯, on développe :

$$N(u', u') = N(A\phi, A\phi) + 2N\left(A\phi, A^2 w_2\right) + \cdots$$

donc

$$N(u', u') = A^2 N(\phi, \phi) + 2A^3 N\left(\phi, w_2\right) + \cdots$$

En projetant sur φ†, le terme quadratique projeté peut être nul pour des raisons de symétrie ou de structure normale de la bifurcation. Même lorsqu'il n'est pas directement nul, on peut souvent se ramener par changement de variable normal-forme à une équation dont le premier terme saturant pertinent est cubique. On obtient alors :

$$A^{\cdot} = \mu A - gA^3 + O\left(A^5\right)$$

avec

$$g = -2\langle \phi^{\dagger}, N\left(\phi, w_2\right)\rangle + éventuelstermescorrectifsd'ordre3$$

Le coefficient g dépend donc explicitement de la non-linéarité quadratique de Navier-Stokes, de la structure du mode critique φ, de la manière dont les modes stables w_2 sont excités, et de leur rétroaction sur la dynamique lente. On voit ici très clairement que le terme cubique n'est pas "inventé" : il résulte du fait que le mode critique excite des composantes secondaires qui, en retour, freinent sa croissance.

4.4 Lecture physique du terme $-gA^3$

Le terme μA représente une amplification linéaire si μ > 0. Sans saturation, l'amplitude divergerait. Le terme $-gA^3$ joue donc le rôle d'un mécanisme auto-limitant. Il traduit physiquement le fait que, lorsque le mode devient grand, les transferts non linéaires vers d'autres structures deviennent importants et finissent par stabiliser l'amplitude.

C'est cette idée qui donne au potentiel quartique sa signification profonde. L'équation

$$A^{\cdot} = \mu A - gA^3$$

équivaut à un mouvement de relaxation dans le potentiel

$$V(A) = -(\mu/2)A^2 + (g/4)A^4$$

Le système n'explore donc pas un espace indifférent : il évolue dans un paysage de stabilité. Ce paysage est précisément ce que vous avez ensuite généralisé dans votre modèle topologique.

5. Élimination des modes rapides : pourquoi apparaît un bruit effectif

Nous avons jusqu'ici obtenu une équation déterministe pour l'amplitude A. Mais si l'on veut rendre compte d'un milieu turbulent réel, il faut réintroduire le fait que les modes éliminés ne sont pas parfaitement déterministes ni parfaitement asservis. Ils forment un bain dynamique complexe qui agit sans cesse sur le mode lent. C'est ici qu'intervient l'idée de réduction stochastique.

5.1 Système lent-rapide

La dynamique réduite peut être écrite sous une forme générale :

$$A^{\cdot} = f(A) + \Psi(A, w)$$

$$w^{\cdot} = (1/\varepsilon)L_s w + (1/\varepsilon)G(A, w)$$

où $f(A) = \mu A - gA^3$, et où $\varepsilon \ll 1$ mesure la séparation des temps entre la dynamique lente de A et la dynamique rapide des degrés de liberté w. L'idée est que w évolue rapidement, mélange

rapidement l'information, et agit sur A comme une succession de petites impulsions corrélées sur des temps courts.

5.2 Principe d'homogénéisation

Lorsque les variables rapides ont des corrélations suffisamment courtes et des propriétés de mélange, leur effet cumulé sur la variable lente peut être remplacé, à grande échelle de temps, par un drift effectif et un bruit brownien effectif. C'est l'idée générale des théories d'homogénéisation et des réductions de type Mori-Zwanzig. Formellement, sous certaines hypothèses, le système lent converge vers une équation différentielle stochastique :

$$dA = f(A)dt + B(A)dW_t$$

Le terme f̄(A) contient le drift initial f(A), plus des corrections dues à l'élimination des variables rapides. Le terme B(A)dW□ représente l'effet résiduel des fluctuations des petites échelles. Autrement dit, même si le système initial est purement déterministe, la perte d'information sur les variables rapides transforme la dynamique observée du mode lent en une dynamique stochastique.

5.3 Interprétation physique

Physiquement, c'est un point fondamental. Lorsque vous n'observez qu'une variable macroscopique A(t), vous ne voyez pas tous les transferts d'énergie, interactions triadiques, structures locales ou fluctuations fines du champ complet. Ces degrés de liberté non observés agissent comme un environnement interne. Leur effet collectif ressemble à un bruit.

Cela signifie que le bruit de votre modèle n'est pas nécessairement un bruit "ajouté de l'extérieur". Il peut être compris comme un bruit émergent, conséquence de la réduction d'un système complexe de grande dimension à une variable macroscopique unique.

6. Apparition d'une équation de Langevin pour l'amplitude

Nous pouvons maintenant écrire plus concrètement la forme réduite issue de cette élimination.

6.1 Forme générale

Après renormalisation éventuelle des coefficients, l'équation lente devient

$$dA = \left(\mu A - gA^3 + \Delta(A)\right)dt + B(A)dW_t$$

Dans beaucoup de cas, lorsque l'on cherche une forme minimale et pédagogique, on absorbe Δ(A) dans les paramètres μ et g, et on approxime B(A) par une constante ou par une amplitude lentement variable. On obtient alors une première forme simple :

$$dA = \left(\mu A - gA^3\right)dt + sdW_t$$

C'est une équation de Langevin dans un potentiel quartique.

En identifiant x ≡ A, on obtient :

$$dx = \left(\mu x - gx^3\right)dt + sdW_t$$

Cette équation décrit un mode macroscopique évoluant dans un paysage bistable ou monostable selon le signe de μ, et soumis à un bruit de fond.

6.2 Densité de probabilité associée

Cette équation a une interprétation statistique immédiate. Si le bruit est additif blanc de variance s^2, la densité de probabilité P(x,t) obéit à l'équation de Fokker-Planck :

$$\partial_t P = -\partial_x[(\mu x - g x^3)P) + (s^2/2)\partial_{xx} P$$

En régime stationnaire, on obtient

$$P_s t(x) \propto exp(-2V(x)/s^2)$$

avec

$$V(x) = -(\mu/2)x^2 + (g/4)x^4$$

Autrement dit, le potentiel structure les régimes accessibles, le bruit permet de les explorer, et la distribution finale résulte de la compétition entre confinement déterministe et agitation aléatoire.

6.3 Franchissement de barrière

Si μ > 0, le potentiel a deux minima stables séparés par une barrière centrale. Le bruit s dW□ peut alors provoquer des transitions d'un puits à l'autre. Cela donne déjà une description très riche : coexistence de régimes, fluctuations autour d'états préférentiels, transitions rares, temps de résidence. C'est une première version de la physique que vous cherchez à capturer dans vos trois cas pédagogiques : la mer, le CAC40, les projets.

6.4 Limite de cette première forme

Mais cette équation avec bruit additif constant n'est pas encore suffisante pour reproduire l'intermittence forte, les queues épaisses et les corrélations longues de l'intensité des fluctuations. Elle capture bien les transitions de régime et un bruit de fond, mais pas encore la structure hiérarchique des épisodes calmes et agités.

Turbulence intermittente et émergence d'un bruit d'intensité fluctuante

Nous arrivons maintenant à la partie décisive : comment passer du bruit additif simple à un bruit d'intensité fluctuante, autrement dit comment faire émerger, à partir de la turbulence intermittente, le terme σ(t)dW1 de votre modèle. C'est ici que le lien avec Kolmogorov raffiné, les cascades multifractales et l'idée de volatilité à mémoire longue devient vraiment clair.

7. De Kolmogorov 1941 à la dissipation locale fluctuante.

La théorie classique de Kolmogorov de 1941 part d'une idée extrêmement puissante. Dans une turbulence pleinement développée, loin de l'échelle d'injection et loin de l'échelle de dissipation, il existe un domaine inertiel où la statistique des fluctuations ne dépend essentiellement que du taux moyen de dissipation d'énergie par unité de masse, noté ε. Dans ce cadre, l'incrément de

vitesse sur une échelle spatiale ℓ vérifie δuℓ = u(x+ℓ) − u(x) et obéit dimensionnellement à la loi δuℓ ~ (εℓ)^(1/3). Cette relation contient déjà l'idée de cascade : l'énergie injectée aux grandes échelles traverse l'espace des échelles puis finit dissipée aux petites échelles. Mais dans cette première version ε est traité comme une grandeur moyenne uniforme. Or les observations expérimentales et numériques ont montré que ce n'est pas le cas. La turbulence réelle est très loin d'être homogène à petite échelle. La dissipation se concentre dans des structures rares et intenses : filaments, feuillets de vorticité, zones de fort cisaillement. Cela signifie que le taux de dissipation n'est pas une constante uniforme, mais une grandeur localement fluctuante.

C'est précisément ce qui conduit à la version raffinée de Kolmogorov. On remplace le taux moyen ε par un taux de dissipation local ou coarse-grained dépendant de l'échelle ℓ, noté εℓ. La loi d'échelle devient alors δuℓ ~ (εℓ ℓ)^(1/3). Cette écriture est déjà extraordinairement proche de l'intuition du modèle : à une échelle donnée, l'intensité locale des fluctuations rapides dépend d'une variable lente ou mésoscopique εℓ qui change dans l'espace et dans le temps. Autrement dit la turbulence n'est pas seulement un bruit ; c'est un bruit dont l'intensité elle-même fluctue. C'est exactement le point de départ du terme σ(t).

7.1 Dissipation dans Navier-Stokes.

Pour un fluide incompressible la dissipation locale instantanée s'écrit ε(x,t) = 2v Sij(x,t) Sij(x,t) où Sij = (1/2)(∂i uj + ∂j ui) est le tenseur des taux de déformation. La dissipation est donc une grandeur quadratique dans les gradients de vitesse. Comme ces gradients deviennent très irréguliers dans la turbulence développée, ε(x,t) devient lui-même extrêmement intermittent. Si l'on moyenne sur un volume de taille ℓ on obtient une dissipation coarse-grained εℓ(x,t) = (1/|Ωℓ|) ∫_{Ωℓ(x)} ε(y,t) dy. Cette quantité dépend de la position, du temps et de l'échelle et fluctue lentement par rapport aux fluctuations locales rapides. On dispose donc naturellement de deux niveaux : un niveau rapide correspondant aux fluctuations instantanées et un niveau plus lent correspondant à l'intensité locale des fluctuations via εℓ.

8. De la dissipation locale à une amplitude de bruit effective.

Après réduction modale, l'amplitude lente x(t) subit l'effet des degrés de liberté rapides sous forme d'un bruit effectif. La variance instantanée de ce bruit doit être reliée à l'intensité locale de l'agitation turbulente. On peut alors écrire Var(dηt | Ft) ∝ εeff(t) dt où dηt représente l'incrément du forçage rapide effectif et εeff(t) une dissipation turbulente coarse-grained vue par le mode lent. Cette relation conduit naturellement à dηt = σ(t) dWt avec σ²(t) ∝ εeff(t). En remplaçant dans l'équation d'amplitude on obtient dx = (μx − g x³) dt + σ(t) dWt. On retrouve ainsi la structure fondamentale du modèle.

8.1 Pourquoi σ(t) est lent par rapport à dWt.

Il faut distinguer deux niveaux temporels. Le processus dWt représente les fluctuations rapides du bain turbulent sur les petites échelles éliminées. En revanche σ(t) représente l'intensité coarse-grained de cette agitation. Cette intensité résulte de la superposition de nombreuses échelles et structures cohérentes et varie donc plus lentement. On retrouve la structure suivante :

bruit rapide centré et enveloppe lente d'intensité. Cette structure reflète directement l'organisation multi-échelle de la turbulence.

8.2 Passage espace-temps.

Dans les mesures expérimentales on observe souvent un signal temporel plutôt qu'un champ spatial complet. Les structures turbulentes se déplacent et traversent l'observateur. L'échelle spatiale ℓ peut alors être associée à une échelle temporelle τ. La dissipation coarse-grained εℓ devient une variable temporelle ετ(t) ou εeff(t). La relation σ²(t) ~ εeff(t) apparaît alors naturellement. La volatilité du modèle peut être interprétée comme la forme temporelle effective de la cascade de dissipation.

9. Cascades multiplicatives, multifractalité et mémoire de σ(t).

Les modèles d'intermittence décrivent la dissipation comme une cascade multiplicative.

À une échelle plus petite on peut écrire εℓn = εL ∏_{k=1}^{n} Wk où εL est la dissipation à grande échelle et Wk les multiplicateurs aléatoires de la cascade.

En prenant le logarithme on obtient ln εℓn = ln εL + Σ ln Wk. Cette somme de contributions provenant de nombreuses échelles conduit naturellement à des lois lognormales ou multifractales. Comme σ²(t) est proportionnelle à une dissipation effective il est naturel d'introduire la variable y(t) = ln σ²(t).

9.2 Cascade continue et structure corrélée.

Lorsque la cascade est décrite de façon continue en échelle, la variable y(t) peut être modélisée comme une convolution y(t) = ∫_{-∞}^{t} K(t−s) ξ(s) ds où ξ(s) est un bruit blanc et K un noyau de mémoire. Si K(τ) ~ τ^{−β} avec 0 < β < 1, alors y(t) possède une mémoire longue effective. Les épisodes d'intensité élevée ont alors tendance à se regrouper et la corrélation de l'intensité décroît lentement.

9.3 Écriture discrète.

On peut également écrire y_n = Σ_{k≥0} a_k η_{n−k} avec y_n = ln(1 + σ_n²) et des coefficients a_k décroissant lentement avec k. Cela produit une mémoire longue effective dans y_n et donc dans σ_n. La turbulence intermittente ne produit donc pas seulement des fluctuations fortes mais aussi une hiérarchie temporelle de leur intensité.

9.4 Équation finale complète.

En réunissant toutes les étapes on obtient : dx = (μx − g x³) dt + σ(t) dW1 + s dW2 avec par exemple y(t) = ln(1 + σ²(t)) obéissant à une dynamique lente corrélée.

9.5 Interprétation physique.

Le terme (μx − g x³) dt provient de la réduction de Navier-Stokes sur un mode critique et décrit la structure lente des régimes accessibles. Le terme s dW2 représente un bruit rapide de fond dû aux petites échelles ordinaires. Le terme σ(t) dW1 représente le forçage turbulent intermittent

piloté par la dissipation locale héritée de la cascade de Kolmogorov raffinée. La mémoire de σ(t) provient de la superposition hiérarchique des échelles de la cascade. L'équation dx = (μx − g x³) dt + σ(t) dW1 + s dW2 peut ainsi être interprétée comme l'écriture réduite d'un mode collectif plongé dans un bain turbulent multi-échelle et intermittent.

De Landau-Ginzburg à la turbulence intermittente Vers une équation universelle des systèmes complexes

La démarche qui a conduit au modèle proposé ne naît pas d'une construction abstraite. Elle part au contraire d'une confrontation directe avec des données réelles. L'observation initiale concerne les séries temporelles du CAC 40. Lorsque l'on examine ces données sur de longues périodes, plusieurs propriétés statistiques robustes apparaissent. Les rendements financiers présentent des distributions à queue lourde : les événements extrêmes sont beaucoup plus fréquents que ce que prédit une loi gaussienne classique. Les rendements eux-mêmes sont presque dépourvus d'autocorrélation, ce qui signifie que les fluctuations directionnelles du marché sont largement imprévisibles à court terme. En revanche, l'intensité des fluctuations possède une mémoire longue : les périodes de forte agitation ont tendance à se regrouper dans le temps. Ce phénomène est connu sous le nom de clustering de volatilité.

Face à ces propriétés empiriques, la première question consiste à comprendre s'il existe une structure dynamique simple capable de reproduire simultanément ces caractéristiques. Plutôt que de chercher un modèle financier spécifique, l'idée est de remonter à une description plus générale des systèmes complexes. On introduit alors une variable d'ordre x(t) représentant l'état global du système. Dans le contexte financier, cette variable peut être interprétée comme un mode collectif du marché ou comme une composante principale décrivant la dynamique globale des prix.

La dynamique de cette variable est décrite par une équation différentielle dont la partie déterministe provient d'un potentiel non linéaire simple. Dans sa forme la plus élémentaire, cette dynamique s'écrit :

$$dx/dt = \mu x - g x^3$$

Cette équation correspond à la dynamique d'un système évoluant dans un potentiel quartique :

$$U(x) = -(\mu/2)x^2 + (g/4)x^4$$

Une telle structure apparaît naturellement dans la théorie des bifurcations et dans la physique des transitions de phase. Elle correspond à ce que la théorie de Landau appelle la dynamique d'une variable d'ordre proche d'un seuil critique. Lorsque le paramètre μ change de signe, le système passe d'un état unique stable à deux états possibles. La non-linéarité cubique assure la saturation de l'instabilité et stabilise la dynamique.

Cette équation est loin d'être spécifique à la finance. Elle apparaît dans de nombreux contextes physiques, notamment dans la théorie de Landau-Ginzburg, où une variable d'ordre décrit l'état macroscopique d'un système proche d'une transition de phase. Dans ce cadre, la variable d'ordre peut représenter par exemple la magnétisation d'un matériau, la densité d'un fluide ou l'amplitude d'un mode d'instabilité hydrodynamique.

Dans un système réel, cependant, cette dynamique déterministe n'est jamais isolée. Le système est immergé dans un environnement fluctuant constitué d'un grand nombre de degrés de liberté rapides. Lorsque ces degrés de liberté sont éliminés dans une description réduite, leur effet se manifeste sous la forme d'un bruit effectif. L'équation précédente devient alors une équation stochastique :

$$dx = \left(\mu x - gx^3\right)dt + sdW$$

Cette équation correspond à une dynamique de type Langevin. Elle décrit une variable lente évoluant dans un potentiel quartique et soumise à des fluctuations aléatoires.

Dans de nombreux modèles classiques, ce bruit est supposé gaussien et d'intensité constante. Cependant, cette hypothèse ne permet pas de reproduire certaines propriétés observées dans les systèmes complexes réels, en particulier l'apparition d'événements extrêmes et la présence d'une mémoire longue dans l'intensité des fluctuations.

C'est ici qu'intervient la notion de turbulence intermittente. Dans les écoulements turbulents, l'agitation du fluide n'est pas homogène. La dissipation de l'énergie se concentre dans des structures rares mais intenses : filaments de vorticité, feuillets de cisaillement ou zones de fort gradient de vitesse. Cette observation a conduit à la version raffinée de la théorie de Kolmogorov.

Dans la théorie classique de Kolmogorov de 1941, les fluctuations de vitesse à une échelle spatiale ℓ obéissent à la loi d'échelle :

$$\delta u_\ell (\varepsilon \ell)^{1/3}$$

où ε est le taux moyen de dissipation d'énergie. Mais les observations montrent que la dissipation n'est pas uniforme : elle fluctue fortement dans l'espace et dans le temps. La théorie raffinée introduit donc une dissipation locale ou coarse-grained, notée ε_ℓ. La loi d'échelle devient alors :

$$\delta u_\ell \left(\varepsilon_\ell \ell\right)^{1/3}$$

Cette relation signifie que l'intensité locale des fluctuations rapides dépend d'une variable lente représentant l'activité énergétique du système à l'échelle considérée. Autrement dit, la turbulence ne produit pas seulement un bruit aléatoire ; elle produit un bruit dont l'intensité fluctue elle-même.

Dans une description réduite, cette propriété conduit à remplacer le bruit additif par un bruit multiplicatif :

$$dx = \left(\mu x - gx^3\right)dt + \sigma(t)dW$$

La fonction σ(t) représente l'intensité effective du bruit. Elle est directement liée à la dissipation turbulente coarse-grained et reflète l'activité du bain turbulent dans lequel évolue la variable lente.

La question suivante consiste à comprendre la dynamique de cette intensité. Dans la turbulence intermittente, l'énergie se transmet des grandes échelles vers les petites échelles par un processus de cascade multiplicative. Dans les modèles de Mandelbrot, la dissipation à une échelle donnée peut être écrite comme :

$$\varepsilon_\ell = \varepsilon_L \prod W_k$$

En prenant le logarithme, on obtient une somme de contributions provenant de nombreuses échelles. Cette structure produit naturellement des fluctuations lognormales ou multifractales. Elle explique également pourquoi l'intensité des fluctuations possède une mémoire longue : la dynamique résulte de la superposition d'une hiérarchie d'échelles temporelles.

Il devient alors naturel d'introduire une variable lente :

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma^2(t)\right)$$

qui évolue selon un processus corrélé ou un filtre à mémoire longue. Le modèle complet prend finalement la forme :

$$dx = \left(\mu x - gx^3\right)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

Dans cette équation, le terme déterministe décrit la dynamique lente d'un mode dominant évoluant dans un potentiel quartique. Le terme s dW_2 représente un bruit de fond rapide et homogène. Le terme σ(t) dW_1 correspond au forçage turbulent intermittent, dont l'intensité varie en fonction de l'activité multi-échelle du système.

Cette équation peut être interprétée comme la dynamique d'un mode collectif plongé dans un bain turbulent hiérarchique. Elle constitue une forme réduite d'un système beaucoup plus complexe, obtenu par projection d'une équation de diffusion non linéaire sur un mode dominant.

Cette structure ne dépend pas du système particulier étudié. On peut la rencontrer dès qu'un système possède une équation de transport ou de diffusion non linéaire, un mode dominant proche d'une instabilité, une saturation non linéaire et un environnement turbulent multi-échelle.

Dans ces conditions, la dynamique macroscopique du système peut se réduire à une équation d'amplitude stochastique de type Landau-Ginzburg enrichie par un bruit multiplicatif intermittent.

Cette observation ouvre des perspectives bien au-delà du domaine financier. Des structures similaires apparaissent dans la turbulence hydrodynamique, dans la magnétohydrodynamique des plasmas astrophysiques, dans la dynamique des disques d'accrétion et même dans certains modèles effectifs de cosmologie.

Dans tous ces cas, un mode collectif évolue dans un paysage de potentiel et interagit avec un environnement turbulent caractérisé par une cascade d'échelles. La réduction de cette dynamique conduit naturellement à une équation d'amplitude stochastique dont la structure est remarquablement proche de celle obtenue ici.

Ainsi, ce modèle peut être interprété comme une équation universelle de mode dominant en milieu turbulent intermittent. Il relie des concepts issus de la physique des transitions de phase, de la turbulence et de la théorie multifractale.

Ce qui rend cette démarche particulièrement intéressante est qu'elle ne part pas d'une théorie abstraite, mais d'une observation empirique des données. À partir d'un problème concret – comprendre la dynamique statistique d'un marché financier – on aboutit progressivement à une structure mathématique qui rejoint des cadres fondamentaux de la physique de la complexité.

Cette convergence suggère que de nombreux systèmes naturels, technologiques ou sociaux pourraient partager une architecture dynamique commune : celle d'un mode collectif évoluant dans un paysage non linéaire et soumis à une agitation multi-échelle intermittente.

Dans cette perspective, l'équation proposée n'est pas seulement un modèle particulier. Elle constitue une forme canonique possible de la dynamique des systèmes complexes.