De Turchin et de la théorie des jeux à une EDO réduite pour la cliodynamique

Table des matières

Résumé 4

De Turchin à la théorie des jeux 5

Point de départ 5

1. L'EDO de départ et son interprétation cliodynamique 5

2. Pourquoi il faut rapprocher cette EDO des modèles de Turchin 6

3. Le point de départ : un système 2D de type Lotka-Volterra ou Hopf 6

4. Le passage au voisinage d'une bifurcation de Hopf 6

5. L'apparition naturelle d'un potentiel quartique 7

6. Le rôle central des termes de couplage x y 7

7. Le détour par la théorie des jeux 7

8. Lorsque la matrice de gains dépend du temps 8

9. Dérive de phase et cycles imparfaits 8

10. Comment les fluctuations de couplage deviennent une volatilité sigma(t) 9

11. Passage de l'amplitude à une variable d'ordre cliodynamique 9

12. Hypothèses du raisonnement 10

13. Intérêt spécifique pour la cliodynamique 10

14. Conclusion générale 10

15. Tableau de synthèse des correspondances 11

Les équations de Lotka-Volterra au milieu transformé : une lecture transdisciplinaire des systèmes complexes 11

Introduction 11

1. Les équations de Lotka-Volterra comme point de départ 12

2. La discrétisation spatiale et le passage aux EDP 12

3. Le rapprochement avec Lotka-Volterra 12

4. Les limites des modèles purs de compétition, coopération et proie-prédateur 13

5. La fermeture par une équation de milieu 13

6. Première façon de fermer : reboucler la variable de milieu sur les équations 13

7. Deuxième façon de fermer : faire dépendre les paramètres du milieu 14

8. Interprétation physique des deux modèles 14

9. Applications en théorie des jeux 14

10. Applications en cliodynamique 15

11. Applications en économie et en finance 15

12. Applications en surveillance et en machine industrielle 15

13. Le lien avec les systèmes proies-prédateurs 15

14. Hypothèses sous-jacentes 16

15. Pourquoi cette approche est utile en data science 16

Conclusion 16

Résumé

Le chapitre suit un fil rouge très net : il part d'un langage d'interactions locales, celui des équations de Lotka-Volterra, puis montre que ce langage ne devient vraiment adapté aux systèmes complexes que lorsqu'on lui ajoute un **milieu transformé**. L'idée directrice est donc la suivante : un système complexe ne se réduit pas à des acteurs qui interagissent, il faut aussi prendre en compte le fait que ces interactions modifient progressivement leur propre contexte d'évolution, et que ce contexte revient ensuite agir sur eux. C'est cette boucle qui donne au chapitre son unité profonde.

La première étape du raisonnement consiste à réhabiliter les équations de Lotka-Volterra comme **langage de base**. Elles permettent de représenter des rivalités, des coopérations, des influences croisées, bref des dynamiques interactionnelles élémentaires. Le chapitre montre ensuite que ce langage n'est pas seulement utile en écologie ou en dynamique de populations : il peut aussi être lu comme une forme discrète issue d'une discrétisation spatiale, ce qui crée un pont avec les équations aux dérivées partielles. La discrétisation n'est donc pas présentée comme une simple technique numérique, mais comme une manière de comprendre les EDP comme de grands systèmes dynamiques couplés. C'est un premier niveau de cohérence : le texte relie le discret et le continu, les EDO et les EDP, à partir d'une même structure d'interaction.

La deuxième étape montre cependant que ce premier niveau reste insuffisant. Les modèles de compétition, de coopération, et même les systèmes proies-prédateurs les plus simples, décrivent bien des couplages instantanés, mais rendent mal compte de la richesse des régimes complexes, des cycles robustes, des bifurcations riches, des mémoires longues et des changements de régime. Le chapitre identifie donc une limite fondamentale : les interactions locales ne suffisent pas, si elles se déroulent dans un cadre supposé fixe. C'est là que le texte bascule vers son idée centrale, celle de la **fermeture par une équation de milieu**.

À partir de ce point, la cohérence du chapitre devient particulièrement forte, car tout s'organise autour de deux façons de faire intervenir le milieu. La première consiste à introduire une **variable de milieu explicite**, qui agit comme mémoire d'état, ressource, tension, usure, fragilité, confiance ou climat. Dans cette option, le milieu a une existence dynamique propre. La seconde consiste à faire dépendre directement les **paramètres d'interaction** de ce milieu. Dans ce cas, le milieu ne joue plus seulement le rôle d'un stock ou d'une mémoire, il modifie la structure même des interactions. Le texte insiste alors sur la différence entre ces deux lectures : dans un cas, on a une mémoire d'état ; dans l'autre, une mémoire de structure. C'est une distinction très féconde, car elle ordonne ensuite naturellement les domaines d'application.

Cette distinction donne en effet au chapitre sa portée transdisciplinaire. Dans la théorie des jeux, elle permet de passer d'une matrice de gains fixe à un environnement endogène, transformé par les stratégies passées et agissant en retour sur les gains futurs. En cliodynamique, elle permet de faire le lien entre des interactions entre groupes et des variables lentes comme la cohésion, la pression institutionnelle, la confiance ou le ressentiment. En économie et en finance, elle ouvre la voie à des modèles où les comportements des agents transforment progressivement la confiance, la liquidité, la fragilité ou la tension de marché. En surveillance industrielle ou cyber, elle permet de distinguer les incidents instantanés des dérives accumulatives, grâce à une variable lente de

fatigue, de charge ou de dégradation. Le chapitre ne juxtapose donc pas des applications. Il montre qu'elles sont unifiées par une même architecture dynamique.

L'autre axe très cohérent du texte est le lien avec la réduction vers une **variable d'ordre**. Dans la partie cliodynamique, le raisonnement part de systèmes couplés de type Lotka-Volterra ou Hopf, puis montre comment, au voisinage d'un régime oscillant, on peut réduire la dynamique vers une amplitude, puis vers une variable macroscopique soumise à un potentiel effectif quartique et à une agitation lente. Cette réduction mène à l'EDO stochastique

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

qui apparaît alors non comme un objet abstrait, mais comme la forme réduite d'un système interactionnel plus riche, dont la cohérence de phase s'est partiellement perdue. Ce point est essentiel pour la cohérence générale : l'EDO finale n'est pas extérieure au reste du chapitre, elle en constitue l'aboutissement réduit.

Le chapitre tient donc ensemble parce qu'il avance toujours dans la même direction. Il part d'un modèle élémentaire d'interaction, montre qu'il peut être relié au continu, constate ses limites pour la complexité réelle, introduit un milieu transformé pour dépasser ces limites, distingue deux modalités physiques de cette transformation, puis montre que cette architecture permet de comprendre des domaines très différents et de justifier, au niveau réduit, une variable d'ordre soumise à un potentiel et à une mémoire lente. La cohérence d'ensemble vient de ce que chaque étape n'annule pas la précédente : elle la généralise.

En résumé, on pourrait dire que le chapitre défend une thèse simple et forte : **les équations de Lotka-Volterra forment un bon point de départ pour penser les interactions, mais la complexité véritable apparaît lorsque ces interactions fabriquent un milieu, et lorsque ce milieu devient lui-même un acteur de la dynamique**. C'est cette idée qui unifie le passage des EDO aux EDP, des couplages locaux aux changements de régime, des systèmes écologiques à la théorie des jeux, de la cliodynamique à l'économie, et des modèles analytiques à la data science interprétable.

De Turchin à la théorie des jeux

Point de départ

Le point de départ de la démarche est la volonté d'appliquer à la cliodynamique une équation différentielle stochastique qui a déjà montré sa fécondité dans d'autres domaines de la complexité. Cette équation, écrite sous la forme dx = -V'(x) dt + sigma(t) dW1 + s dW2, décrit l'évolution d'une variable d'ordre x soumise à trois influences. La première est une dérive déterministe qui provient d'un potentiel V(x). La seconde est une agitation principale, d'intensité sigma(t), qui varie dans le temps et porte une mémoire longue. La troisième est un bruit additif résiduel d'intensité s, destiné à représenter l'aléa de fond de plus courte échelle.

L'enjeu n'est pas simplement d'utiliser cette EDO comme une métaphore historique. Il s'agit de montrer qu'elle peut être reliée, par une chaîne de réductions cohérentes, à des modèles plus classiques de cliodynamique. Cette chaîne passe d'abord par les modèles cycliques de Turchin, très proches des systèmes proies-prédateurs ou des dynamiques de Hopf. Elle passe ensuite par une interprétation des termes de couplage, notamment des produits croisés du type x y, dans le langage de la théorie des jeux. Enfin, elle conduit à l'idée qu'une matrice de gains dépendante du temps rend la Jacobienne temporellement variable, donc les valeurs propres elles-mêmes variables, ce qui détruit le rebouclage exact des cycles et fait émerger une volatilité effective à mémoire longue.

Dans tout ce qui suit, l'objectif n'est pas de prétendre que l'histoire réelle se réduit à deux équations simples. L'objectif est de montrer qu'il existe un niveau pertinent de modélisation où l'on peut passer d'un système interactionnel à plusieurs variables à une équation réduite de variable d'ordre, exactement comme on le fait en physique de la complexité lorsqu'on passe d'un système détaillé à une équation d'amplitude ou à une dynamique de potentiel.

1. L'EDO de départ et son interprétation cliodynamique

On considère l'équation réduite suivante, qui servira de fil directeur :

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

La variable x(t) doit être comprise comme une variable d'ordre historique ou socio-économique. Elle peut représenter, selon le problème posé, un niveau global de cohésion politique, un degré d'intégration impériale, un indice synthétique de stabilité institutionnelle, un niveau agrégé de tension sociale inversée, ou encore une variable macroéconomique représentant un état de régime. Le potentiel V(x) décrit la géographie moyenne des régimes possibles. Lorsqu'il est quartique bistable, il possède deux minima séparés par une barrière, ce qui signifie que le système a deux états préférentiels entre lesquels il peut basculer.

La fonction sigma(t) représente quant à elle l'intensité de l'agitation interne. Dans une lecture strictement phénoménologique, on pourrait la considérer comme une simple volatilité latente. Mais tout l'objet du raisonnement développé ici est de lui donner une origine plus structurée. On va montrer qu'elle peut être interprétée comme la trace réduite de couplages internes imparfaitement cohérents. Le terme s dW2 représente enfin le bruit de fond résiduel, de plus courte échelle, qui n'est pas porteur de mémoire longue mais qui maintient une agitation minimale permanente.

2. Pourquoi il faut rapprocher cette EDO des modèles de Turchin

L'un des traits les plus visibles de l'histoire longue et de l'économie est la présence de cycles. Il ne s'agit presque jamais de cycles parfaitement périodiques, mais de successions récurrentes de phases d'essor, de saturation, de tension, de crise, de recomposition et de reprise. Les travaux de Turchin ont précisément cherché à modéliser de telles alternances à partir de systèmes dynamiques couplés, où plusieurs variables interagissent de manière endogène. Dans cet esprit, les modèles de type Lotka-Volterra, ou plus largement les modèles proches d'une bifurcation de Hopf, sont un point de départ naturel.

Ces modèles ne ressemblent pas immédiatement à l'EDO réduite, car ils vivent dans un espace de phase de dimension supérieure. Mais ils ont une vertu essentielle : ils mettent explicitement en scène des couplages entre variables. Or ce sont précisément ces couplages qui donnent naissance aux cycles. Le rapprochement avec l'EDO consiste donc à montrer comment la dynamique cyclique de plusieurs variables peut être réduite vers une variable d'ordre unique, soumise à une dérive de potentiel et à une volatilité effective.

3. Le point de départ : un système 2D de type Lotka-Volterra ou Hopf

Pour fixer les idées, on part d'un système bidimensionnel générique :

$$\frac{dz}{dt} = F(z; A)$$

$$avecz(t) = (x(t)\ y(t)\ )$$

Ici, x et y représentent deux variables couplées. En cliodynamique, elles peuvent symboliser par exemple une force d'intégration et une force de tension, une population dominante et une contre-force, un bloc d'élites et une contre-élite, ou deux stratégies sociales concurrentes. La matrice A représente la structure des interactions, ou, dans une lecture plus stratégique, la structure des gains. Lorsque A est fixe, la règle d'interaction est fixe.

Dans la tradition Lotka-Volterra la plus simple, on écrirait par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(- c + dx)$$

Ces équations expriment le fait que la croissance de l'une des variables dépend de la présence de l'autre et réciproquement. Le couplage est donc intrinsèque à la dynamique. Dans une lecture purement historique, cette forme est trop simple pour représenter toute la richesse des processus sociaux. Mais elle suffit pour fixer un cadre : les cycles peuvent naître du couplage endogène entre variables.

4. Le passage au voisinage d'une bifurcation de Hopf

Pour faire apparaître une équation d'amplitude propre, il est commode de se placer au voisinage d'un point fixe oscillant et d'utiliser la forme normale de Hopf. Après recentrage autour de l'équilibre, on introduit deux variables u et v. Le système local s'écrit alors, à l'ordre dominant :

$$\frac{du}{dt} = \mu u - \omega v - a\left(u^2 + v^2\right)u$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega u + \mu v - a\left(u^2 + v^2\right)v$$

L'hypothèse sous-jacente est qu'au voisinage du point fixe, la dynamique détaillée peut être approchée par une rotation linéaire de fréquence omega, corrigée par un terme non linéaire qui stabilise l'amplitude. Le paramètre mu mesure ici la distance au seuil de Hopf. Si mu est positif, le système possède un cycle limite de rayon fini.

On passe alors aux coordonnées polaires :

$$u = Rcos(\varphi)$$

$$v = Rsin(\varphi)$$

Ce changement de variables conduit, au premier ordre, aux équations réduites :

$$\frac{dR}{dt} = \mu R - aR^3$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

On obtient donc immédiatement une équation d'amplitude. Le cycle limite parfait correspond au cas où l'amplitude R se stabilise à une valeur constante R0 = sqrt(mu / a), tandis que la phase croît linéairement avec le temps. La mémoire du système est alors géométrique : il reboucle pratiquement sur la même orbite.

5. L'apparition naturelle d'un potentiel quartique

L'équation d'amplitude précédente peut être réécrite sous forme de dérive de potentiel :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{dV_R}{dR}$$

avec

$$V_R(R) = -\frac{\mu}{2}R^2 + \frac{a}{4}R^4$$

Le potentiel est déjà quartique. Cette étape est essentielle, car elle montre qu'une dynamique de Hopf peut produire naturellement une équation de type Landau, c'est-à-dire exactement le genre de structure qui conduit ensuite à une EDO réduite. Le quartique ne doit donc pas être vu comme un ajout arbitraire. Il apparaît comme la forme normale de l'amplitude au voisinage d'une bifurcation oscillante.

6. Le rôle central des termes de couplage x y

Le point le plus important pour le rapprochement avec votre EDO est l'interprétation des termes de couplage. Dans les systèmes 2D, les cycles n'existent pas parce qu'une variable serait isolément oscillante, mais parce que chaque variable agit sur l'autre. Cette interaction croisée peut être lue, de manière schématique, à travers des termes comme x y, ou, plus généralement, à travers les corrélations croisées entre les deux variables.

Dans le cas d'un cycle limite parfait, cette corrélation croisée reste hautement cohérente. Le système garde une relation de phase stable entre ses deux composantes. Les produits d'interaction ou les corrélations croisées ne sont pas de simples quantités statistiques ; ils sont l'expression de la fermeture de la boucle dynamique. C'est précisément cette cohérence qui permet au système de repasser sans cesse par des états analogues.

En revanche, si cette cohérence n'est plus parfaite, le système continue à porter une mémoire du couplage, mais cette mémoire cesse d'être exactement périodique. Les cycles persistent, mais ils

ne rebouclent plus parfaitement. C'est à ce niveau que la notion de mémoire longue imparfaite devient pertinente.

7. Le détour par la théorie des jeux

Le même raisonnement peut être reformulé dans le langage de la théorie des jeux. Dans ce cadre, les variables x et y ne représentent plus nécessairement deux populations au sens biologique ou démographique, mais deux stratégies, deux comportements collectifs, deux coalitions, ou deux types d'acteurs. Les couplages entre variables sont alors pilotés par une matrice de gains A.

Dans un jeu à deux stratégies, les gains dépendent des rencontres ou des interactions. Les dynamiques réplicatrices et, plus généralement, les dynamiques adaptatives de théorie des jeux génèrent elles aussi des termes non linéaires où les produits croisés entre variables jouent un rôle essentiel. Le terme de couplage n'est alors plus seulement une interaction brute ; il devient une interaction valorisée par les règles du jeu.

Cette lecture est très importante pour la cliodynamique. Beaucoup de phénomènes historiques peuvent être interprétés comme des jeux répétés, ou comme des compétitions adaptatives, entre élites et contre-élites, centre et périphérie, État et groupes fiscaux, grandes puissances rivales, coalitions sociales concurrentes, ou stratégies de coopération et de prédation. Les cycles observés ne sont donc pas seulement des cycles d'effectifs ; ce sont aussi des cycles de gains stratégiques et de réponses mutuelles.

8. Lorsque la matrice de gains dépend du temps

Le pas conceptuel décisif consiste à supposer que la matrice de gains n'est pas fixe. On écrit alors :

$$A = A(t)$$

Cette hypothèse signifie que les règles du jeu évoluent elles-mêmes au cours du temps. Dans l'histoire réelle, c'est tout à fait plausible. Les institutions changent, les ressources se déplacent, les formes de légitimité se transforment, les technologies modifient les asymétries, les apprentissages stratégiques déplacent les comportements. Le jeu se transforme en se jouant.

Lorsque A dépend du temps, la linéarisation locale de la dynamique autour d'un état de référence produit une Jacobienne dépendante du temps :

$$\delta z^{\cdot} = J(t)\delta z$$

$$J(t) = \frac{\partial F}{\partial z}\left(z^{*}(t); A(t)\right)$$

Les valeurs propres de J deviennent donc elles-mêmes temporelles. Dans le cas oscillant, on peut écrire localement :

$$\lambda_{\pm}(t) = \alpha(t) \pm i\omega(t)$$

Le terme omega(t) est la fréquence instantanée locale, tandis que alpha(t) mesure la contraction ou la dilatation locale de l'orbite. Tant que ces quantités sont fixes, la fermeture des cycles reste

cohérente. Mais si elles varient, la phase et l'amplitude se mettent à dériver. C'est cela qui détruit le cycle parfaitement rebouclé.

9. Dérive de phase et cycles imparfaits

Lorsque la fréquence n'est plus constante, la phase ne s'écrit plus simplement phi(t) = omega t. Elle devient :

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

La moindre fluctuation de omega(t) s'accumule donc au cours du temps sous la forme d'une erreur de phase. Même si la fréquence instantanée ne fluctue que faiblement, la dérive cumulée empêche le système de revenir exactement au même point du plan de phase après plusieurs tours. Le cycle continue à exister comme forme globale, mais il ne se referme plus parfaitement.

De la même manière, les fluctuations de alpha(t) entraînent des expansions et contractions locales de l'orbite. Le rayon du cycle ne reste plus constant. Il respire, se dilate, se contracte, puis se redéforme. On n'a plus une orbite fixe, mais une orbite fluctuante. C'est cette double perte de fermeture, par la phase et par l'amplitude, qui prépare la réduction vers une volatilité effective.

10. Comment les fluctuations de couplage deviennent une volatilité sigma(t)

On peut maintenant introduire explicitement une variable lente q(t) représentant l'état de cohérence du couplage interne. Cette variable peut être vue comme une fonctionnelle des interactions passées, par exemple sous la forme :

$$q(t) = \int_0^t K(t - \tau)\Psi(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

Ici, K est un noyau de mémoire et Psi une mesure de l'activité de couplage. Dans l'esprit du raisonnement développé plus haut, Psi peut contenir les produits croisés du type x y, ou des mesures plus sophistiquées de corrélation croisée. Si K est très rigide et conserve presque toute l'information de phase, le système conserve un cycle très cohérent. Si K décroît lentement mais imparfaitement, q(t) garde une mémoire longue sans reconstruire exactement la boucle.

On peut alors faire dépendre le paramètre mu de cette variable lente :

$$\mu(t) = \mu_0 + \varepsilon q(t)$$

L'équation d'amplitude devient :

$$\frac{dR}{dt} = \left(\mu_0 + \varepsilon q(t)\right)R - aR^3$$

Le terme epsilon q(t) R agit comme une modulation lente et persistante de l'amplitude. Après coarse-graining, c'est-à-dire après élimination des détails fins de q et de la phase rapide, cette modulation peut être représentée par une agitation effective d'enveloppe. On obtient alors schématiquement :

$$dR = -V_R'(R)dt + \sigma_R(t)dW_1 + s_R dW_2$$

La volatilité sigma_R(t) est donc l'héritière de la cohérence imparfaite des couplages internes. Elle n'est pas un bruit exogène rajouté sans structure ; elle est la trace macroscopique de la variabilité lente des couplages, de la déformation des gains, de la fluctuation des valeurs propres et de la non-fermeture des cycles.

11. Passage de l'amplitude à une variable d'ordre cliodynamique

À ce stade, la variable réduite peut être l'amplitude R elle-même. Mais, pour l'application à la cliodynamique, il est souvent plus parlant de construire une variable d'ordre signée, notée ici x, qui représente directement un état macroscopique du système. Cette variable peut être une projection des variables initiales, une combinaison de plusieurs indicateurs, ou une observable synthétique construite à partir des données.

Une fois la phase rapide éliminée, cette variable macroscopique peut être décrite par un potentiel effectif quartique, souvent bistable :

$$V(x) = \frac{\lambda}{4}x^4 - \frac{\nu}{2}x^2 + \rho x$$

Le terme quartique assure le confinement, le terme quadratique crée la possibilité de deux puits, et le terme linéaire introduit une dissymétrie entre les régimes. Dans une lecture historique, cela permet de représenter deux attracteurs collectifs, par exemple ordre et crise, centralisation et fragmentation, stabilité et instabilité chronique, ou croissance et contraction.

La dynamique réduite prend alors la forme finale :

$$\mathrm{dx} = -\,\mathrm{V'(x)\ dt} + \mathrm{sigma(t)\ dW1} + \mathrm{s\ dW2}$$

La signification de sigma(t) est désormais claire. Il s'agit de la mémoire statistique de la déformation lente des couplages internes, autrement dit de la mémoire imparfaite d'un système qui oscille, se répond, s'affronte ou se coordonne, sans jamais se refermer exactement sur lui-même.

12. Hypothèses du raisonnement

Pour que cette chaîne de dérivation soit cohérente, plusieurs hypothèses doivent être explicitées. La première est l'existence d'un niveau mésoscopique où un petit nombre de variables couplées résume raisonnablement la dynamique historique considérée. La seconde est l'existence d'un régime oscillant local, ou du moins d'une dynamique suffisamment proche d'une bifurcation de Hopf pour justifier une réduction amplitude-phase. La troisième est la présence de variables lentes cachées, ou d'une structure de gains lentement variable, qui déforment progressivement les couplages.

La quatrième hypothèse est que l'on accepte de perdre l'information détaillée de phase pour construire un modèle réduit. Une fois cette phase éliminée, ce qui subsiste de la non-fermeture des cycles est une agitation enveloppe, donc une volatilité effective. Enfin, la dernière hypothèse est que cette volatilité n'est pas de mémoire courte. Elle garde une persistance, parce qu'elle provient de déformations lentes de la structure d'interaction elle-même.

13. Intérêt spécifique pour la cliodynamique

L'intérêt de cette réduction pour la cliodynamique est considérable. Les cycles historiques observés ne sont presque jamais des cycles limites propres. Ils se ressemblent sans se répéter à l'identique. Ils gardent une mémoire de structure, mais cette mémoire est toujours altérée par la transformation des institutions, des ressources, des comportements et des règles du jeu. La dynamique réduite avec sigma(t) permet précisément de représenter cette situation intermédiaire entre ordre cyclique et turbulence pure.

De plus, cette EDO offre un cadre très utilisable pour les données. On peut tenter de reconstruire une variable d'ordre historique x(t), estimer empiriquement sa densité, en déduire un pseudo-potentiel par la relation V_eff(x) proportionnel à moins le logarithme de la densité, puis analyser les résidus afin d'estimer une volatilité lente. On obtient alors un pont concret entre théorie des cycles historiques, théorie des jeux évolutive, réduction de dimension et modélisation stochastique.

14. Conclusion générale

Le raisonnement complet peut maintenant être résumé de façon unifiée. On part d'une dynamique cliodynamique à variables couplées, dans l'esprit de Turchin, où les cycles proviennent d'interactions internes. On reconnaît que ces couplages peuvent aussi être interprétés dans le langage de la théorie des jeux, via une matrice de gains. On admet ensuite que cette matrice de gains peut dépendre du temps, ce qui rend la Jacobienne et les valeurs propres temporellement variables. Dès lors, la fréquence et l'amplitude locales du cycle dérivent, ce qui empêche le rebouclage parfait.

Après réduction vers une variable d'amplitude, puis vers une variable d'ordre, cette non-fermeture ne disparaît pas. Elle se transforme en une volatilité effective sigma(t), porteuse de mémoire longue. Le modèle réduit dx = -V'(x) dt + sigma(t) dW1 + s dW2 peut donc être compris comme la forme macroscopique d'un système cyclique plus riche, dont la cohérence de phase s'est partiellement perdue mais dont la mémoire structurelle subsiste sous forme statistique.

Ainsi, l'EDO n'est pas extérieure à la cliodynamique. Elle peut au contraire être vue comme une écriture réduite, topologique et stochastique, de la logique même des cycles historiques lorsque ceux-ci ne se referment plus parfaitement parce que les couplages stratégiques, les gains et les modes propres du système évoluent au cours du temps.

15. Tableau de synthèse des correspondances

Le tableau suivant résume les correspondances conceptuelles établies dans le texte entre les différents niveaux de description.

Niveau	Objet principal	Rôle dynamique	Trace dans l'EDO réduite
Couplage micro ou méso	Interactions x-y, produits croisés, corrélations	Fermeture locale de la boucle cyclique	Source profonde de sigma(t)
Théorie des jeux	Matrice de gains A	Règles stratégiques de l'interaction	Déformation lente des gains

Dynamique locale	Jacobienne J(t)	Modes instantanés du système	Variation de fréquence et d'amortissement
Réduction de Hopf	Amplitude R et phase phi	Cycle limite parfait ou déformé	Quartique sur l'amplitude
Variable d'ordre	Observable macroscopique x	Régimes historiques agrégés	Potentiel quartique bistable
Modèle final	EDO réduite	Transitions de régime sous agitation lente	$dx = -V'(x)dt + \sigma(t$

Les équations de Lotka-Volterra au milieu transformé : une lecture transdisciplinaire des systèmes complexes

Introduction

Le parcours suivi ici part d'un objet mathématique apparemment simple, les équations de Lotka-Volterra de compétition ou de coopération, pour aboutir à une idée beaucoup plus générale sur la modélisation des systèmes complexes. Au départ, ces équations décrivent des interactions locales entre composantes. Elles conviennent bien pour penser des rivalités, des coopérations, des échanges ou des influences mutuelles. Mais, au fil du raisonnement, elles se révèlent insuffisantes dès que l'on veut rendre compte de phénomènes réellement complexes, c'est-à-dire de phénomènes où les acteurs modifient progressivement le milieu dans lequel ils évoluent, et où ce milieu transformé agit ensuite en retour sur eux.

Ce chemin est important parce qu'il permet de relier plusieurs mondes. Il relie les équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles. Il relie l'écologie, la théorie des jeux, la cliodynamique, l'économie, la surveillance industrielle ou cyber et, plus généralement, la physique des systèmes complexes. Il relie aussi deux façons de penser la complexité. La première est fondée sur l'interaction directe entre variables. La seconde ajoute à cette interaction une variable de milieu, de mémoire, de ressource, de contexte ou de structure lente. C'est cette seconde étape qui fait apparaître la véritable profondeur physique du problème.

Le texte qui suit reprend ce parcours dans l'ordre. On partira d'abord des équations de Lotka-Volterra elles-mêmes. On montrera ensuite qu'elles peuvent être vues comme la discrétisation spatiale d'équations aux dérivées partielles. On verra alors que la discrétisation n'est pas seulement une technique numérique, mais une manière d'appréhender les EDP comme de grands systèmes dynamiques couplés. Puis on montrera pourquoi les systèmes de compétition ou de coopération purs, et même les systèmes proies-prédateurs pris dans leur forme la plus simple, demeurent trop pauvres pour rendre compte de véritables cycles limites robustes et de changements de régime riches. Cela conduira naturellement à l'idée de fermeture par une équation de milieu. Enfin, on distinguera deux façons de faire intervenir ce milieu. Soit on reboucle une variable de milieu sur les équations. Soit on fait dépendre directement les paramètres des

équations de cette variable. Ces deux options ont des sens physiques différents et ouvrent des domaines d'application distincts.

1. Les équations de Lotka-Volterra comme point de départ

La forme la plus générale d'un système de Lotka-Volterra à N composantes peut s'écrire comme un ensemble d'équations de la forme suivante.

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(r_i + \sum_j a_{ij}x_j\right), i = 1, \ldots, N$$

$$\frac{dx}{dt} = x\left(r_1 + a_{11}x + a_{12}y\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(r_2 + a_{21}x + a_{22}y\right)$$

2. La discrétisation spatiale et le passage aux EDP

Une idée importante apparue au cours du raisonnement consiste à regarder les équations de Lotka-Volterra non plus seulement comme des équations d'interaction entre espèces ou stratégies, mais comme des systèmes dynamiques discrets pouvant résulter d'une discrétisation spatiale. Cette idée est décisive, car elle ouvre un pont direct vers les équations aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{du_k}{dt} = -u_k\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\Delta x} + \nu\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{(\Delta x)^2}$$

Considérons par exemple une grandeur continue u(x,t) définie sur un segment spatial (a,b). Si l'on discrétise ce segment avec un pas Δx, on obtient des points x_k = a + kΔx et des valeurs nodales u_k(t) ≈ u(x_k,t). Une équation aux dérivées partielles devient alors un grand système d'équations différentielles ordinaires couplées entre voisins. C'est ainsi que l'on a relu l'équation de Burgers.

3. Le rapprochement avec Lotka-Volterra

Une fois la discrétisation écrite, il apparaît naturellement des termes quadratiques de type u_k u_{k+1} ou u_k u_{k-1}. C'est cette structure bilinéaire qui évoque immédiatement les équations de Lotka-Volterra. Le rapprochement n'est pas exact au sens physique, mais il est profond au sens structurel.

Dans Lotka-Volterra, les produits x_i x_j représentent des interactions entre composantes distinctes. Dans Burgers discrétisé, des produits analogues apparaissent parce que l'on approxime un transport non linéaire. Pourtant, dans les deux cas, la dynamique locale est portée par des couplages quadratiques entre entités voisines ou entre composantes reliées. Cela montre que des formes mathématiques voisines peuvent représenter des réalités physiques très différentes. C'est précisément cette homologie de structure qui rend possibles les ponts transdisciplinaires.

4. Les limites des modèles purs de compétition, coopération et proie-prédateur

Ce rapprochement structurel ne suffit toutefois pas à faire des équations de Lotka-Volterra un modèle complet de la complexité. Dans leur forme classique à coefficients constants, les systèmes

de compétition ou de coopération à deux variables produisent surtout des équilibres, des coexistences, des exclusions ou des basculements simples. Ils modélisent bien l'interaction instantanée, mais beaucoup moins bien la transformation du contexte.

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta x)$$

Le cas proie-prédateur est plus riche, parce qu'il introduit d'emblée une structure antisymétrique entre les termes croisés. Le système proie-prédateur classique s'écrit sous la forme suivante.

5. La fermeture par une équation de milieu

C'est ici qu'intervient l'idée centrale du parcours. Pour obtenir une dynamique plus riche, plus réaliste et plus physiquement interprétable, il faut fermer le système par une équation de milieu. Au lieu de considérer seulement les variables d'interaction, on ajoute une variable de contexte, notée m, qui garde la trace de l'activité passée et revient ensuite agir sur le système.

$$\frac{dm}{dt} = \varepsilon(\Phi(x,y) - m)$$

$$m(t) = \int_0^t K(t-\tau)\Phi(\tau)d\tau, K(s) \sim \frac{1}{(s+s_0)^\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

La forme la plus simple d'une telle fermeture est la suivante.

Cette équation dit que la variable de milieu m tend vers une combinaison des variables actives, mais avec une vitesse lente commandée par ε. Lorsque ε est petit, le milieu réagit avec retard. Il ne suit pas instantanément les acteurs. C'est précisément ce retard qui introduit une mémoire, un déphasage et la possibilité d'oscillations auto-entretenues ou de transitions plus riches.

La résolution explicite de cette équation montre que m est une moyenne exponentielle du passé de Φ. Il s'agit donc d'une mémoire courte de type noyau exponentiel. Si l'on veut une mémoire longue, on remplace cette fermeture locale par une convolution en temps ou une représentation fractionnaire. On écrira alors, par exemple, une variable de milieu sous la forme suivante.

6. Première façon de fermer : reboucler la variable de milieu sur les équations

Dans la première famille de modèles, la variable de milieu agit comme une variable supplémentaire à part entière. Le système garde alors sa logique d'interaction directe entre composantes, mais cette interaction est maintenant médiée par un contexte lent. Pour deux variables x et y, on obtient typiquement un système du genre suivant.

$$\frac{dx}{dt} = x\left(r_1 + a_{11}x + a_{12}y + b_1 m\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(r_2 + a_{21}x + a_{22}y + b_2 m\right)$$

$$\frac{dm}{dt} = \varepsilon(\Phi(x,y) - m)$$

Le sens physique de ce modèle est très fort. Les variables x et y décrivent des forces, des populations, des stratégies, des flux ou des composantes antagonistes ou complémentaires. La variable m décrit l'état du milieu, de la ressource, de la confiance, de la tension, de la fatigue, de la dégradation ou du climat général. Les interactions entre x et y modifient progressivement m, et ce m transformé revient ensuite peser sur x et y.

C'est dans ce cadre que l'on comprend pourquoi un système qui, sans milieu, resterait trop simple, peut alors produire des oscillations robustes. L'ajout de m augmente la dimension du système, introduit du retard et fait apparaître un mode oscillant collectif. Au voisinage d'un équilibre, le système peut alors perdre sa stabilité par bifurcation de Hopf. Ce point est fondamental. Il signifie que la complexité n'est pas seulement dans le nombre d'interactions, mais dans la transformation du contexte par ces interactions.

7. Deuxième façon de fermer : faire dépendre les paramètres du milieu

La seconde façon de faire intervenir le milieu est plus structurelle. Au lieu d'ajouter m comme variable de forçage lente, on fait dépendre directement les paramètres de Lotka-Volterra de cette variable. Le système prend alors la forme suivante.

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(r_i(m) + \sum_j a_{ij}(m)x_j\right)$$

À m fixé, on a toujours un système de Lotka-Volterra pur. Mais, globalement, on n'a plus un paysage dynamique fixe. On a une famille de paysages qui se déforment avec l'état du milieu. Les positions des équilibres changent, leur stabilité change, la nature des interactions peut elle-même changer, voire les signes des termes croisés. Cela veut dire que le même couple d'acteurs peut se trouver tantôt dans un régime de compétition, tantôt dans un régime de coopération ou de conflit asymétrique, selon la valeur de m.

Le sens physique n'est donc pas le même que dans le premier modèle. Dans le premier modèle, m est une mémoire d'état. Dans le second, m est une mémoire de structure. Le premier ajoute une variable lente qui pousse, freine ou accumule. Le second modifie directement la règle du jeu.

8. Interprétation physique des deux modèles

On peut maintenant formuler clairement la différence physique entre les deux approches. Dans le modèle à rebouclage direct, le milieu possède une existence dynamique propre. Il ressemble à un stock, une charge, une ressource, une usure, une tension, une confiance accumulée ou une fragilité latente. Il est particulièrement adapté aux situations où l'on pense qu'il existe réellement un état lent du système.

Dans le modèle à paramètres dépendant du milieu, le rôle de m est différent. Il ne représente plus d'abord un stock physique, mais un contexte qui transforme la nature même des interactions. C'est le bon cadre lorsque les règles du jeu, les couplages ou les coefficients d'influence changent avec l'état historique du système. On retrouve alors une lecture très naturelle en théorie des jeux, en économie institutionnelle, en cliodynamique, ou plus largement dans tous les systèmes adaptatifs.

9. Applications en théorie des jeux

La théorie des jeux fournit une interprétation particulièrement féconde de ce cadre. Dans sa forme la plus simple, un jeu suppose une matrice de gains fixe. Les joueurs choisissent des stratégies dans un contexte donné. Mais, dans beaucoup de systèmes réels, les joueurs modifient eux-mêmes le contexte du jeu. Ils construisent ou détruisent la confiance, changent la réputation collective, dégradent ou restaurent une ressource, transforment les institutions, ou déplacent les normes.

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\Big(f_i(x,m) - f'(x,m)\Big)$$

$$\frac{dm}{dt} = G(x,m)$$

Le premier modèle s'interprète alors comme un jeu avec environnement endogène où les stratégies modifient un milieu lent, puis où ce milieu influe sur les gains effectifs. Le second modèle s'interprète comme un jeu dont la matrice de gains dépend d'une variable historique m. Dans les deux cas, les joueurs ne jouent plus sur un terrain fixe. Ils déforment ce terrain en jouant. Ce passage du jeu statique au jeu avec milieu transformé est l'une des signatures les plus fortes de la complexité.

10. Applications en cliodynamique

En cliodynamique, les variables x et y peuvent représenter des forces de cohésion et de fragmentation, des élites et des contre-élites, la capacité intégratrice d'un État et les pressions centrifuges, ou encore des dynamiques de coopération et de conflit. La variable m représente alors une mémoire institutionnelle, une pression fiscale accumulée, un stock de ressentiment, une cohésion symbolique, ou plus généralement un état lent de la structure historique.

Le premier modèle convient bien lorsque l'on veut représenter une fragilité institutionnelle ou une tension historique accumulée. Le second convient mieux lorsque l'on pense que l'histoire ne change pas seulement l'état du système, mais les règles mêmes de l'interaction entre groupes. On peut alors rendre compte de cycles historiques, de basculements de légitimité, de dégradation progressive d'un compromis politique, et de transitions entre régimes.

11. Applications en économie et en finance

En économie, on peut lire x et y comme deux forces opposées ou complémentaires : investissement productif et extraction rentière, offre et demande, confiance et défiance, production réelle et fragilité financière. La variable m peut représenter la liquidité, la confiance agrégée, le niveau d'endettement latent, une tension de marché, ou un climat macroéconomique.

En finance, un exemple éclairant consiste à lire x comme une pression acheteuse agrégée, y comme une pression vendeuse, et m comme un état latent du marché. Si m est alimenté par x + y, il représente plutôt l'intensité globale, la nervosité ou la volatilité endogène du marché. Si m est alimenté par x − y, il représente plutôt une mémoire du déséquilibre directionnel. Dans les deux cas, le modèle n'est pas un modèle microscopique du prix au tick près. C'est un modèle réduit de régime de marché, ce qui est très précieux en data science pour détecter les changements de régime, les états d'emballement, les périodes de tension et les transitions de structure.

12. Applications en surveillance et en machine industrielle

Le cadre de la surveillance est un autre domaine où ce type de modélisation devient particulièrement utile. Sur une machine industrielle, on peut définir x comme un niveau agrégé de fonctionnement utile, y comme une sollicitation parasite ou un dommage actif, et m comme une mémoire lente d'usure, de fatigue, d'encrassement ou de fragilité.

Ce type de modèle permet de distinguer un incident ponctuel d'une dérive structurelle. Une vibration brève n'est pas nécessairement grave. En revanche, une série de sollicitations modérées peut élever progressivement la variable m. Le système ne revient alors plus tout à fait à son régime nominal. Il perd de la résilience. La surveillance ne consiste plus seulement à comparer des mesures à des seuils. Elle consiste à suivre une dynamique et à repérer l'approche d'un changement de régime.

Le même raisonnement vaut en cybersurveillance. On peut définir x comme une activité légitime, y comme une activité suspecte, et m comme une tension d'exploitation accumulée. Là encore, m capture une mémoire du passé que les seuils instantanés voient mal.

13. Le lien avec les systèmes proies-prédateurs

Le cas proie-prédateur mérite une remarque particulière. Contrairement aux systèmes de compétition ou de coopération purs, un système proie-prédateur à deux variables possède déjà une tendance oscillante intrinsèque. Il n'a donc pas besoin du milieu pour faire apparaître une alternance qualitative. En revanche, le milieu transforme profondément cette alternance.

$$\frac{dx}{dt} = x(am - \beta y - \mu)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta x)$$

$$\frac{dm}{dt} = \varepsilon(r - m - cx)$$

Si l'on ajoute une ressource ou une qualité d'habitat comme variable lente, on passe d'une simple interaction entre proie et prédateur à une co-évolution entre populations et support écologique. Le milieu n'est plus un décor fixe. Il devient un acteur matériel de la dynamique. On obtient alors des régimes plus riches, des déphasages multi-échelles, des cycles lents et rapides, et une lecture beaucoup plus réaliste des changements de régime écologiques.

14. Hypothèses sous-jacentes

L'ensemble de cette construction repose sur quelques hypothèses importantes qu'il faut énoncer clairement. La première est l'idée qu'un système complexe peut souvent être ramené à un petit nombre de variables d'ordre ou de variables synthétiques. Les variables x, y et m ne prétendent pas restituer toute la richesse du réel. Elles portent seulement les mécanismes dominants.

La deuxième hypothèse est l'existence d'une séparation d'échelles, au moins partielle. Les variables d'interaction directe évoluent plus vite que le milieu, ou bien le milieu agrège leur histoire avec une inertie propre. Sans cette séparation d'échelles, le sens physique de m devient moins clair.

La troisième hypothèse est que les données permettent d'identifier des signatures de compétition, de coopération, de tension, de mémoire ou de changement de régime. Le modèle n'est pas une métaphore libre. Il doit être confronté à l'EDA, c'est-à-dire à l'exploration effective des données.

15. Pourquoi cette approche est utile en data science

Du point de vue de la data science, l'intérêt de cette approche est considérable. Elle fournit d'abord une grille de lecture pour l'EDA. Au lieu de regarder seulement des corrélations ou des nuages de points, on cherche des forces opposées, des variables lentes, des effets d'accumulation, des signatures de changement de régime, des oscillations, des retards ou des hystérésis.

Elle fournit ensuite un modèle réduit interprétable. Ce modèle peut être calibré, comparé aux données, utilisé pour la détection d'anomalies, la surveillance, la simulation de scénarios ou l'identification de points de bascule. Il ne remplace pas les approches de machine learning. Il leur donne une ossature. On peut même combiner les deux, en apprenant certaines fonctions de couplage tout en conservant la structure dynamique générale.

Conclusion

Le parcours suivi à partir des équations de Lotka-Volterra conduit donc à une idée générale très forte. Les systèmes de compétition, de coopération ou de proie-prédateur décrivent bien des interactions locales. Ils forment un langage de base, simple et puissant. Ils peuvent même être lus comme des systèmes discrets issus de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles, ce qui les relie à la physique continue et aux dynamiques spatiales.

Mais ce langage de base reste insuffisant pour saisir la richesse des systèmes complexes tant qu'il ne décrit que des interactions instantanées dans un cadre fixe. La véritable complexité apparaît lorsque les interactions transforment un milieu, et lorsque ce milieu transformé agit ensuite en retour sur les interactions. C'est cette boucle qui introduit la mémoire, le retard, la possibilité de cycles limites robustes, de bifurcations, de changements de régime, de fragilité accumulée et de structuration historique.

Deux grandes voies s'ouvrent alors. Soit le milieu est introduit comme une variable dynamique supplémentaire, ce qui donne une mémoire d'état. Soit il modifie directement les paramètres des équations, ce qui donne une mémoire de structure. La première voie est particulièrement naturelle pour les problèmes de fatigue, de surveillance, de ressources, de fragilité ou de tension latente. La seconde est particulièrement féconde pour la théorie des jeux, la cliodynamique, l'économie et, plus généralement, pour tous les systèmes où l'histoire transforme les règles mêmes de l'interaction.

Ainsi, le fil rouge de toute cette réflexion est moins l'équation particulière que l'architecture dynamique générale. Un système complexe n'est pas seulement un système où beaucoup d'acteurs interagissent. C'est un système où ces interactions fabriquent progressivement leur propre contexte, et où ce contexte devient à son tour un acteur de l'évolution.