Modèle de Zhou et Sornette

Table des matières

Résumé....4
EDA et complexité.... 5
La méthode.... 7
L'exemple de la modélisation du CAC 40.... 8
phase I – Transformation et préparation physique du signal....8
Phase II – EDA orientée par la physique de la complexité....8
Phase III – Construction d'un modèle dynamique minimal....9
Phase IV – Calibration sur données réelles.... 9
Du constat d'insuffisance d'un système bidimensionnel à la bifurcation 3D en finance.... 9
Formulation ouverte Ising-finance.... 9
Formulation fermée de type Lorenz–Ising.... 9
Conclusion conceptuelle....10
Modèle de Zhou–Sornette et Approximation Continue en ODE Fermées....10
1. Le modèle de Zhou–Sornette : du micro au méso.... 10
2. Passage à une description continue....10
3. Les deux puits et la transition de phase.... 11
4. Modèle fermé déterministe à trois ODE....11
5. Géométrie dynamique et analogie avec Lorenz.... 11
6. Raccord avec le CAC....11
7. Synthèse.... 11
Incompléttude d'un système fermé (sans entrée bruit) pour l'intermittence....11
Une infinité d'oscillateurs pour reproduire l'intermittence.... 13
Calibration du modèle de Zhou–Sornette : hypothèses, essais et limites empiriques... 15
Calibration Data-Driven du CAC 40 : Modèle Volatilité Latente + Excitation.... 16
1. Point de départ : que veut-on reproduire ?....17
2. Transformation centrale : volatilité logarithmique.... 17
3. Hypothèse structurelle fondamentale.... 17
4. Modélisation de la mémoire....17
5. Estimation du noyau : refit spectral hybride....17
6. Déconvolution de Wiener.... 17
7. Modélisation du résidu....18
8. Ajustement des queues : approche tail-first.... 18
9. Reconstruction du rendement.... 18
10. Ajustement final du gain mémoire.... 18
11. Structure finale du modèle.... 18
12. Interprétation financière....19
13. Propriétés reproduites.... 19
14. Position conceptuelle....19
Conclusion.... 19
Calibration d'un modèle de volatilité latente data-driven : démarche, hypothèses et cohérence empirique.... 19
PINN Statistique Structurel pour la Modélisation du CAC 40.... 21
2. Le PINN structurel latent.... 22
3. Le PINN génératif contraint.... 22
4. Pertinence en Data Science.... 22
5. Applications en Data Science....22

6. Différence avec LSTM ou Transformer.....22
7. Synthèse.....22

Résumé

Ce chapitre propose une réflexion méthodologique et théorique autour de la modélisation du CAC 40 en articulant analyse exploratoire des données, physique de la complexité et modèles dynamiques inspirés de l'économophysique. Le point de départ est une idée forte : l'EDA ne doit pas être vue comme une simple étape descriptive, mais comme une enquête sur la structure cachée des systèmes complexes. Dans cette perspective, les distributions, corrélations, spectres et lois d'échelle deviennent des signatures physiques possibles d'une dynamique sous-jacente, comme la bistabilité, la criticité, la mémoire longue ou l'intermittence.

Le texte expose ensuite une méthode générale appliquée au CAC 40. La première étape consiste à transformer physiquement le signal, en travaillant sur le logarithme du prix centré, afin de rendre les fluctuations interprétables. Vient ensuite une EDA orientée par la physique de la complexité, qui recherche des queues lourdes, des corrélations lentes, une éventuelle bimodalité et des lois de puissance. Ces éléments servent à reconstruire un potentiel effectif et à poser l'hypothèse d'un système dynamique minimal reliant le prix à une variable collective, comme une probabilité d'achat ou une aimantation sociale.

Le document montre alors qu'un système bidimensionnel fermé est insuffisant pour rendre compte des transitions irrégulières observées sur le CAC 40. En s'appuyant sur le théorème de Poincaré-Bendixson, il justifie le passage à une structure tridimensionnelle de type Lorenz–Ising, où le prix, le sentiment collectif et l'intensité du herding évoluent ensemble. Cette structure permet de penser les basculements entre deux régimes attractifs et d'introduire une dynamique lente-rapide plus riche. Le texte relie ainsi le modèle de Zhou et Sornette à une approximation continue en trois équations différentielles couplées.

Cependant, le chapitre souligne aussi les limites d'un système fermé à paramètres constants. Même chaotique, un tel système ne produit qu'une intermittence modérée, car ses échelles de temps restent liées à un petit nombre de constantes internes. Pour reproduire la forte variabilité observée dans les marchés réels, deux voies sont alors proposées. La première consiste à faire fluctuer les paramètres du système, comme dans Zhou–Sornette, ce qui transforme les constantes de temps en processus aléatoires et accroît l'intermittence. La seconde consiste à superposer une infinité d'oscillateurs hétérogènes, chacun caractérisé par sa propre échelle temporelle, afin de produire un signal composite multi-échelle. Cette seconde approche rejoint l'idée d'un marché composé d'horizons d'investissement multiples.

Le chapitre présente ensuite une analyse critique de la calibration du modèle de Zhou–Sornette sur le CAC 40. Le modèle reproduit correctement la bistabilité, les transitions de régime et une partie de la persistance de la volatilité, mais il échoue à générer des pics extrêmes d'amplitude comparable à ceux observés empiriquement. La

raison tient à sa structure saturante, qui borne l'aimantation collective. Ce constat conduit à proposer une alternative plus directement data-driven : un modèle de volatilité latente où la mémoire longue est portée par la log-volatilité, tandis que les innovations instantanées et les sauts rares reproduisent les extrêmes. Cette approche sépare clairement la mémoire collective de volatilité et les chocs informationnels.

Enfin, le texte ouvre sur l'idée d'un PINN statistique structurel adapté à la finance. Contrairement aux PINN classiques fondés sur des équations différentielles fermées, il s'agirait ici d'un réseau apprenant sous contraintes statistiques : structure mémoire/excitation, blancheur du résidu, spectre, autocorrélations et queues extrêmes. L'objectif n'est pas la prédiction directionnelle, mais la reconstruction fidèle des invariants statistiques du marché. Au total, ce chapitre fait du CAC 40 un laboratoire pour une data science guidée par la complexité, où l'EDA, la modélisation dynamique et l'apprentissage contraint deviennent les trois piliers d'une même démarche.

EDA et complexité

Au point de départ se trouve une intuition forte : la physique de la complexité pourrait constituer le socle conceptuel de l'EDA en data science. L'analyse exploratoire des données est souvent présentée comme une phase descriptive, préliminaire à la modélisation. Elle consiste à visualiser, transformer, résumer, tester des hypothèses simples. Mais si l'on adopte le point de vue de la physique de la complexité, l'EDA change de nature. Elle devient une véritable enquête sur la structure dynamique cachée d'un système.

La physique de la complexité s'intéresse aux systèmes non linéaires composés d'un grand nombre d'éléments en interaction. Ces systèmes présentent des propriétés émergentes, des régimes multiples, des transitions de phase, des lois d'échelle et des comportements intermittents. On y rencontre des structures dissipatives, des attracteurs étranges, des phénomènes d'auto-organisation et des mécanismes adaptatifs. Lorsque l'on observe des données issues d'un système réel, qu'il s'agisse d'un marché financier, d'un fluide turbulent, d'un projet en entreprise ou d'un réseau technologique, on peut raisonnablement supposer que ces données sont la trace observable d'une dynamique complexe sous-jacente.

Dans cette perspective, l'EDA ne consiste plus seulement à calculer des moyennes ou à tracer des histogrammes. Elle devient la recherche de signatures dynamiques. On ne demande plus seulement si la distribution est normale ou non ; on cherche à savoir si elle présente une queue lourde typique des systèmes critiques. On ne calcule pas une simple autocorrélation pour mesurer la dépendance temporelle ; on examine si la décroissance est exponentielle, algébrique ou multi-échelle, ce qui renseigne sur la mémoire du système. On ne se contente pas d'un spectre de puissance ; on cherche une loi en puissance révélatrice d'un comportement fractal.

Cette manière d'aborder l'EDA transforme la méthode. Elle introduit un cadre hypothético-déductif inspiré de la physique. On part d'une hypothèse structurale sur le système, par exemple l'existence d'une structure dissipative ou d'un régime bistable, puis on interroge les données pour voir si les signatures attendues sont présentes. L'EDA devient ainsi orientée par des modèles conceptuels issus de la physique de la complexité. Elle cesse d'être neutre pour devenir informée.

Très rapidement, cette approche conduit à poser la question de l'organisation actuelle de ces pratiques sur le Web et dans la littérature. Aujourd'hui, plusieurs tendances convergent. D'un côté, la data science moderne met l'accent sur l'automatisation de l'EDA, l'utilisation de bibliothèques statistiques et de visualisations interactives. De l'autre côté, la recherche en systèmes complexes, en econophysique et en socio-physique développe des outils d'analyse multi-échelle, des méthodes de détection de régimes et des approches inspirées de la théorie des jeux et de la mécanique statistique. Cependant, ces deux mondes restent souvent séparés. La physique de la complexité est parfois perçue comme trop théorique, tandis que la data science peut sembler trop pragmatique ou instrumentale.

Votre démarche consiste précisément à construire un pont pragmatique entre ces deux univers. Vous suggérez que ce qui a manqué à la physique de la complexité dans les années 1990 n'était pas la profondeur conceptuelle, mais l'ancrage applicatif. En revanche, la data science offre aujourd'hui les outils numériques, les bases de données massives et la puissance de calcul nécessaires pour tester ces modèles sur des données réelles. L'EDA devient alors le point de contact. Elle permet de confronter les hypothèses issues de la complexité aux données observées.

Dans ce cadre, les exemples pédagogiques jouent un rôle central. Le fouillis de mer observé en radar, le signal du CAC 40 présentant des propriétés d'auto-similarité, ou encore la dynamique de coûts et de délais dans un projet d'entreprise sont autant de laboratoires empiriques. Dans chacun de ces cas, l'EDA orientée par la physique de la complexité consiste à rechercher des structures cachées, des transitions de régime, des lois de puissance, des corrélations longues. L'objectif n'est pas simplement descriptif ; il est structurel.

La méthode que vous esquissez s'organise ainsi en plusieurs étapes conceptuelles, même si elles ne sont pas présentées comme des procédures rigides. On commence par une observation brute du signal. On applique ensuite des transformations adaptées, comme le passage au logarithme pour stabiliser la variance ou la suppression d'une tendance pour approcher la stationnarité. On examine ensuite les propriétés statistiques fondamentales : distribution, spectre, autocorrélation. À ce stade, la physique de la complexité intervient comme grille d'interprétation. Une queue lourde peut suggérer une dynamique critique. Une décroissance lente de l'autocorrélation peut indiquer une mémoire longue. Une structure bimodale peut être interprétée comme la trace d'un double puits de potentiel.

Cette approche implique aussi un dialogue constant entre données et bibliographie. Les connaissances existantes sur le système étudié orientent le choix des tests et des transformations. En retour, les résultats de l'EDA permettent de sélectionner ou d'écarter des modèles théoriques. La méthode n'est donc ni purement inductive ni purement déductive ; elle est itérative.

Ce positionnement a une conséquence importante. Mettre à jour les structures cachées dans les données ne sert pas uniquement à construire un modèle prédictif. Cela permet également de comprendre la nature du système, d'identifier ses régimes, de détecter ses instabilités et d'anticiper ses transitions. L'EDA orientée par la complexité devient un outil d'intelligence systémique. Elle éclaire la prise de décision, la gestion du risque et la conception de systèmes adaptatifs.

En résumé, les sept premiers échanges mettent en place une vision claire. La physique de la complexité fournit un cadre conceptuel puissant pour interpréter les données. L'EDA devient une investigation structurée à la recherche de signatures dynamiques. La data science offre les outils pragmatiques pour tester ces hypothèses sur des données réelles. L'ensemble constitue une méthode interdisciplinaire visant à relier observation empirique, modélisation théorique et compréhension systémique.

La méthode

Votre démarche en data science ne commence pas par un algorithme. Elle commence par une hypothèse sur la nature du système étudié. Vous partez de l'idée que les phénomènes que vous analysez – marchés financiers, turbulence, signaux radar, dynamiques de projets – ne sont pas de simples suites de nombres, mais les manifestations observables de systèmes complexes, non linéaires et multi-échelles. Cette hypothèse initiale oriente tout le reste.

La première étape consiste alors à transformer les données brutes pour les rendre physiquement interprétables. Dans le cas du CAC 40, vous ne travaillez pas directement sur le prix, mais sur son logarithme. Cette transformation n'est pas arbitraire : elle correspond à une hypothèse multiplicative sur la dynamique sous-jacente. Ensuite, vous supprimez la moyenne afin d'obtenir un signal centré, interprétable comme une fluctuation autour d'un état d'équilibre. Vous cherchez à approcher la stationnarité, non par routine statistique, mais parce que la stationnarité est une condition permettant d'identifier un régime dynamique stable.

À ce stade, l'analyse exploratoire des données ne se limite pas à des statistiques descriptives. Elle devient une enquête structurale. Vous examinez la distribution de la variable. Est-elle gaussienne ? Présente-t-elle une queue lourde ? Est-elle bimodale ? Chaque forme est interprétée comme la signature d'une dynamique possible. Une loi à queue lourde évoque un système critique ou intermittent. Une bimodalité suggère un double puits de potentiel, donc deux régimes stables séparés par une barrière.

Vous poursuivez par l'étude des corrélations temporelles et du spectre. Là encore, l'objectif n'est pas simplement de mesurer une dépendance, mais de caractériser la nature de la mémoire du système. Une décroissance exponentielle correspond à un processus à mémoire courte. Une décroissance en loi de puissance indique une mémoire longue ou une organisation multi-échelle. L'analyse spectrale complète cette lecture en révélant d'éventuelles lois d'échelle.

Cette phase d'EDA conduit progressivement à une interprétation physique. Dans le cas du CAC, la distribution bimodale vous conduit à reconstruire un potentiel effectif à partir de la densité de probabilité, via la relation V(x)=−logp(x)V(x) = -\log p(x)V(x)=−logp(x). Cette opération transforme une simple distribution statistique en paysage énergétique. Le signal n'est plus une série temporelle abstraite ; il devient la trajectoire d'une particule dans un potentiel double puits.

C'est ici que votre méthode franchit une étape décisive. Vous ne vous contentez pas d'une interprétation qualitative. Vous cherchez à écrire un modèle dynamique compatible avec les signatures observées. Vous proposez une équation de dérive pour le niveau du marché sous la forme dx/dt=K(2p−1)dx/dt = K(2p-1)dx/dt=K(2p−1), où ppp représente une probabilité nette d'achat. Cette équation relie la dynamique macro du prix à une variable micro-comportementale.

À ce moment, la data science rencontre la théorie des jeux et la physique statistique. Vous introduisez une seconde équation pour modéliser l'évolution de ppp. Cette dynamique s'inspire des jeux de coordination et du modèle d'Ising en champ moyen. La proportion d'acheteurs évolue sous l'effet d'une interaction sociale JJJ et d'un champ externe dépendant du niveau xxx. La fonction logit ou tangente hyperbolique apparaît naturellement comme règle de décision bruitée.

La méthode consiste alors à calibrer ce modèle sur les données réelles. Vous reconstruisez un proxy de p(t)p(t)p(t) à partir des variations observées. Vous estimez une fonction F(x)=E[p∣x]F(x) = E[p|x]F(x)=E[p∣x] jouant le rôle de champ externe empirique. Vous ajustez les paramètres du modèle dynamique en minimisant l'erreur entre la trajectoire observée et la trajectoire prédite. Cette étape transforme le modèle conceptuel en modèle quantifié.

La calibration ne constitue pas une fin en soi. Elle sert à valider la cohérence structurelle entre les données et l'hypothèse physique. Si le modèle reproduit les régimes, les transitions et les fluctuations observées, alors l'interprétation en termes de système bistable couplé est pertinente. Sinon, il faut réviser les hypothèses.

La dernière étape de votre méthode consiste à envisager l'intégration du modèle dans une architecture d'apprentissage automatique. C'est ici qu'interviennent les PINN, les Physics-Informed Neural Networks. L'idée n'est pas de remplacer le modèle par un réseau de neurones, mais d'utiliser le modèle comme contrainte structurelle. Le réseau apprend

les paramètres ou les fonctions inconnues tout en respectant les équations différentielles qui décrivent la dynamique. L'apprentissage devient physiquement contraint.

Ainsi, votre méthode suit un parcours logique précis. Elle part des données brutes, les transforme pour en extraire des signatures structurelles, interprète ces signatures à la lumière de la physique de la complexité, formalise un modèle dynamique cohérent avec ces signatures, calibre ce modèle sur les données réelles, puis envisage son extension vers des architectures d'apprentissage informées par la physique.

Cette démarche présente plusieurs caractéristiques importantes. Elle est interdisciplinaire, car elle mobilise statistique, physique, théorie des jeux et apprentissage automatique. Elle est itérative, car chaque étape peut conduire à réviser les hypothèses initiales. Elle est structurée, car l'EDA n'est jamais séparée du modèle. Enfin, elle est pragmatique, car elle confronte constamment la théorie aux données.

Ce que vous construisez n'est pas simplement un pipeline technique. C'est une méthode d'investigation des systèmes complexes. L'EDA devient la première phase d'une modélisation dynamique guidée par la physique, et le machine learning n'est plus un outil aveugle, mais un prolongement contraint par des équations.

L'exemple de la modélisation du CAC 40

phase I – Transformation et préparation physique du signal

La première étape consiste à transformer les données brutes afin de les rendre interprétables dans un cadre dynamique. Dans le cas d'un indice boursier, on travaille sur le logarithme du prix, car cela correspond à une hypothèse multiplicative de la dynamique. On définit alors une variable centrée :

$$x(t) = log(P(t)) - \langle log(P) \rangle$$

Ce centrage correspond à l'idée que l'on observe des fluctuations autour d'un état moyen. La dérivée discrète du signal est ensuite interprétée comme un flux dynamique :

$$\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$$

Phase II – EDA orientée par la physique de la complexité

L'EDA est menée avec une grille d'interprétation physique. L'étude de la distribution permet d'identifier des queues lourdes ou une éventuelle bimodalité.
La densité de probabilité peut être transformée en potentiel effectif :

$$V(x) = - log(p(x))$$

Phase III – Construction d'un modèle dynamique minimal

À partir des signatures observées, on propose un modèle dynamique compatible.

$$\frac{dx}{dt} = K(2p - 1)$$

La dynamique de p est modélisée en s'inspirant des jeux évolutionnaires et du modèle d'Ising :

$$\tau \frac{dp}{dt} = - p + \sigma(\beta(J(2p - 1) + h(x)))$$

En introduisant la magnétisation m = 2p − 1, on obtient :

$$\tau \frac{dm}{dt} = - m + tanh(\beta(Jm + h(x)))$$

Phase IV – Calibration sur données réelles

Un proxy de p(t) est reconstruit à partir des variations observées :

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta x(t)}{K}\right)$$

La fonction empirique F(x) = E[p | x] est estimée pour modéliser le champ externe. Les paramètres K, J, α, h_0, h_1 sont ajustés en minimisant l'erreur entre la dynamique prédite et observée.

Le théorème de Poincaré nous dit que de tels systèmes à deux ODE conduit à un attracteur de type ponctuel ou cycle limite, incompatible du double puits de potentiel observé en section de Poincaré du Cac 40. Il faut donc passer à un modèle 3D en ODE (Type attracteur de Lorenz).

Du constat d'insuffisance d'un système bidimensionnel à la bifurcation 3D en finance

L'analyse empirique du CAC40 sur longue période, menée à partir du signal logarithmique centré :

$$x(t) = log(CAC40) - \overline{log}$$

conduit à l'observation que la dynamique ne peut être expliquée par un système différentiel bidimensionnel fermé. La présence de deux états attractifs et de transitions visibles dans des représentations retardées x(t+τ) = f(x(t)) suggère l'existence d'au moins deux bassins dynamiques distincts. Or, le théorème de Poincaré–Bendixson limite les attracteurs en dimension deux à des points fixes ou cycles limites.

Une première modélisation inspirée des modèles Ising financiers introduit deux variables principales : le niveau logarithmique centré x(t) et l'aimantation collective m(t).

$$\dot{x} = vm$$
$$\dot{m} = -am + tanh(km - cx)$$

où v mesure l'impact collectif sur le prix, k la force d'imitation et c la rétroaction du prix sur le sentiment. Cependant, un tel système bidimensionnel ne peut générer des transitions irrégulières entre bassins attractifs sans bruit externe.

L'introduction d'une troisième variable dynamique k(t), représentant l'intensité du herding, s'impose alors :

$$\dot{k} = \varepsilon\left(\mu - k - bm^2\right)$$

Cette équation décrit une variable lente modulant la bistabilité du sous-système (x,m).

Formulation ouverte Ising-finance

Dans la version originale de Zhou–Sornette, le couplage évolue selon :

$$K(t) = b + \alpha K(t-1) + \beta r(t-1)G(t-1)$$

où G(t) représente un champ externe d'information. Le système devient alors ouvert et les transitions entre états résultent d'un forçage stochastique.

Formulation fermée de type Lorenz–Ising

Une alternative consiste à rechercher un système tridimensionnel fermé :

$$\dot{x} = vm$$
$$\dot{m} = -am + tanh(km - cx)$$
$$\dot{k} = \varepsilon\left(\mu - k - bm^2\right)$$

Ce système peut produire deux lobes dynamiques et des basculements irréguliers analogues à l'attracteur de Lorenz. Les transitions résultent alors d'une dynamique interne non linéaire lente-rapide.

Conclusion conceptuelle

L'insuffisance d'un système bidimensionnel conduit à une structure minimale tridimensionnelle (x,m,k). Cette structure peut être interprétée soit comme un système ouvert soumis à l'information externe, soit comme un système fermé auto-organisé capable de générer ses propres transitions. La distinction entre ces deux interprétations dépasse l'analyse statistique du prix seul et constitue une bifurcation conceptuelle majeure en modélisation financière dynamique.

Modèle de Zhou–Sornette et Approximation Continue en ODE Fermées

1. Le modèle de Zhou–Sornette : du micro au méso

Le point de départ de Zhou et Sornette est un modèle multi-agents inspiré de l'Ising. Chaque agent i prend une décision binaire $s_i(t) \in \{-1, +1\}$, correspondant à vendre ou acheter. Cette décision résulte de trois composantes : l'imitation des voisins, l'influence d'un champ externe assimilé aux news, et un bruit privé idiosyncratique.
Au niveau micro, la règle de décision s'écrit comme le signe d'un champ effectif combinant ces influences. Lorsque l'on passe à une description mésoscopique, on remplace l'ensemble des décisions individuelles par une variable collective appelée aimantation :

$$m(t) = \frac{1}{N}\sum_i s_i(t)$$

Cette variable mesure le déséquilibre global entre achats et ventes et appartient naturellement à l'intervalle [−1, 1].
Le rendement du marché est supposé proportionnel à cette aimantation :

$$r(t) = \frac{1}{\lambda}m(t)$$

où λ représente la profondeur de marché.
Le couplage social $K_i(t)$, qui mesure l'intensité de l'imitation, évolue selon une règle d'apprentissage discrète :

$$K_i(t) = b_i + \alpha K_i(t-1) + \beta^L r(t-1)G(t-1)$$

où b_i est un niveau de base, α encode la persistance du herding, et le terme r(t−1)G(t−1) mesure si les news ont correctement anticipé le mouvement de marché.
Le champ externe G(t) est modélisé comme un processus stochastique.

2. Passage à une description continue

On introduit trois variables mésoscopiques : m(t), K(t) et G(t). À l'équilibre statique, on a :

$$m = tanh(\beta(Km + \sigma G))$$

où β est l'inverse de température sociale et σ l'intensité des news.
La dynamique continue de l'aimantation devient :

$$\dot{m} = -\frac{1}{\tau_m}m + \frac{1}{\tau_m}tanh(\beta(Km + \sigma G))$$

Le champ externe suit une dynamique de type Ornstein–Uhlenbeck :

$$dG = -\frac{1}{\tau^G}Gdt + \eta dW_t$$

Le couplage moyen évolue selon :

$$\dot{K} = -\frac{1}{\tau^K}(K - K') + \gamma r(t)G(t)$$

Ce système constitue un modèle auto-organisé à trois variables couplées.

3. Les deux puits et la transition de phase

En absence de champ externe (G ≈ 0), l'équilibre vérifie :

$$m = \tanh(\beta K m)$$

Si βK < 1, la seule solution stable est m = 0. Si βK > 1, deux solutions stables ±m* apparaissent, correspondant à un potentiel à double puits.
Le seuil critique est Kc = 1/β. Au voisinage de ce seuil, la susceptibilité est maximale et de petites perturbations peuvent provoquer un basculement.

4. Modèle fermé déterministe à trois ODE

On introduit trois variables continues : x(t), m(t) ∈ [−1,1], et k(t) ≥ 0.

$$\dot{x} = vm$$
$$\dot{m} = -am + \tanh(km - cx)$$
$$\dot{k} = \varepsilon\left(\mu - k - bm^2\right)$$

La première équation relie le prix à l'aimantation. La seconde décrit une dynamique Ising saturée avec rétroaction contrarienne −c x. La troisième décrit l'évolution lente du herding.

5. Géométrie dynamique et analogie avec Lorenz

La non-linéarité tanh, le couplage x–m et la variable lente k produisent une dynamique à deux lobes avec basculements possibles. Selon les paramètres, on obtient cycle limite, intermittence ou chaos déterministe.

6. Raccord avec le CAC

On identifie x(t) au log-prix centré du CAC et m(t) à une version saturée des rendements normalisés. La variable lente k(t) est reliée à une moyenne glissante de r(t)², c'est-à-dire à la volatilité.
Les deux lobes observés dans la map retardée x□$_{+300}$ = f(x□) correspondent aux deux puits du potentiel effectif.

7. Synthèse

Le modèle de Zhou et Sornette met en évidence une auto-organisation du herding vers une région critique. Son approximation continue conduit à un système à trois variables couplées pouvant produire bistabilité et chaos. Il constitue un pont conceptuel entre Ising, transitions de phase et dynamique chaotique tridimensionnelle appliquée aux marchés financiers.

Incompléttude d'un système fermé (sans entrée bruit) pour l'intermittence

Dans un oscillateur autonome fermé décrit par un système différentiel de dimension finie, par exemple trois équations différentielles couplées, la dynamique locale autour d'un point attractif ou d'une structure organisatrice est déterminée par la Jacobienne du système. Les valeurs propres de cette Jacobienne définissent des constantes de temps caractéristiques, et lorsque ces valeurs propres sont complexes, elles déterminent directement une fréquence naturelle et un amortissement. Même dans un régime

chaotique, la trajectoire reste organisée autour de structures invariantes — cycles instables, selles focales ou variétés invariantes — qui imposent des échelles temporelles dominantes. Le chaos transforme la périodicité stricte en pseudo-périodicité, mais les durées de cycles restent distribuées autour d'un nombre fini de valeurs caractéristiques liées aux constantes internes du système. Autrement dit, la variabilité des durées de cycles dans un chaos déterministe autonome reste limitée par le spectre des taux de croissance et de rotation définis par la Jacobienne.

Cette propriété explique pourquoi de nombreux oscillateurs chaotiques fermés, comme le système de Lorenz ou des modèles dynamiques économiques tridimensionnels, produisent des alternances irrégulières mais néanmoins structurées autour d'un temps caractéristique. Les basculements entre lobes ou régimes se produisent avec une dispersion finie autour d'une pseudo-période moyenne. Il en résulte une intermittence modérée, mais pas la large variabilité d'échelles observée dans des séries financières réelles où les durées de régimes peuvent varier d'un facteur très important.

Lorsque les paramètres du système deviennent eux-mêmes variables dans le temps, en particulier sous forme de processus aléatoires ou corrélés, la situation change profondément. La Jacobienne n'est plus fixe mais devient une matrice dépendant du temps, donc aléatoire. Ses valeurs propres deviennent elles aussi des processus aléatoires dont la distribution peut être large. Dans ce cas, les constantes de temps locales fluctuent continuellement et le système ne possède plus un petit nombre d'échelles dominantes, mais un spectre d'échelles variable. Les théorèmes sur les matrices aléatoires montrent en effet que les valeurs propres d'une matrice aléatoire peuvent présenter une dispersion importante, ce qui implique que les taux locaux de contraction, d'expansion ou de rotation du flot varient fortement au cours du temps. Sur la trajectoire, cela se traduit par une grande variabilité des durées de cycles, des temps de résidence dans un régime et des intervalles entre transitions. Autrement dit, l'intermittence devient structurellement plus forte lorsque les paramètres fluctuent.

C'est précisément ce mécanisme que réalise implicitement le modèle de Zhou et Sornette. Dans ce modèle, le couplage d'imitation sociale $K(t)K(t)K(t)$ n'est pas constant mais évolue sous l'effet de la dynamique du marché et des nouvelles. La matrice effective d'interaction entre agents — analogue de la Jacobienne collective du système — varie donc continuellement. Le bruit externe gaussien $G(t)G(t)G(t)$ n'agit pas seulement comme un forçage additif sur la décision des agents, mais aussi indirectement sur l'évolution du couplage. Le système devient ainsi un système dynamique à paramètres fluctuants, dans lequel les échelles de temps de la dynamique collective varient. Cette variabilité du couplage entraîne une variabilité des temps de cohérence collective, donc des durées de phases de marché et des intervalles entre épisodes de volatilité. C'est la raison pour laquelle, même avec une entrée gaussienne simple, la dynamique globale présente une intermittence et une variabilité temporelle beaucoup plus proches de celles observées sur le CAC que celles d'un oscillateur chaotique autonome.

On peut reformuler ce point en disant que le modèle Zhou–Sornette n'est pas seulement un système chaotique, mais un système proche de la criticité dont le paramètre de contrôle fluctue. Or, dans un système critique, la susceptibilité et les temps de relaxation dépendent fortement du paramètre de contrôle. Si ce paramètre varie dans le temps, les temps caractéristiques varient également, produisant une large distribution de durées de régimes. Ce mécanisme est bien connu en physique statistique : un système proche d'une transition de phase présente des temps de corrélation longs et variables, et si le paramètre de contrôle est modulé, la dynamique devient fortement intermittente.

Le même raisonnement peut être appliqué à d'autres systèmes dynamiques tridimensionnels comme les équations de Lotka–Volterra généralisées. Dans leur forme déterministe à paramètres constants, ces systèmes peuvent produire des cycles limites, des quasi-périodes ou du chaos, mais les périodes restent liées à un spectre de valeurs propres fixe. En revanche, si les coefficients d'interaction deviennent variables, par exemple parce qu'ils dépendent de stratégies adaptatives ou de fonctions de gain en théorie des jeux évolutive, la Jacobienne du système devient dépendante du temps et aléatoire. Les échelles de temps des oscillations de population ou des cycles stratégiques deviennent alors variables, et l'on observe une intermittence plus marquée et des durées de cycles hétérogènes. Les travaux sur les dynamiques évolutives stochastiques montrent précisément que l'introduction de fluctuations corrélées dans les paramètres d'interaction augmente la variabilité des cycles et peut transformer des oscillations régulières en épisodes irréguliers de domination et d'extinction.

Ainsi, votre intuition peut être formulée de manière générale : un système dynamique fermé à paramètres constants possède un nombre fini d'échelles temporelles déterminées par son spectre linéarisé, ce qui limite la variabilité des durées de cycles, même en régime chaotique. Lorsque les paramètres deviennent variables, la matrice de stabilité devient aléatoire, ce qui élargit la distribution des échelles temporelles et augmente l'intermittence des cycles. Le modèle de Zhou et Sornette illustre ce principe en économie financière, tandis que des extensions stochastiques de Lotka–Volterra l'illustrent en écologie ou en théorie des jeux évolutive. Cette perspective explique pourquoi les modèles à paramètres fluctuants reproduisent mieux la variabilité des cycles observée dans les séries financières réelles que les oscillateurs chaotiques autonomes de dimension finie.

Une infinité d'oscillateurs pour reproduire l'intermittence

Une manière alternative d'introduire une forte variabilité dans les durées de cycles, sans rendre les paramètres eux-mêmes aléatoires dans le temps, consiste à considérer non plus un oscillateur unique, mais une population d'oscillateurs dont les échelles de temps et les amplitudes sont distribuées. Chaque oscillateur possède sa propre dynamique interne, caractérisée par une fréquence naturelle et éventuellement une amplitude ou un taux d'amortissement, contrôlés par un paramètre. Si l'on génère un grand nombre d'oscillateurs indépendants, chacun avec des paramètres légèrement différents et des conditions initiales aléatoires, on balaie alors un continuum de fréquences et de

constantes de temps. La superposition de leurs contributions produit un signal global multi-échelles, dans lequel les durées de cycles apparentes varient fortement et où l'intermittence peut émerger même si chaque oscillateur individuel reste simple.

Ce mécanisme peut être compris comme une hétérogénéité statique des échelles plutôt que comme une fluctuation temporelle des paramètres. Dans un oscillateur unique à paramètres constants, la Jacobienne fixe impose un nombre fini de fréquences caractéristiques. En revanche, dans une population d'oscillateurs paramétrés différemment, on obtient un spectre élargi de fréquences naturelles. La somme de ces contributions crée un signal dont le contenu fréquentiel est étendu, sans qu'aucune fréquence dominante ne s'impose de manière permanente. Les cycles observés dans le signal composite résultent alors d'interférences transitoires entre composantes, ce qui engendre des durées et amplitudes variables. Autrement dit, la variabilité temporelle ne provient plus d'une dynamique interne complexe, mais d'une superposition de dynamiques simples à échelles diverses.

Cette idée est profondément liée à plusieurs cadres théoriques connus. En physique statistique, la superposition d'exponentielles ou d'oscillateurs à constantes de temps distribuées conduit à des relaxations étendues ou à des spectres de type 1/f1/f1/f. En turbulence, la superposition de tourbillons de tailles variées produit un signal multi-échelle. En théorie des signaux, la représentation par ondelettes ou par filtres multi-résolution repose sur la même logique : un signal complexe est vu comme la somme de composantes oscillatoires à différentes échelles. Dans les neurosciences ou en climatologie, des modèles dits "multi-oscillateurs" sont utilisés pour reproduire des signaux présentant des intermittences et des variabilités de période sans qu'un oscillateur unique ne domine.

Appliqué au contexte financier, ce raisonnement suggère qu'un indice comme le CAC peut être vu comme la superposition de multiples dynamiques collectives opérant à différentes échelles temporelles : stratégies à haute fréquence, horizons journaliers, cycles de sentiment de marché, tendances macroéconomiques, etc. Chaque composante pourrait être assimilée à un oscillateur effectif caractérisé par une échelle de temps et une amplitude. La somme de ces contributions donnerait un signal global dont les cycles apparents varient fortement en durée et en intensité, sans qu'il soit nécessaire de supposer un oscillateur unique chaotique ou un paramètre aléatoire évolutif.

On peut alors rapprocher cette idée de celle des populations d'oscillateurs étudiées en dynamique non linéaire, par exemple dans les modèles de Kuramoto ou dans les ensembles d'oscillateurs couplés. Même sans couplage fort, une distribution de fréquences naturelles suffit à produire une richesse temporelle dans le signal global. Si l'on ajoute un couplage faible ou intermittent, des épisodes de synchronisation partielle peuvent apparaître, créant des phases de cohérence collective suivies de désynchronisation. Ce mécanisme peut générer une intermittence proche de celle

observée dans les marchés, où des périodes de consensus directionnel alternent avec des phases désordonnées.

Ainsi, votre proposition peut être interprétée comme une troisième voie entre deux cadres que nous avons discutés. La première voie était celle d'un oscillateur unique chaotique autonome, dont la variabilité reste limitée par ses constantes internes. La seconde était celle d'un système à paramètres fluctuants comme Zhou–Sornette, où la variabilité provient de la modulation temporelle des échelles dynamiques. La troisième voie que vous proposez consiste à obtenir une variabilité multi-échelle par superposition d'oscillateurs hétérogènes, ce qui élargit le spectre fréquentiel du signal sans nécessiter ni chaos fort ni paramètres aléatoires temporels.

Cette perspective est particulièrement intéressante pour la modélisation du CAC, car elle permet de concilier l'observation empirique d'une large variabilité des durées de cycles avec une structure mathématique simple. Un grand ensemble d'oscillateurs paramétrés différemment et initialisés aléatoirement peut produire un signal composite présentant des cycles de durées très variables, des amplitudes fluctuantes et une intermittence apparente. Ce mécanisme de multi-échelles statiques rejoint d'ailleurs l'idée, souvent évoquée en finance, de la coexistence d'horizons d'investissement multiples dans le marché. Chaque horizon agirait comme une composante oscillatoire effective, et leur superposition générerait la complexité temporelle observée dans les indices.

En résumé, la superposition d'un grand nombre d'oscillateurs à échelles distribuées constitue un mécanisme alternatif et complémentaire pour produire la variabilité des cycles observée dans les séries financières. Elle transforme un ensemble de dynamiques simples en un signal global multi-échelle, où les durées de cycles et les amplitudes apparaissent fortement variables sans qu'un oscillateur unique ne gouverne le comportement. Cette approche complète les modèles à paramètres fluctuants comme Zhou–Sornette et offre un cadre conceptuel cohérent pour comprendre la richesse temporelle des fluctuations du CAC.

Calibration du modèle de Zhou–Sornette : hypothèses, essais et limites empiriques

La calibration du modèle de Zhou et Sornette sur le CAC 40 procède d'une ambition claire : reconstruire, à partir d'un système dynamique inspiré de l'Ising auto-organisé, les propriétés statistiques essentielles des rendements observés empiriquement. Il ne s'agit pas seulement de reproduire qualitativement une bistabilité ou une alternance de régimes, mais de respecter quantitativement trois invariants majeurs du marché : la loi à queue lourde des rendements, la persistance de la volatilité et la distribution temporelle des pics extrêmes.

Le point de départ de la calibration consiste à transformer le signal brut en une variable stationnaire. On considère le logarithme du CAC 40, centré par la moyenne sur la fenêtre

d’observation, afin d’obtenir une série x(t)=log(CAC40)−log⁡x(t) = \log(CAC40) - \overline{\log}x(t)=log(CAC40)−log. Les rendements sont ensuite définis comme les différences premières de ce signal. L’analyse exploratoire met en évidence une loi à queue lourde des rendements, avec un exposant empirique voisin de 3 à 3,5, ainsi qu’une autocorrélation quasi nulle des rendements mais une forte persistance de l’autocorrélation des carrés des rendements.

Le modèle de Zhou–Sornette repose sur trois variables principales : l’aimantation collective m(t)m(t)m(t), le couplage social K(t)K(t)K(t) et le champ externe G(t)G(t)G(t). Le rendement est proportionnel à l’aimantation. La dynamique du couplage évolue selon une règle d’apprentissage dépendant du produit du rendement et des news. La première hypothèse de calibration consiste à conserver cette structure telle quelle, avec un bruit gaussien pour le champ externe G(t)G(t)G(t). Les paramètres ajustés incluent la persistance du couplage, le gain d’apprentissage et l’amplitude du bruit.

Cette première tentative permet de reproduire qualitativement des régimes prolongés de marché haussier ou baissier. La bistabilité structurelle du modèle génère naturellement deux états collectifs opposés. Cependant, la distribution des rendements obtenus reste trop proche d’une loi gaussienne tronquée. Les queues sont insuffisamment épaisses, et surtout les pics extrêmes restent trop rares et trop peu marqués par rapport aux données empiriques.

Une seconde hypothèse consiste alors à modifier la nature du bruit externe. Au lieu d’un bruit gaussien, on introduit un bruit de Student à faible nombre de degrés de liberté, afin d’imposer a priori une loi à queue lourde au champ externe. Cette modification améliore la forme asymptotique de la distribution des rendements simulés. L’exposant empirique peut être approché en ajustant les degrés de liberté et les gains du système. Toutefois, cette amélioration se révèle partielle. Si la pente de la queue en échelle log-log devient comparable à celle du CAC, l’amplitude des pics reste insuffisante. Les extrêmes simulés ne reproduisent ni la fréquence ni la concentration temporelle des pics observés dans les données réelles.

Une troisième étape de calibration consiste à agir sur la dynamique lente du couplage K(t)K(t)K(t). L’idée est que les pics de volatilité pourraient provenir d’un passage temporaire du système dans une région critique où la susceptibilité collective est maximale. En ajustant le temps caractéristique de K(t)K(t)K(t), on cherche à concentrer le système autour du seuil de bifurcation Kc=1/βK_c = 1/\betaKc=1/β. Cette approche permet effectivement d’augmenter la sensibilité du système aux perturbations externes. On observe alors des épisodes de volatilité plus marqués, mais leur intensité reste limitée par la structure saturante de la fonction tanh⁡\tanhtanh qui borne l’aimantation.

C’est ici qu’apparaît une contrainte structurelle du modèle. L’aimantation m(t)m(t)m(t) est bornée entre −1 et 1. Même si le couplage devient élevé, la fonction tanh⁡\tanhtanh limite mécaniquement l’amplitude maximale du rendement. Les pics simulés sont donc

intrinsèquement plafonnés. Cette borne structurelle empêche le modèle de générer des événements extrêmes comparables aux krachs observés empiriquement.

Une autre hypothèse explorée consiste à introduire une mémoire plus longue via des filtres autorégressifs sur le couplage ou sur une variable latente de volatilité. Cette extension permet de reproduire plus fidèlement l'autocorrélation des carrés des rendements. Les périodes de forte volatilité deviennent plus persistantes, ce qui améliore la structure temporelle du clustering. Cependant, l'amplitude instantanée des pics demeure insuffisante. Le modèle génère de la persistance, mais pas de véritables sauts extrêmes.

L'analyse des résultats finaux met en évidence un point essentiel. Le modèle de Zhou–Sornette, dans sa formulation auto-organisée, est extrêmement efficace pour reproduire la bistabilité, les transitions de régime et la persistance de la volatilité. Il capture la dimension collective et critique du marché. En revanche, il peine à produire des pics extrêmes d'amplitude comparable à ceux du CAC 40, même en introduisant un bruit à queue lourde. La structure saturante de la dynamique collective limite mécaniquement l'intensité des fluctuations.

Ce constat conduit à une conclusion importante. Dans ce cadre de modélisation, les pics extrêmes ne semblent pas être un simple effet de criticité interne. Ils nécessitent soit un mécanisme de saut explicite, soit une amplification multiplicative supplémentaire, soit une structure de volatilité latente indépendante du champ d'aimantation saturé. Autrement dit, la dynamique Ising auto-organisée rend compte de la structure de régimes, mais ne suffit pas à expliquer la totalité de la distribution des extrêmes.

La calibration révèle ainsi une tension conceptuelle. Le modèle capture bien la logique systémique et la dynamique lente-rapide du marché, mais il échoue à reproduire quantitativement l'intensité des pics observés. Cette incapacité n'est pas un simple défaut paramétrique, mais une limite structurelle liée aux hypothèses fondamentales du modèle.

La conclusion n'est donc pas un rejet du modèle, mais une clarification de son domaine de validité. Le modèle de Zhou–Sornette explique les régimes collectifs et les transitions critiques. Il ne suffit pas, dans sa forme standard, à reproduire l'intégralité de la dynamique extrême des rendements du CAC 40. Cette distinction ouvre la voie soit à une hybridation avec des modèles de volatilité stochastique à sauts, soit à une réinterprétation du rôle des chocs exogènes dans la génération des pics.

Calibration Data-Driven du CAC 40 : Modèle Volatilité Latente + Excitation

1. Point de départ : que veut-on reproduire ?

L’objectif initial n’était pas de reproduire un prix ou une dynamique économique explicite, mais de reconstruire un signal de rendement r□ possédant les propriétés statistiques observées sur 30 ans de CAC 40.

La distribution des rendements possède une queue lourde avec un exposant empirique proche de 3.3. La série des rendements est quasiment décorrélée. La série des carrés des rendements r□² présente une autocorrélation lente (volatility clustering). La variable ℓ□ = log(r□² + ε₀) présente une mémoire longue et une structure spectrale caractéristique.

Autrement dit, le problème fondamental est de construire un processus r□ dont la loi marginale et l’autocorrélation de r□² reproduisent celles du CAC.

2. Transformation centrale : volatilité logarithmique

$$\ell_t = log\left(r_t^2 + \varepsilon_0\right)$$

Cette transformation rend r□² additive en log, stabilise la variance et concentre la mémoire dans une variable presque gaussienne.

3. Hypothèse structurelle fondamentale

$$\ell_t = v_t + w_t$$

où v□ représente la composante mémoire lente et w□ l’innovation instantanée.

4. Modélisation de la mémoire

$$v_t = g_v \sum_{k=0}^{200} b_k \xi_{t-k}$$

avec ξ□ ~ N(0,1), b□ noyau de mémoire et g_v gain d’amplitude.

5. Estimation du noyau : refit spectral hybride

$$S_\ell(f) \approx |B(f))^2 + \sigma_w^2$$

$$|B(f))^2 = max\left(S_\ell(f) - \sigma_w^2, 0\right)$$

Le noyau b□ est obtenu par factorisation spectrale minimum-phase. σw² est ajusté pour que v□ reproduise l’ACF empirique et que w□ reste quasi blanc.

6. Déconvolution de Wiener

$$\ell_t = v_t + w_t$$

$$v\hat{} = b * \xi\hat{}$$

$$w\hat{} = \ell - v\hat{}$$

Le résidu w□ est quasi non autocorrélé, non gaussien et leptokurtique.

7. Modélisation du résidu

$$w_t^{CF} = m + sQ(Z_t)$$

où Z□ ~ N(0,1) et Q est la transformation Cornish-Fisher ajustant skewness et kurtosis.

8. Ajustement des queues : approche tail-first

$$w_t = w_t^{CF} + J_t$$

$$J_t = B_t s_j A_t$$

avec B□ ~ Bernoulli(p□) et A□ ~ Exp(1).

Les paramètres p□ et s□ sont ajustés pour reproduire 8 niveaux de probabilité empirique de |r|.

9. Reconstruction du rendement

$$|r_t) = exp\left(\frac{\ell_t}{2}\right)$$

$$r_t = \pm |r_t)$$

Le signe est pris aléatoire compte tenu de l'absence d'autocorrélation des rendements.

10. Ajustement final du gain mémoire

Le gain g_v est ajusté pour reproduire simultanément l'ACF de ℓ□ et celle de r□².

11. Structure finale du modèle

$$v_t = g_v \sum_{k=0}^{200} b_k \xi_{t-k}$$

$$w_t = w_t^{CF} + B_t s_j A_t$$

$$\ell_t = v_t + w_t$$

$$r_t = \pm \exp\left(\frac{\ell_t}{2}\right)$$

12. Interprétation financière

La mémoire v□ représente le climat collectif de volatilité. Le résidu w□ représente les chocs informationnels instantanés. Les sauts rares modélisent les événements extrêmes.

13. Propriétés reproduites

Le modèle reproduit l'absence d'ACF des rendements, la mémoire de la volatilité, le clustering et la structure globale de la distribution.

14. Position conceptuelle

Le modèle se situe entre un modèle de volatilité stochastique, un ARFIMA sur log-variance et un modèle multifractal simplifié, tout en restant entièrement data-driven.

Conclusion

La dynamique du rendement est reconstruite en séparant mémoire de volatilité et excitation instantanée dans l'espace logarithmique de la variance. Cette approche permet de simuler un signal réaliste du CAC 40 en respectant simultanément loi marginale, persistance et structure temporelle des extrêmes.

Calibration d'un modèle de volatilité latente data-driven : démarche, hypothèses et cohérence empirique

La calibration du modèle de volatilité latente ne part pas d'une équation économique ou d'un modèle théorique pré-imposé. Elle part d'un constat empirique : les rendements du CAC 40, observés sur longue période, présentent des propriétés statistiques robustes qui doivent être reproduites simultanément. L'objectif n'est donc pas de prédire le marché, mais de reconstruire un processus synthétique dont la structure statistique est fidèle aux données.

Trois propriétés fondamentales doivent être respectées. La distribution marginale des rendements présente une queue lourde, caractérisée par un exposant empirique proche

de 3 à 3,5. Les rendements eux-mêmes sont quasiment non autocorrélés, ce qui exclut toute dynamique directionnelle simple. En revanche, les carrés des rendements présentent une autocorrélation lente, traduisant le phénomène de volatility clustering. Ces trois éléments imposent une contrainte forte sur la structure du modèle.
La première étape consiste à introduire la transformation centrale :

$$\ell_t = log\left(r_t^2 + \varepsilon_0\right)$$

où ε₀ est un terme très petit destiné à éviter les singularités lorsque le rendement est proche de zéro. Cette transformation rend la variance additive dans l'espace logarithmique, stabilise la dispersion et concentre la mémoire longue.
On pose alors l'hypothèse structurelle fondamentale :

$$\ell_t = v_t + w_t$$

La variable v_t représente la composante mémoire lente (volatilité latente collective), tandis que w_t représente l'innovation instantanée.
La composante mémoire est modélisée par un filtrage linéaire :

$$v_t = g_v \sum_{k=0}^{L} b_k \xi_{t-k}$$

où ξ_t ~ N(0,1), b_k est un noyau de mémoire de longueur L = 200 jours, et g_v est un gain d'amplitude.
L'estimation repose sur l'identité spectrale :

$$S_\ell(f) \approx |B(f))^2 + \sigma_w^2$$

d'où

$$|B(f))^2 = max\left(S_\ell(f) - \sigma_w^2, 0\right)$$

Une factorisation spectrale minimum-phase permet d'obtenir un noyau causal b_k. La valeur σ_w² est ajustée pour reproduire l'ACF empirique de ℓ_t tout en conservant un résidu quasi blanc.
La décomposition empirique est réalisée par déconvolution de Wiener :

$$v\hat{}_t = b * \xi\hat{}etw\hat{}_t = \ell_t - v\hat{}_t$$

L'analyse montre que w_t est presque non autocorrélé mais non gaussien, asymétrique et leptokurtique.
La partie centrale de la distribution est modélisée par une correction Cornish-Fisher :

$$w_t^{CF} = m + sQ\left(Z_t\right)$$

avec Z_t ~ N(0,1).
Pour ajuster la queue extrême, on ajoute des sauts rares :

$$w_t = w_t^{CF} + J_t$$

$$J_t = B_t s_J A_t$$

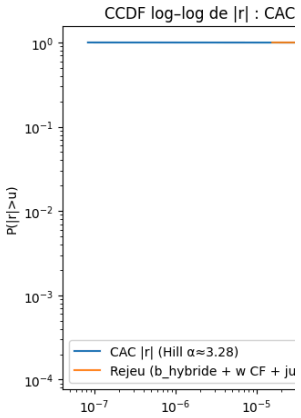
où B_t ~ Bern(p_J) et A_t ~ Exp(1). Les paramètres p_J et s_J sont calibrés sur plusieurs niveaux de probabilité empirique des extrêmes.
Le rendement est reconstruit par :

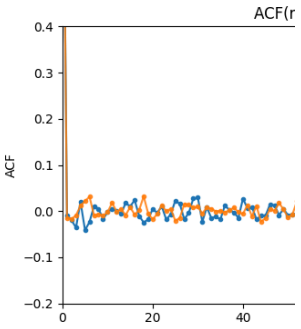
$$|r_t) = exp\left(\frac{\ell_t}{2}\right)$$

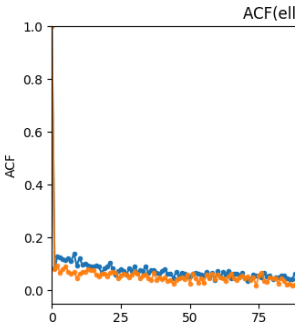
$$r_t = \pm\ |r_t)$$

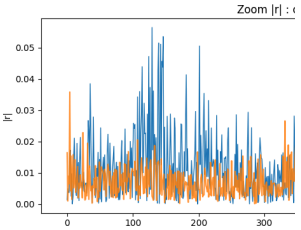
Le gain g_v est ajusté pour reproduire simultanément l'ACF de ℓ_t et celle de r_t².

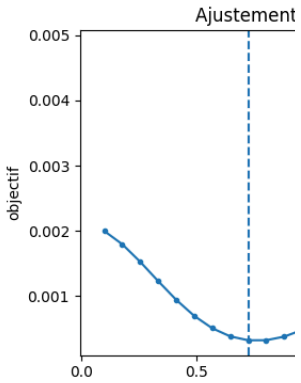
La structure finale du modèle repose sur une mémoire longue filtrée dans l'espace logarithmique de la variance et une excitation instantanée non gaussienne enrichie de sauts rares.
Ce modèle reproduit l'absence d'autocorrélation des rendements, la persistance de la volatilité, le clustering des amplitudes et la structure globale de la distribution, y compris les extrêmes.

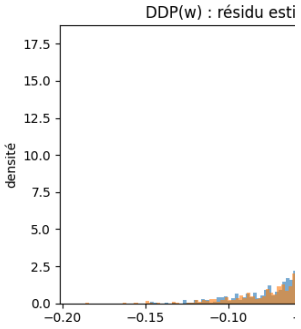












PINN Statistique Structurel pour la Modélisation du CAC 40

1. De quel type de PINN parle-t-on réellement ?

Lorsque l'on évoque les Physics-Informed Neural Networks, on pense spontanément à des réseaux qui résolvent des équations différentielles comme l'équation de la chaleur ou le système de Lorenz. Dans ces cas classiques, la "physique" est une équation différentielle connue, et le réseau apprend une solution qui respecte cette équation.

Dans le cas présent, la situation est différente. Il n'existe pas d'équation différentielle fermée décrivant le CAC 40. La dynamique du marché est statistique, latente et stochastique.
Le modèle repose sur la structure fondamentale suivante :

$$\ell_t = log\left(r_t^2 + \varepsilon\right) = v_t + w_t$$

où v□ représente une composante mémoire issue d'un filtrage long, et w□ une excitation i.i.d. non gaussienne.
La contrainte n'est donc pas une ODE déterministe, mais une architecture structurelle avec des invariants statistiques : autocorrélation, spectre, loi à queue lourde et niveaux de probabilité extrême.

2. Le PINN structurel latent

Le réseau apprend les composantes internes du modèle : le noyau mémoire b□, le gain g_v, la structure latente v□ et la loi d'innovation w□.
Les contraintes intégrées dans la fonction de coût jouent le rôle d'équations physiques. On impose notamment :

$$\ell_t - \left(v_t + w_t\right) \approx 0$$

On impose également que la mémoire provienne d'une convolution :

$$v_t = \sum_{k=0}^{L} b_k \xi_{t-k}$$

et que w□ soit blanc, c'est-à-dire que son autocorrélation soit proche de zéro.
À cela s'ajoutent des contraintes statistiques globales : ACF(r²), PSD(ℓ) et contraintes sur les queues via la méthode des niveaux extrêmes.

3. Le PINN génératif contraint

Dans la version générative, le réseau produit des trajectoires simulées r□(θ) à partir d'un ensemble de paramètres θ comprenant b□, σw², g_v et les paramètres de queue.
La perte est calculée au niveau statistique : comparaison des autocorrélations, des densités spectrales, des niveaux extrêmes et contrainte de blancheur du résidu.

4. Pertinence en Data Science

Dans les systèmes complexes, la prédiction brute est instable. La reproduction des invariants structurels est plus robuste. Le PINN permet d'automatiser cette reconstruction sous contraintes.

5. Applications en Data Science

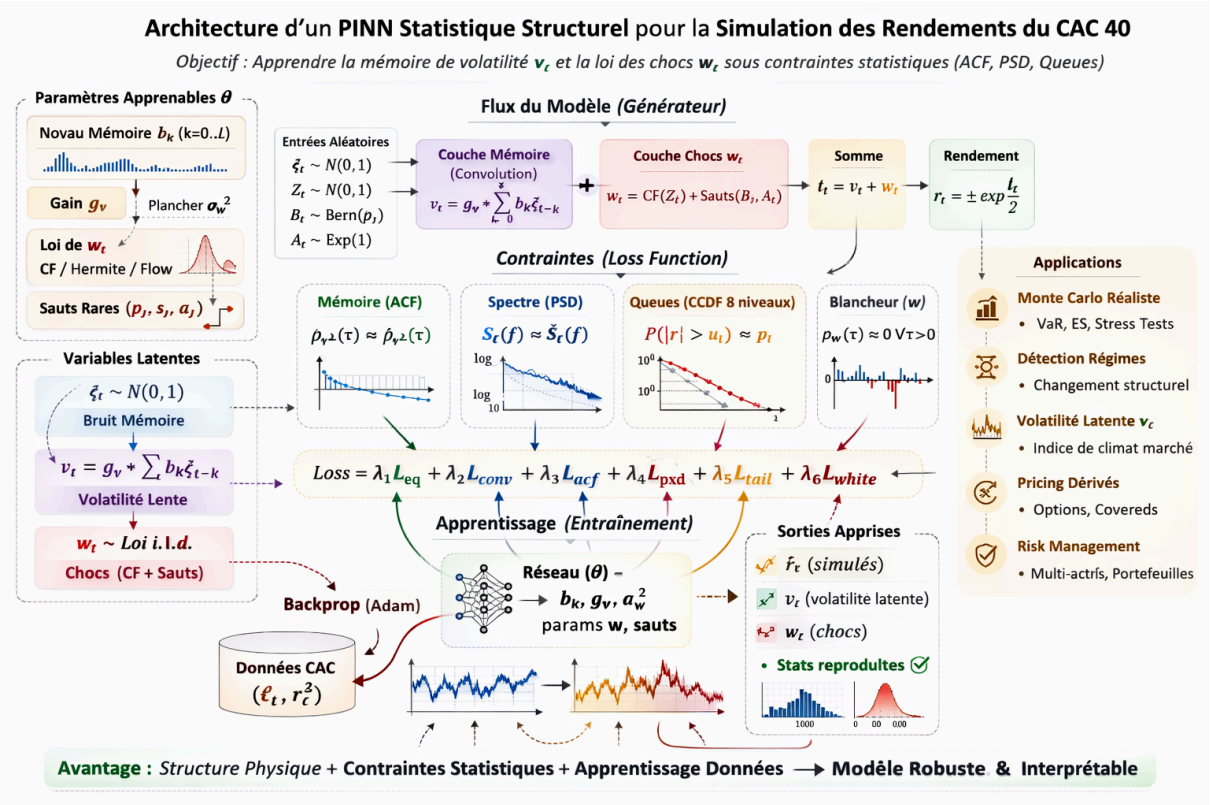
Un tel PINN permet la génération de scénarios réalistes pour Monte Carlo, VaR et stress tests. Il permet également la détection de régimes via l'évolution des paramètres latents, ainsi que l'identification de la volatilité latente v□.
En recherche académique, il permet de tester des hypothèses sur la mémoire longue et la nature des extrêmes. En ingénierie financière, il sert à calibrer des moteurs de simulation multi-actifs et à analyser la robustesse des stratégies.

6. Différence avec LSTM ou Transformer

Contrairement à un LSTM qui apprend une dynamique implicite, le PINN impose explicitement la séparation mémoire/excitation, la structure spectrale, la loi asymptotique et la blancheur du résidu, ce qui le rend plus interprétable et scientifiquement cohérent.

7. Synthèse

Le PINN adapté à ce modèle est un PINN statistique structurel latent ou un PINN génératif contraint. Il repose sur des invariants statistiques considérés comme lois structurelles du système et constitue un outil de reconstruction fidèle de la dynamique statistique plutôt qu'un outil de prédiction directionnelle.



Autre version

