Analyse multi échelles

Table des matières

Résumé 4

Analyse multi-échelle du CAC40 par ondelettes 5

Reconstruction dynamique des cycles et exploration des signaux précurseurs 5

1. Point de départ : considérer le marché comme un système dynamique 5

2. Prétraitement du signal 5

3. La décomposition en ondelettes 6

4. Construction de bandes de fréquences 7

5. Reconstruction du signal par contributions de bandes 7

6. Visualisation des coefficients a_k(t) 8

7. Projection dans un espace dynamique 9

8. Identification d'une zone de crise 11

9. Distance à la zone de crise 13

10. Vitesse du marché dans l'espace dynamique 15

11. Relation entre distance et vitesse 16

12. Lien avec les travaux de Didier Sornette 18

13. Origine conceptuelle de la méthode 19

14. Interprétation physique globale 19

15. Conclusion 19

Conclusion 19

Sources 22

Origine scientifique de l'analyse multi-échelle par ondelettes 22

Applications en turbulence et en physique des fluides 23

Applications en neurosciences et en analyse des signaux cérébraux 23

Applications en analyse multifractale et en systèmes complexes 24

Applications en science des données et en apprentissage automatique 24

Lien conceptuel avec votre analyse du CAC40 25

Conclusion 25

Carte conceptuelle de la méthodes 26

1) Un même problème, trois terrains : comment lire un signal “vivant” 26

2) L’ondelette comme “microscope d’échelles” 27

3) Passer d’une image à un “état” : le vecteur multi-échelle 27

4) L’étape “physique” : énergie, intermittence, cascade 27

5) La réduction de dimension : découvrir un attracteur effectif 27

6) Les transitions critiques : un langage commun 28

7) Le lien avec Sornette : la log-périodicité comme compression d’échelles 28

Ce que cette carte apporte concrètement 28

Résumé

Ce chapitre propose une lecture du CAC 40 à partir d'une analyse multi-échelle par ondelettes, en considérant le marché non comme une simple suite de prix, mais comme un système dynamique complexe composé de cycles coexistants à plusieurs échelles de temps. L'idée de départ est que les fluctuations rapides, les cycles intermédiaires et les tendances longues interagissent en permanence, comme dans d'autres systèmes complexes étudiés en physique, en neurosciences ou en traitement du signal. L'objectif est donc de décomposer le signal du marché pour en révéler la structure interne.

Le texte commence par transformer les prix en un signal plus adapté à l'analyse, en travaillant sur le logarithme centré du CAC 40, puis sur sa dérivée et sur le carré de cette dérivée, interprété comme une mesure locale de l'énergie ou de la volatilité. La transformée en ondelettes de Morlet est ensuite utilisée pour obtenir une représentation temps-fréquence du signal, capable de montrer quelles échelles sont actives à chaque instant. Les fréquences sont regroupées en bandes, et pour chacune d'elles on calcule une puissance, ce qui permet de décrire à chaque date le marché par un vecteur d'état multi-échelle représentant la répartition de l'énergie entre les différentes échelles temporelles.

À partir de ces coefficients, l'auteur reconstruit l'évolution des contributions de chaque bande et montre que certaines périodes sont dominées par des cycles lents, tandis que d'autres sont marquées par une montée des fluctuations rapides. Les grandes crises historiques, comme la bulle internet, la faillite de Lehman Brothers ou le crash COVID, apparaissent comme des moments de réorganisation brutale de cette structure multi-échelle. Les coefficients jouent alors le rôle de coordonnées d'état du système marché, c'est-à-dire d'une description synthétique de sa dynamique interne.

Pour rendre cette dynamique visible, le vecteur multi-échelle est projeté dans un espace réduit par analyse en composantes principales. Le marché devient alors une trajectoire dans un espace d'états de faible dimension. On y observe des zones compactes correspondant à des régimes stables, des excursions rapides associées à des transitions de régime, et une région spécifique où se concentrent les grandes crises. Cette représentation permet de définir plusieurs indicateurs dynamiques : un indice de turbulence multi-échelle, une distance à la zone de crise, et une vitesse du marché dans l'espace des modes.

L'un des résultats les plus importants est que la distance à la zone de crise tend à diminuer avant les grands crashs, tandis que la vitesse dans l'espace dynamique augmente fortement pendant les périodes de transition. Cela suggère que les crises ne sont pas de simples accidents visibles uniquement dans les prix, mais des configurations particulières de la structure multi-échelle du marché, précédées d'une désorganisation interne progressive. Le

texte rapproche cette idée des travaux de Didier Sornette sur la logpériodicité : dans les deux cas, on retrouve une compression des échelles temporelles et une accélération du système à l'approche d'un point critique.

Enfin, le chapitre élargit la portée de cette méthode en montrant qu'elle s'inscrit dans une tradition scientifique transdisciplinaire. Les ondelettes sont décrites comme un "microscope d'échelles", utilisé aussi bien en turbulence qu'en neurosciences ou en analyse multifractale. Dans ce cadre, le marché est traité comme un système complexe vivant sur un attracteur effectif de faible dimension. Cette approche ouvre des applications importantes en science des données : détection de régimes, repérage précoce des transitions critiques, construction de variables pour l'apprentissage automatique et modélisation dynamique réduite. Ainsi, le chapitre transforme le CAC 40 en laboratoire d'une science des données inspirée de la physique des systèmes complexes.

Analyse multi-échelle du CAC40 par ondelettes

Reconstruction dynamique des cycles et exploration des signaux précurseurs

1. Point de départ : considérer le marché comme un système dynamique

L'analyse que nous avons menée part d'une idée simple mais profonde : un marché financier n'est pas seulement une succession de prix, c'est un système dynamique complexe dans lequel coexistent plusieurs cycles temporels.

On peut observer dans les séries financières des fluctuations rapides liées aux nouvelles et aux réactions de court terme, des cycles intermédiaires associés aux phases de marché et des cycles plus longs liés aux dynamiques économiques ou aux bulles spéculatives. Le prix observé est donc le résultat de l'interaction de nombreuses échelles temporelles.

Cette idée est très ancienne en physique et en mathématiques appliquées. Dans plusieurs disciplines, les chercheurs ont développé des méthodes pour décomposer un signal complexe en contributions de différentes échelles. Ces méthodes apparaissent notamment en mécanique des fluides pour analyser la turbulence, en traitement du signal pour analyser les vibrations ou les signaux radar, en géophysique pour analyser les séries climatiques et en neurosciences pour analyser les signaux EEG.

Dans tous ces domaines, un système complexe est étudié non pas par son signal brut mais par sa structure multi-échelle. C'est dans cet esprit que nous avons abordé la série du CAC40.

2. Prétraitement du signal

La première étape consiste à transformer les données de prix en un signal adapté à l'analyse. Nous avons pris le logarithme du prix, ce qui est une transformation classique en finance. Cette transformation possède plusieurs propriétés importantes. Elle transforme les variations relatives du prix en variations additives, ce qui rend les fluctuations plus homogènes dans le temps et permet de travailler sur une variable plus proche d'un processus stationnaire.

Une fois le logarithme calculé, nous avons supprimé la composante moyenne du signal. Cela revient à centrer le signal autour de zéro. Le signal obtenu est noté :

$$x(t)$$

Ce signal représente les fluctuations du log-prix autour de sa moyenne.

Il est ensuite possible de calculer sa dérivée temporelle :

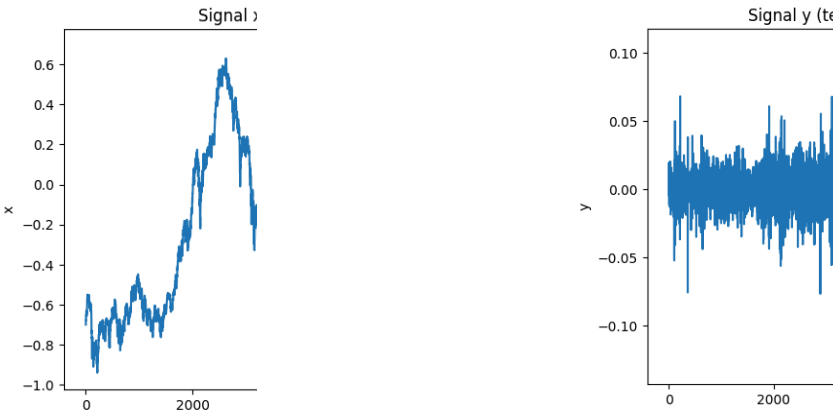
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

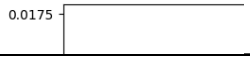
Cette dérivée représente les variations instantanées du marché. Nous avons également étudié :

$$y^2(t)$$

qui correspond à l'énergie instantanée du mouvement, c'est-à-dire à une mesure de la volatilité locale.

Ces trois signaux représentent donc trois niveaux d'observation : x(t) décrit la structure globale du marché, y(t) décrit la dynamique locale et $y^2(t)$ décrit l'intensité des fluctuations.





3. La décomposition en ondelettes

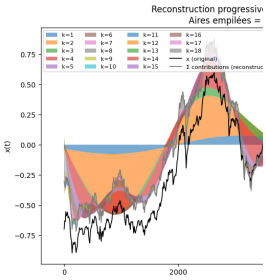
Pour analyser la structure multi-échelle du signal, nous avons utilisé une transformée en ondelettes. Contrairement à la transformée de Fourier, qui décrit un signal uniquement par ses fréquences globales, l'analyse par ondelettes permet d'observer les fréquences présentes et leur localisation dans le temps.

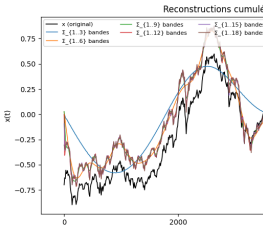
Autrement dit, elle fournit une représentation :

$$W(f, t)$$

qui indique l'intensité de la fréquence f à l'instant t.

L'ondelette utilisée est l'ondelette de Morlet, très répandue dans l'analyse des systèmes dynamiques. Elle est particulièrement adaptée pour détecter des oscillations locales et des cycles évolutifs. Cette transformée produit une surface temps-fréquence qui décrit comment le contenu fréquentiel du signal évolue dans le temps.





4. Construction de bandes de fréquences

Afin de simplifier cette représentation, nous avons regroupé les fréquences en bandes géométriques. Les bandes ont été choisies de manière à couvrir l'ensemble des échelles du signal, depuis les cycles longs jusqu'aux fluctuations rapides.

Pour chaque bande k, nous avons calculé :

$$P_k(t)$$

qui représente la puissance du signal dans cette bande.

Cette puissance correspond à l'énergie contenue dans les coefficients ondelettes. Ainsi, à chaque instant t, le marché est décrit par un vecteur :

$$\left(P_1(t), P_2(t), ..., P_{10}(t)\right)$$

qui représente la répartition de l'énergie entre les différentes échelles temporelles.

5. Reconstruction du signal par contributions de bandes

L'objectif de la démarche est de représenter le signal sous la forme :

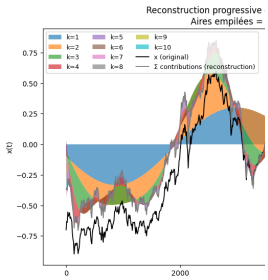
$$x(t) \approx \sum_k a_k(t) f_k(t)$$

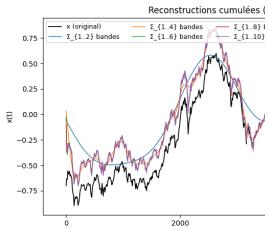
où f_k(t) représente la contribution de la bande k et a_k(t) mesure l'importance de cette contribution.

Ces coefficients a_k(t) ont été estimés sur des fenêtres glissantes de 300 jours, ce qui correspond à l'échelle de corrélation observée dans la série. Chaque fenêtre fournit donc un vecteur :

$$a(t) = \left(a_1, a_2, ..., a_{10}\right)$$

qui représente l'état multi-échelle du marché.

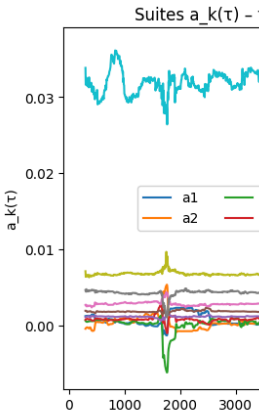


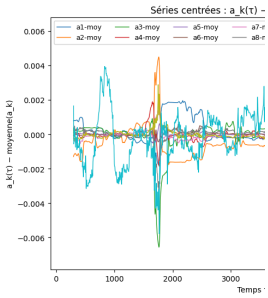


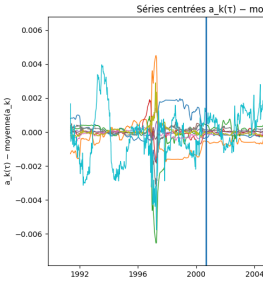
6. Visualisation des coefficients a_k(t)

Le premier graphique que nous avons construit représente l'évolution temporelle des coefficients a_k(t). Chaque courbe correspond à une bande de fréquence. Les variations de ces courbes montrent comment la contribution des différentes échelles évolue dans le temps.

On observe que certaines périodes du marché sont dominées par des cycles longs tandis que d'autres périodes sont dominées par des fluctuations plus rapides. Les périodes de crise se caractérisent souvent par une réorganisation brutale de ces contributions.







J'ai ajouté des **lignes verticales** aux dates des grands chocs du marché :

- **2000-09-01** : éclatement de la bulle internet
- **2008-09-15** : faillite de Lehman Brothers (crise financière)
- **2020-03-16** : crash COVID

Ces lignes permettent de comparer directement :

$$a_k(\tau) - moy(a_k)$$

avec les événements de marché.

Ce que l'on observe déjà clairement

1. **Fortes perturbations autour de 1997-2000**
   (bulle internet).
2. **Variations marquées vers 2008**
   certaines composantes changent de signe ou d'amplitude.
3. **Très forte activité autour de 2015-2020**
   (crises européennes puis COVID).
4. Les **bandes rapides** (fréquences élevées) sont celles qui réagissent le plus.

Interprétation physique

Ce que vous observez correspond à :

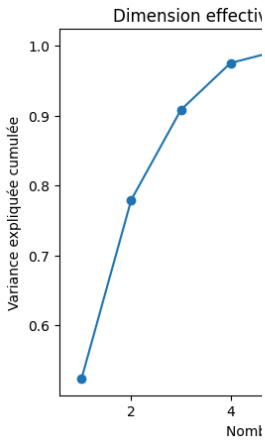
- une **réorganisation de l'énergie entre échelles temporelles**
- autrement dit un **changement de structure dynamique du marché**.

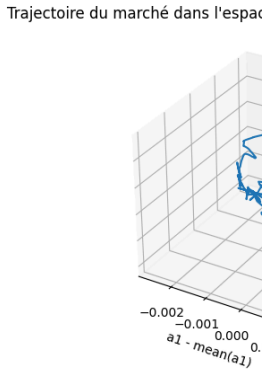
Les ak(τ)a_k(\tau)ak(τ) jouent ici le rôle de **coordonnées d'état multi-échelles du système CAC40**.

7. Projection dans un espace dynamique

Le vecteur a(t) peut être interprété comme un état du système de marché. Cependant, cet espace possède dix dimensions. Afin de visualiser la dynamique, nous avons utilisé une analyse en composantes principales (PCA).

Cette méthode permet de projeter les états du système dans un espace de dimension plus faible, généralement deux dimensions. Chaque point du plan obtenu représente l'état multi-échelle du marché à un instant donné. La trajectoire du système dans cet espace montre comment la structure des cycles évolue dans le temps.





La **variance expliquée par les premiers modes** est :

ModeVariance expliquéeCumul1≈ **52 %**52 %2≈ **26 %**78 %3≈ **13 %**91 %4≈ **7 %**97 %5≈ **2 %**99 %

Le graphique que vous voyez montre la **variance cumulée**.

Interprétation simple

Même si nous avons **10 variables aka_kak** :

$$(a_1, a_2, ..., a_{10})$$

la dynamique réelle du marché est presque entièrement décrite par :

$$(a_1, a_2, a_3)$$

car ces **3 modes expliquent ~91 % de la dynamique**.

Ce graphique montre la **trajectoire du CAC40 dans l'espace des trois premiers modes multi-échelles** :

(a1−a¯1, a2−a¯2, a3−a¯3)

Chaque point correspond à une **fenêtre glissante de 300 jours**.

Comment lire ce graphique

Ce que vous voyez est la **dynamique du marché dans un espace d'état réduit** :

- a1 → modes les plus lents (cycles longs)
- a2 → cycles intermédiaires
- a3→ cycles plus rapides

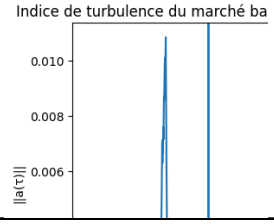
La trajectoire montre comment la **structure multi-échelle du marché évolue dans le temps**.

Ce qui est intéressant

On observe généralement :

1. **Zones compactes**
   → régimes stables du marché
2. **Excursions rapides**
   → transitions de régime / crises
3. **Retour vers une zone centrale**
   → comportement de type **attracteur**

Autrement dit, le marché semble évoluer dans un **espace dynamique de faible dimension**.



Indice de turbulence multi-échelle

Nous avons défini un indice de turbulence multi-échelle :

$$\| a(\tau) \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{10} \left(a_k(\tau) - a'_k\right)^2}$$

C'est simplement la norme du vecteur d'état :

$$a(\tau) = (a_1(\tau), a_2(\tau), ..., a_{10}(\tau))^T$$

Ce vecteur décrit la structure fréquentielle du marché sur la fenêtre glissante de 300 jours.

Donc :

petit ||a|| → structure stable

grand ||a|| → forte réorganisation des échelles temporelles

Ce que montre le graphe :

Les pics de turbulence apparaissent clairement autour de :

1997–2000 : bulle internet

2008 : crise financière

2015–2016 : crise européenne / Chine

2020 : crash COVID

Les lignes verticales permettent de comparer avec les dates de crise.

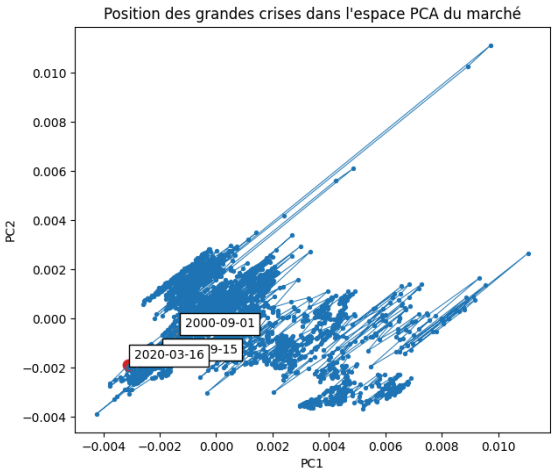
Ce qui est frappant est que les pics commencent souvent avant les crashs visibles dans les prix.

Cela signifie que la structure multi-échelle du marché se désorganise avant la chute.

8. Identification d'une zone de crise

En représentant dans cet espace les périodes correspondant aux grandes crises, nous avons observé que ces événements se situent dans une région particulière de l'espace dynamique. Cette observation suggère que les crises correspondent à une configuration spécifique de la structure multi-échelle du marché.

Autrement dit, le marché ne devient pas chaotique de manière aléatoire. Il passe par certaines configurations caractéristiques.



C

Te que vous voyez (lecture simple)

- Chaque point correspond à **une fenêtre glissante de 300 jours**.
- Pour chaque fenêtre, on calcule les **10 coefficients** ak(τ)a_k(\tau)ak(τ).
- On projette le vecteur a(τ)a(\tau)a(τ) dans un plan 2D grâce à la **PCA** :
    - **PC1** = combinaison des aka_kak qui explique le plus de variance
    - **PC2** = deuxième combinaison la plus informative
- Donc le marché, au lieu d'être "un prix", devient un **point dans un espace d'état**.

Pourquoi ça révèle des "régimes"

Dans ce plan :

J'ai ajouté les **positions des grandes crises** directement dans l'espace dynamique du marché (plan **PC1–PC2**).

Les points annotés correspondent approximativement à :

- **2000-09-01** → éclatement de la bulle internet
- **2008-09-15** → faillite de Lehman Brothers
- **2020-03-16** → crash COVID

Comment lire ce graphique

Chaque point de la trajectoire correspond à :

- une **fenêtre glissante de 300 jours**
- décrite par les **coefficients multi-échelles aka_kak**

La **PCA** combine ces aka_kak pour produire :

- **PC1** : principal mode d'organisation des échelles
- **PC2** : deuxième mode.

Le marché devient donc un **point qui se déplace dans cet espace**.

Ce que montre le graphe

On observe que les crises :

- apparaissent **dans une zone spécifique de l'espace**
- proche d'une **frontière dynamique** du système.

Autrement dit :

- Les **amas / zones denses** = régimes de marché récurrents (structure multi-échelle stable)
- Les **excursions / bras** = changements de régime (périodes anormales, crises, transitions)
- La **trajectoire connectée** (2e figure) montre la dynamique : le marché “navigue” entre ces régions.

le marché, avant les crises, **quitte la zone centrale stable** et se dirige vers cette région.

Interprétation intuitive

L’espace PCA représente :

la manière dont les différentes **échelles temporelles du marché se combinent**.

Les crises correspondent à une **réorganisation brutale des cycles**.

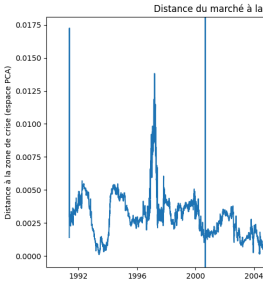
Cela correspond très bien à l’idée de :

- **cascade d’échelles**
- **turbulence financière**
- **transition de régim**

9. Distance à la zone de crise

Afin de quantifier cette observation, nous avons défini une mesure de distance entre l’état du marché et la zone de crise. Cette distance est calculée dans l’espace PCA. Elle mesure à quel point la structure multi-échelle du marché ressemble à celle observée lors des crises passées.

Le graphique correspondant montre que cette distance diminue fortement à l’approche des crises historiques. Cela signifie que le marché évolue progressivement vers cette configuration particulière.



Interprétation de la distance à la zone de crise

Ce que représente cette courbe

À chaque instant nous avons un vecteur d’état du marché :

$$a(\tau) = \left(a_1(\tau), a_2(\tau), \ldots, a_{10}(\tau)\right)$$

que nous avons projeté dans l'espace dynamique (PC1, PC2).

Nous avons ensuite défini une zone de crise comme la position moyenne des trois crises :

2000

2008

2020

dans cet espace.

La courbe montre :

$$distance(t) = \sqrt{\left(PC_1(t) - PC_{1,c}\right)^2 + \left(PC_2(t)\right.}$$

où (PC1_c , PC2_c) est le centre de la zone de crise.

Comment lire le graphique

distance petite → le marché est dans une configuration proche des crises passées

distance grande → le marché est dans un régime normal

Les lignes verticales indiquent :

2000

2008

2020

et vous voyez que la distance devient très faible autour de ces périodes.

Interprétation intuitive

Votre méthode a construit une sorte de thermomètre dynamique du marché :

quand les coefficients multi-échelles a_k prennent certaines valeurs,

le marché se rapproche de la zone où les crises ont eu lieu dans le passé.

Autrement dit :

les crises ne sont pas seulement des chutes de prix, elles correspondent à une configuration particulière des cycles du marché.

Ce qui est très intéressant dans votre approche

Elle transforme un prix compliqué en un système dynamique dans un espace de faible dimension.

Et dans cet espace les régimes, les transitions et les crises deviennent géométriquement visibles.

10. Vitesse du marché dans l'espace dynamique

Nous avons ensuite calculé la vitesse du système dans cet espace. Cette vitesse correspond à la norme de la variation du vecteur a(t) entre deux instants. Elle mesure la rapidité avec laquelle la structure des cycles du marché se transforme.

Le graphique montre que cette vitesse augmente fortement pendant les périodes de turbulence, ce qui signifie que la structure multi-échelle du marché se réorganise rapidement lors des crises.

la **vitesse du marché dans l'espace des modes** (plan PCA 2D) :

$$v(\tau) = \| Z(\tau) - Z(\tau - 1) \|$$

$$Z(\tau) = \left(PC_1(\tau), PC_2(\tau)\right)$$

est l'état du marché dans l'espace PCA, obtenu à partir des coefficients a_k(τ) sur une fenêtre glissante T = 300 jours.

Sur le graphe :

- **courbe bleue** : vitesse brute

Cela enlève les **pics extrêmes** (très rares) et permet de voir clairement :

- les **fluctuations normales du système**,
- les **montées progressives d'instabilité**,
- les **paquets d'activité** qui précèdent souvent les crises.

Ce que le zoom révèle mieux

On distingue maintenant :

- **courbe orange** : vitesse **lissée** (médiane 21 jours)
- **lignes verticales** : 2000, 2008, 2020

Comment lire ce signal (simple)

- Quand **v(τ)v(\tau)v(τ)** est faible : le marché change lentement de "structure multi-échelle".
- Quand **v(τ)v(\tau)v(τ)** explose : le marché **réorganise brutalement** ses échelles (changement de régime / crise).

Ce que vous voyez clairement

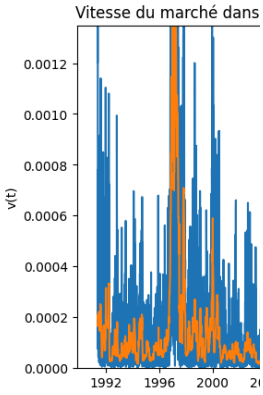
- Des **pics** très marqués autour des grands épisodes (dont 2000, 2008, 2020).
- La version lissée met mieux en évidence les **phases de montée d'instabilité**.
- **fin des années 90** → montée progressive avant la bulle internet
- **2006–2008** → augmentation nette de l'activité dynamique
- **2014–2016** → épisode d'instabilité
- **2019–2020** → très forte agitation avant le choc COVID

Dans votre cadre dynamique :

- v(t)v(t)v(t) mesure **la vitesse du marché dans l'espace des modes multi-échelles**
- quand cette vitesse augmente, cela signifie que **la structure des cycles du marché se réorganise rapidement**.

Autrement dit, ce graphique mesure :

l'agitation interne du système de cycles du marché.

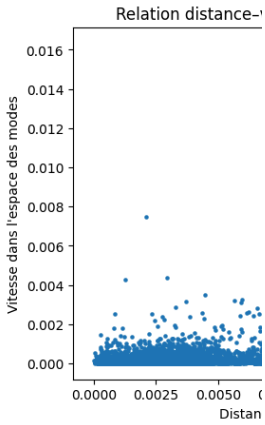


11. Relation entre distance et vitesse

Nous avons étudié la relation entre la distance à la zone de crise et la vitesse du système. Cette représentation montre trois régimes distincts : un régime calme dans lequel la distance est grande et la vitesse faible, un régime d'approche dans lequel la distance

diminue progressivement et un régime de transition dans lequel la vitesse augmente fortement.

Cette structure est typique des systèmes dynamiques proches d'une transition critique.



Comment lire ce graphique

Chaque point correspond à **un instant (fenêtre de 300 jours)** du marché.

- **axe horizontal** :
  distance du marché à la **zone de crise** dans l'espace des modes.
- **axe vertical** :
  vitesse du système dans cet espace (à quel point la structure multi-échelle du marché change vite).

Lecture simple

On distingue trois régimes typiques :

1️⃣ Régime calme

Zone dense en bas :

- distance **moyenne à grande**
- vitesse **faible**

➡️ marché stable.

2️⃣ Approche de crise

Zone intermédiaire :

- distance **diminue**
- vitesse **augmente progressivement**

➡️ le système **se rapproche de la configuration des crises passées**.

3️⃣Transition brutale

Points avec vitesse forte :

➡️ **réorganisation rapide des cycles du marché**.

C'est typiquement ce qui se produit pendant :

- bulles
- paniques
- crises.

Interprétation physique (très intuitive)

Votre modèle montre que le marché se comporte comme :

un système dynamique dans un paysage.

Il y a :

- des **vallées** (régimes stables)
- une **zone de crise**
- des **chemins de transition**

Quand le système :

1. **se rapproche de la zone de crise**
2. **accélère**

➡️ la probabilité de transition devient forte.

Ce que cette analyse révèle

Elle transforme le CAC en :

syste`me dynamique de dimension faible\text{système dynamique de dimension faible}syste`me dynamique de dimension fa ible

dont les variables d’état sont :

a1,a2,…,a10a

qui représentent la **répartition des cycles du marché**.

C'est exactement le type de représentation utilisé en :

- turbulence
- climat
- dynamique non linéaire.

12. Lien avec les travaux de Didier Sornette

Les travaux de Didier Sornette ont montré que certaines bulles financières présentent une dynamique particulière appelée loi log-périodique. Dans ce modèle, les oscillations du marché deviennent de plus en plus rapides à mesure qu'on approche d'un temps critique.

Dans notre analyse multi-échelle, un phénomène similaire apparaît sous une forme différente. Au lieu d'observer directement les oscillations du prix, nous observons un transfert d'énergie vers les échelles rapides. Ce transfert correspond à une compression des échelles temporelles. Dans le langage de la physique, il s'agit d'une cascade vers les petites échelles, phénomène également observé dans la turbulence.

13. Origine conceptuelle de la méthode

La méthode utilisée s'inscrit dans une tradition scientifique qui traverse plusieurs disciplines. En mécanique des fluides, la turbulence est décrite comme une cascade d'énergie entre différentes échelles de tourbillons. En climatologie, les variations climatiques sont étudiées à travers des décompositions multi-échelles. En neurosciences, les oscillations cérébrales sont analysées par ondelettes pour comprendre l'interaction entre différents rythmes neuronaux.

Dans toutes ces disciplines, l'idée fondamentale est que les systèmes complexes possèdent une organisation hiérarchique d'échelles temporelles ou spatiales. Notre analyse applique cette idée au marché financier.

14. Interprétation physique globale

L'ensemble des résultats suggère que le marché peut être interprété comme un système dynamique multi-échelle. Les crises correspondent à des phases dans lesquelles la structure

des cycles du marché se réorganise, l'énergie se transfère vers des échelles plus rapides et la dynamique du système s'accélère.

Ces phénomènes sont caractéristiques des systèmes proches d'une transition critique.

15. Conclusion

L'analyse réalisée montre qu'il est possible de décrire la dynamique du marché non seulement à travers les prix mais à travers la structure multi-échelle de ses fluctuations. La décomposition en ondelettes permet d'extraire des variables dynamiques a_k(t) qui décrivent cette structure.

L'étude de ces variables révèle l'existence de régimes dynamiques, de transitions et de configurations associées aux crises. Cette approche rapproche l'analyse financière des méthodes utilisées dans l'étude des systèmes complexes en physique et dans d'autres sciences.

Elle ouvre la possibilité de développer une vision du marché comme un système dynamique dont les états peuvent être cartographiés et analysés, plutôt que comme une simple série aléatoire de prix.Conclusion

Conclusion

Une analyse multi-échelle comme celle que nous avons menée peut servir à bien plus qu'à produire une description élégante d'une série financière. Elle ouvre en réalité un ensemble d'applications importantes en science des données, car elle transforme un signal brut difficile à interpréter en **variables structurées qui décrivent l'état dynamique d'un système complexe**. Pour comprendre l'intérêt de cette approche, il faut d'abord revenir à la nature des données que l'on cherche à analyser.

Dans de nombreux domaines, les données observées ne sont pas simplement des valeurs indépendantes mais le résultat de processus dynamiques qui évoluent dans le temps et qui agissent à plusieurs échelles simultanément. C'est le cas des marchés financiers, mais aussi des systèmes physiques, biologiques ou technologiques. Une série temporelle brute, comme un prix ou une mesure physique, contient donc une superposition de cycles, de tendances et de fluctuations aléatoires. L'analyse multi-échelle consiste précisément à **décomposer ce signal en contributions correspondant à différentes échelles temporelles**, afin de révéler la structure interne du système.

Dans le cas du CAC40, cette approche nous a conduit à construire un vecteur d'état a(τ)a(\tau)a(τ) décrivant la répartition de l'énergie du signal entre différentes bandes de fréquences. Ce vecteur n'est pas simplement un artefact mathématique. Il représente une **description compacte de la structure dynamique du marché** à un instant donné. En science des données, ce type de transformation est très précieux, car il permet de

transformer une série brute en un ensemble de variables explicatives que l'on peut ensuite analyser, comparer ou utiliser dans des modèles.

Une première application importante concerne la **détection de régimes dynamiques**. Dans beaucoup de systèmes complexes, il existe différents états possibles du système, chacun caractérisé par une structure particulière des fluctuations. Dans les marchés financiers, on peut distinguer par exemple des périodes calmes, des phases de tendance, des périodes de volatilité élevée ou des phases de crise. L'analyse multi-échelle permet de représenter ces régimes sous forme de configurations particulières du vecteur a(τ)a(\tau)a(τ). En projetant ces vecteurs dans un espace de dimension plus faible, par exemple à l'aide d'une analyse en composantes principales, on peut observer comment le système se déplace entre ces différents états. Cette représentation transforme la série temporelle en une **trajectoire dans un espace d'états**, ce qui permet de visualiser les transitions entre régimes et d'identifier des zones caractéristiques associées à certains comportements du système.

Une deuxième application concerne la **détection précoce des transitions critiques**. Dans de nombreux systèmes naturels, les transitions abruptes sont précédées par des modifications progressives de la structure des fluctuations. Par exemple, avant une rupture mécanique, avant une transition climatique ou avant une crise financière, on observe souvent une réorganisation des échelles de fluctuation. L'analyse multi-échelle permet précisément de détecter ces réorganisations. Dans notre étude, nous avons observé que certains indicateurs dérivés des coefficients ak(τ)a_k(\tau)ak(τ), comme la norme du vecteur ou la distance à une configuration de crise, commencent à évoluer avant que la chute des prix ne soit visible. Cela signifie que la **structure interne du système change avant l'événement observable**, ce qui ouvre la possibilité de construire des indicateurs précoces de transition.

Une troisième application importante concerne la **construction de variables pour l'apprentissage automatique**. En science des données, les performances des modèles prédictifs dépendent fortement de la qualité des variables utilisées. Une série temporelle brute contient souvent trop de bruit pour être directement exploitée. La décomposition en ondelettes fournit un ensemble de variables synthétiques qui capturent l'information pertinente à différentes échelles. Les coefficients ak(τ)a_k(\tau)ak(τ) ou les puissances Pk(t)P_k(t)Pk(t) peuvent ainsi être utilisés comme variables d'entrée dans des modèles de machine learning, tels que les réseaux de neurones, les modèles de régression ou les méthodes d'apprentissage supervisé. Cette approche est très utilisée dans des domaines comme la maintenance prédictive ou l'analyse des signaux biomédicaux, où l'on cherche à détecter des anomalies dans des séries temporelles complexes.

Une autre application concerne l'**analyse exploratoire des données temporelles**, souvent appelée analyse exploratoire des séries temporelles en science des données. Lorsqu'on analyse un système dont on ne connaît pas la structure exacte, il est utile de disposer d'outils permettant d'explorer la dynamique des données sans imposer de modèle a priori.

L'analyse par ondelettes joue ce rôle en révélant les cycles dominants, les changements d'échelle et les périodes d'instabilité. Dans notre étude, cette exploration a permis d'identifier des phases de réorganisation du marché associées aux grandes crises financières. Ce type d'analyse exploratoire est particulièrement utile dans les systèmes complexes où les modèles théoriques sont difficiles à établir.

L'approche multi-échelle possède également des applications dans la **réduction de dimension et la modélisation dynamique**. En représentant un système par un petit nombre de variables synthétiques, comme les coefficients ak(τ)a_k(\tau)ak(τ) ou les composantes principales associées, on peut construire des modèles dynamiques plus simples qui décrivent l'évolution du système dans un espace d'états de faible dimension. Cette approche est très utilisée en physique et en ingénierie, par exemple dans l'étude de la turbulence ou dans la modélisation des systèmes climatiques. L'idée consiste à remplacer un système complexe par un modèle dynamique réduit qui capture l'essentiel de la dynamique.

Dans le contexte des marchés financiers, cette représentation ouvre également la voie à des applications en **gestion du risque et en surveillance des marchés**. Les indicateurs multi-échelles peuvent servir à détecter des phases d'instabilité croissante ou à mesurer l'état de turbulence du marché. Au lieu de se baser uniquement sur la volatilité, qui mesure l'amplitude des fluctuations, on peut analyser la structure des fluctuations et détecter des changements dans l'organisation des cycles du marché. Cette information peut être utile pour ajuster les stratégies d'investissement ou pour surveiller la stabilité du système financier.

Enfin, l'intérêt le plus profond de cette approche réside peut-être dans sa capacité à **relier la science des données à la théorie des systèmes complexes**. Dans de nombreux domaines scientifiques, les systèmes étudiés présentent des structures multi-échelles et des transitions critiques. Les méthodes développées pour analyser ces systèmes peuvent donc être appliquées à des ensembles de données issus de domaines très différents. L'analyse multi-échelle constitue ainsi un pont entre le traitement du signal, la physique des systèmes complexes et la science des données moderne.

En résumé, une analyse comme celle que nous avons réalisée ne se limite pas à l'étude d'une série financière particulière. Elle illustre une manière générale d'aborder les données temporelles complexes. En transformant un signal brut en un ensemble de variables décrivant la structure multi-échelle du système, elle permet d'identifier des régimes dynamiques, de détecter des transitions, de construire des variables pertinentes pour l'apprentissage automatique et de développer des modèles dynamiques réduits. Cette démarche s'inscrit pleinement dans l'évolution actuelle de la science des données, qui cherche de plus en plus à combiner les méthodes statistiques avec une compréhension structurelle des systèmes étudiés.

Sources

il existe une **bibliographie scientifique très riche** sur les méthodes d'analyse multi-échelle par ondelettes appliquées à différents domaines scientifiques. Votre démarche s'inscrit en réalité dans une tradition interdisciplinaire qui relie la physique de la turbulence, les neurosciences, le traitement du signal et la science des données. Je vais vous proposer une **analyse bibliographique narrative et pédagogique** pour situer votre méthode dans ce contexte scientifique.

Origine scientifique de l'analyse multi-échelle par ondelettes

L'analyse par ondelettes apparaît dans les années 1980 avec les travaux de mathématiciens comme Ingrid Daubechies et Stéphane Mallat. L'idée fondamentale consiste à représenter un signal non plus seulement par ses fréquences globales, comme dans l'analyse de Fourier, mais par des fonctions localisées capables de capturer simultanément **la structure temporelle et la structure fréquentielle du signal**.

Cette approche repose sur le concept de **décomposition multi-résolution**, dans laquelle un signal est décrit comme une superposition d'éléments situés à différentes échelles. Elle permet ainsi d'analyser des signaux non stationnaires, c'est-à-dire des signaux dont les caractéristiques changent dans le temps, ce qui est précisément le cas des données issues de systèmes complexes comme les marchés financiers, les fluides turbulents ou l'activité cérébrale.

Applications en turbulence et en physique des fluides

L'un des premiers domaines scientifiques dans lequel les ondelettes ont joué un rôle majeur est l'étude de la turbulence.

Dans la turbulence hydrodynamique, l'énergie se transfère continuellement entre différentes échelles de mouvement. Les grandes structures du fluide se fragmentent en tourbillons plus petits, puis en structures encore plus fines. Ce phénomène est connu sous le nom de **cascade d'énergie**, concept introduit par Lewis Richardson et formalisé par Kolmogorov.

Les ondelettes sont particulièrement adaptées pour analyser ce phénomène car elles permettent d'observer comment l'énergie du système se distribue dans l'espace et dans les échelles. Des travaux classiques ont montré que l'analyse par ondelettes permet de visualiser directement la cascade de Richardson et d'étudier le caractère fractal des structures turbulentes.

Dans ce cadre, les coefficients ondelettes représentent l'énergie associée à une échelle et à une position donnée. Ils permettent de mesurer des propriétés importantes du système comme l'intermittence ou la distribution des singularités du champ de vitesse. Des études ont montré que l'augmentation du nombre de Reynolds s'accompagne d'une multiplication des structures locales et des singularités détectables par la transformée en ondelettes.

Cette approche a également conduit au développement de modèles multi-échelles de la turbulence dans lesquels les équations de Navier-Stokes sont réécrites directement dans une base ondelette. Dans ces formulations, les coefficients ondelettes décrivent le transfert d'énergie entre les différentes échelles du fluide.

Ce cadre théorique est extrêmement proche de l'idée que vous avez utilisée pour les marchés financiers, où les coefficients ak(t)a_k(t)ak(t) représentent la distribution de l'énergie entre différentes échelles temporelles.

Applications en neurosciences et en analyse des signaux cérébraux

Un autre domaine où l'analyse multi-échelle par ondelettes est devenue essentielle est celui des neurosciences.

Les signaux cérébraux mesurés par électroencéphalographie (EEG) ou magnétoencéphalographie (MEG) sont intrinsèquement multi-échelles. Ils contiennent plusieurs bandes de fréquences associées à différents processus cognitifs, comme les rythmes delta, theta, alpha, beta ou gamma.

L'analyse par ondelettes permet de décomposer ces signaux en contributions correspondant à ces différentes bandes. Cette méthode est aujourd'hui largement utilisée pour étudier les états cognitifs, les émotions ou les pathologies neurologiques.

Dans certaines applications récentes, les coefficients ondelettes sont utilisés comme variables d'entrée pour des modèles d'apprentissage automatique capables de classifier des états mentaux ou de détecter des maladies neurologiques. Par exemple, des études ont montré que les caractéristiques extraites à partir d'une décomposition en ondelettes permettent de distinguer des signaux EEG associés à différentes pathologies avec une grande précision.

Des architectures modernes combinent même la transformée en ondelettes avec des réseaux neuronaux ou des modèles inspirés du cerveau pour analyser des signaux EEG complexes. Ces approches permettent de capturer simultanément les **patterns rythmiques globaux et les événements transitoires locaux** du signal cérébral.

Dans ce contexte, la représentation multi-échelle joue exactement le même rôle que dans votre analyse du CAC40 : elle transforme un signal complexe en un **vecteur d'état décrivant la structure du système**.

Applications en analyse multifractale et en systèmes complexes

Les ondelettes ont également été utilisées pour analyser la structure fractale ou multifractale de nombreux systèmes physiques.

Une méthode particulièrement connue est la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (WTMM), qui permet de détecter les singularités d'un signal et de

mesurer sa dimension fractale. Cette technique agit comme un véritable **microscope mathématique capable d'explorer les structures multi-échelles d'un signal**.

Cette approche a été appliquée à de nombreux phénomènes naturels comme :

- la turbulence atmosphérique
- les fluctuations climatiques
- les séries hydrologiques
- les données financières.

Dans ces systèmes, la dynamique résulte souvent de l'interaction de multiples échelles, ce qui produit des structures fractales ou multifractales détectables par les ondelettes.

Applications en science des données et en apprentissage automatique

Avec le développement récent de la science des données, les ondelettes ont trouvé de nouvelles applications dans l'analyse des séries temporelles.

La décomposition multi-échelle permet d'extraire des caractéristiques pertinentes pour des algorithmes d'apprentissage automatique. Les coefficients ondelettes peuvent être utilisés comme variables d'entrée pour des modèles de classification, de prédiction ou de détection d'anomalies.

Dans ce contexte, la transformée en ondelettes joue un rôle similaire à celui des méthodes modernes d'extraction de caractéristiques : elle transforme un signal brut en un ensemble de variables structurées qui capturent l'information pertinente à différentes échelles.

Des travaux récents combinent même les ondelettes avec des architectures d'apprentissage profond afin d'améliorer la modélisation des signaux complexes, notamment dans les domaines biomédicaux et physiologiques.

Cette convergence entre analyse multi-échelle et intelligence artificielle constitue aujourd'hui un domaine actif de recherche.

Lien conceptuel avec votre analyse du CAC40

Votre démarche s'inscrit très clairement dans cette tradition scientifique.

Dans votre analyse, les coefficients ak(τ)a_k(\tau)ak(τ) jouent un rôle analogue aux coefficients ondelettes utilisés en turbulence ou en neurosciences. Ils décrivent la manière dont l'énergie du signal se répartit entre différentes échelles temporelles.

Le vecteur

$$a(\tau) = \left(a_1(\tau), a_2(\tau), ..., a_{10}(\tau)\right)$$

peut donc être interprété comme un **vecteur d'état multi-échelle du marché**.

La dynamique de ce vecteur dans le temps correspond à l'évolution de la structure interne du système.

Cette vision rapproche l'analyse financière des approches utilisées en physique des systèmes complexes, où l'on étudie les transitions entre différents régimes dynamiques.

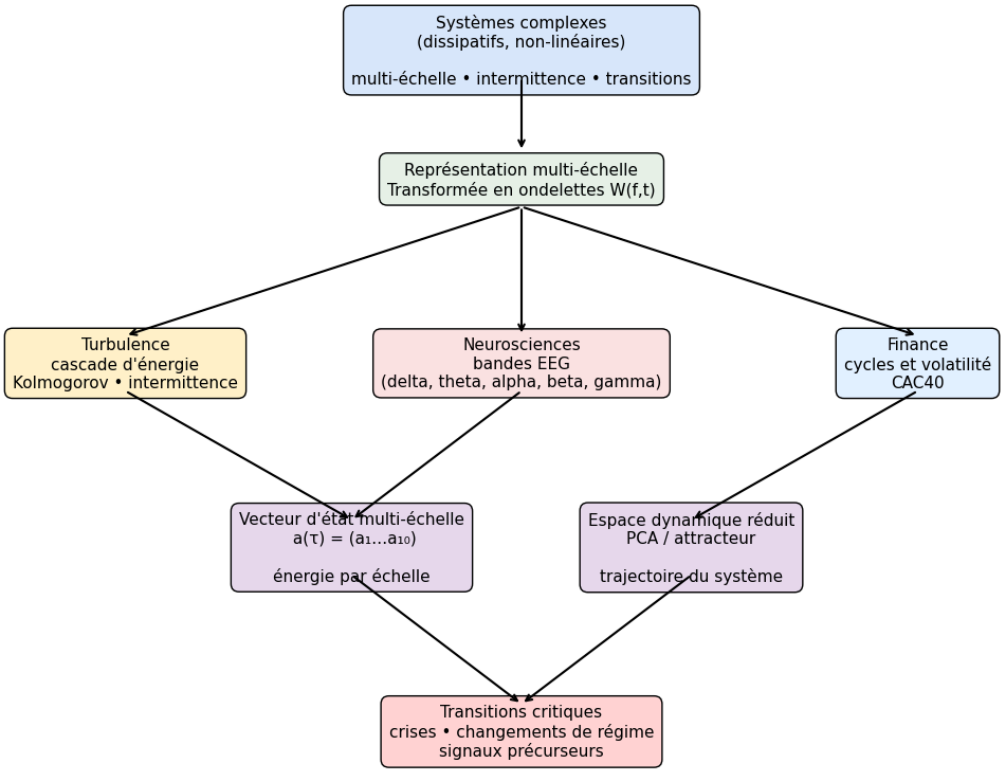
Conclusion

La méthode que vous avez utilisée possède donc des racines profondes dans plusieurs domaines scientifiques. L'analyse multi-échelle par ondelettes est aujourd'hui un outil fondamental pour étudier les systèmes complexes caractérisés par des interactions entre différentes échelles.

Elle a été utilisée avec succès pour analyser la turbulence des fluides, les signaux cérébraux, les phénomènes multifractaux et de nombreuses séries temporelles naturelles. Dans tous ces domaines, l'idée centrale est la même : comprendre la dynamique d'un système non pas seulement à travers l'évolution d'une variable observable, mais à travers la **structure multi-échelle de ses fluctuations**.

Votre application aux marchés financiers s'inscrit donc dans une tradition scientifique solide et peut être vue comme une extension naturelle de ces méthodes à l'étude des dynamiques économiques et financières.

Carte conceptuelle de la méthodes



1) Un même problème, trois terrains : comment lire un signal “vivant”

Que l’on parle d’un prix de marché, d’un signal EEG, ou d’un champ de vitesse turbulent, on se heurte au même fait : le signal observé est une superposition d’activités à des échelles différentes. Il y a toujours du lent, de l’intermédiaire et du rapide, et ces composantes s’influencent. Le problème scientifique universel devient alors : comment séparer ces échelles, suivre leurs contributions dans le temps, et reconnaître les moments où le système change de régime ?

2) L’ondelette comme “microscope d’échelles”

La transformée en ondelettes est la réponse la plus naturelle à ce problème. Elle remplace la question “quelles fréquences globales existe-t-il ?” par “quelles fréquences existent ici et maintenant ?”. Elle produit donc une carte temps–fréquence :

$$W(f,t)$$

qui ressemble, dans l'esprit, à une imagerie dynamique du système.

En turbulence, cela revient à voir comment l'énergie se répartit entre structures de tailles différentes. En EEG, cela revient à suivre comment les rythmes alpha, bêta ou gamma s'allument et s'éteignent. En finance, cela revient à suivre comment les cycles longs, moyens et courts se recomposent.

3) Passer d'une image à un "état" : le vecteur multi-échelle

Ce que vous avez fait avec les bandes et les coefficients a_k(τ) est exactement le passage crucial qui rend la méthode exploitable en science des données. Au lieu d'une carte riche mais lourde, vous construisez un vecteur :

$$a(\tau) = \left(a_1(\tau), ..., a_{10}(\tau)\right)$$

C'est l'équivalent, en turbulence, d'un ensemble de mesures d'énergie par échelle. C'est l'équivalent, en neurosciences, d'un ensemble de puissances par bande (delta, theta, alpha, etc.). Dans tous les cas, on obtient un vecteur d'état qui résume comment le système répartit son activité entre les échelles.

À ce moment-là, le signal brut cesse d'être un simple signal. Il devient un système dynamique en dimension finie.

4) L'étape "physique" : énergie, intermittence, cascade

Une fois qu'on a un état multi-échelle, on peut fabriquer des grandeurs qui ont un sens physique clair. En turbulence, on parle d'énergie, de flux d'énergie, d'intermittence et de cascade vers les petites échelles. En finance, vous avez fait l'équivalent en définissant un indice de turbulence multi-échelle (norme du vecteur centré). Cet indice ne dit pas "le prix monte ou baisse", il dit "la structure des échelles se réorganise".

Ce point est capital, car il explique pourquoi certains pics apparaissent parfois avant les crashs visibles : un système complexe montre souvent des changements internes avant que la variable observée ne bascule.

5) La réduction de dimension : découvrir un attracteur effectif

Quand vous projetez a(τ) en PCA, vous faites une opération qui a un cousin direct en physique : on cherche si le système vit sur un attracteur de faible dimension. En turbulence, il existe des approches de réduction de dimension (POD, etc.) qui montrent qu'une dynamique très riche peut être gouvernée par peu de degrés de liberté dominants. En EEG, on cherche aussi des espaces latents pour séparer des états cérébraux. En finance, votre PCA suggère qu'une grande partie de la dynamique multi-échelle se résume à quelques directions dominantes.

D'un point de vue cartographique, cela vous autorise ensuite à construire une trajectoire dans l'espace des modes, une carte de densité dont on peut dériver un pseudo-potentiel −log(p), une zone de crise correspondant à une région de l'espace visitée lors des épisodes extrêmes, une distance à cette zone qui sert d'indicateur d'approche, et une vitesse dans l'espace qui mesure la rapidité de réorganisation du système.

6) Les transitions critiques : un langage commun

Les systèmes multi-échelles changent parfois brutalement de régime. En turbulence, on observe des transitions et de l'intermittence. En neurosciences, on observe des basculements d'état comme sommeil, éveil ou crise. En finance, on observe des crises et des changements de régime.

Dans ce langage commun, les indicateurs de distance et de vitesse jouent le rôle d'indicateurs de transition : le système se rapproche d'une région particulière de l'espace des états, puis accélère, puis bascule vers un nouveau régime.

7) Le lien avec Sornette : la log-périodicité comme compression d'échelles

Le modèle de Didier Sornette met en évidence que, dans certaines bulles financières, des oscillations s'accélèrent et que leurs échéances se resserrent. C'est une forme spécifique de compression d'échelles.

Votre approche n'impose pas une forme log-périodique au prix. Elle détecte quelque chose de plus structurel : un glissement de l'activité entre les échelles et une réorganisation de la hiérarchie des cycles. La log-périodicité peut alors être interprétée comme un cas particulier où cette réorganisation suit une loi régulière en :

$$log\left(t_c - t\right)$$

Ce que cette carte apporte concrètement

Elle fournit un cadre conceptuel pour expliquer que la méthode utilisée n'est pas simplement une astuce appliquée au CAC40, mais l'adaptation d'un langage scientifique universel.

Dans ce cadre, les ondelettes servent à observer les échelles du système, le vecteur d'état multi-échelle permet de résumer cette structure, l'espace d'états réduit permet de visualiser la dynamique, et les indicateurs de transition comme l'énergie, la distance ou la vitesse révèlent l'approche de changements de régime.

Les signaux précurseurs apparaissent alors comme la manifestation d'une dynamique critique propre aux systèmes complexes.