# Variable d'ordre, modes mesurés et équation réduite des systèmes complexes

*De Landau-Ginzburg à une EDO stochastique effective construite à partir d'un réseau de capteurs*

## 1. Problème général : passer du champ complexe à une grandeur lisible

Dans une structure dissipative réelle, le système possède un grand nombre de degrés de liberté. Il peut s'agir d'un champ de vitesse turbulent, d'un état de mer observé par radar, d'un système organisationnel, d'un marché financier ou d'un milieu en transformation. Dans tous ces cas, la description complète est inaccessible : les équations locales sont rarement connues, les paramètres sont incertains, et l'on ne mesure qu'une partie du système. L'enjeu consiste donc à construire une grandeur macroscopique capable de résumer l'évolution collective. Cette grandeur joue le rôle d'une variable d'ordre : elle ne décrit pas chaque détail local, mais elle porte l'information décisive sur le régime global du système, ses transitions, ses crises, son intermittence et ses changements de stabilité.

La démarche proposée consiste à inverser le point de départ classique. Au lieu de supposer d'abord une équation aux dérivées partielles connue, puis d'en déduire une variable d'ordre, on part du processus expérimental de mesure. Le réseau de capteurs fournit une discrétisation opérationnelle du système. À partir de cette discrétisation, on extrait des modes dominants par ACP ou POD. Les amplitudes temporelles de ces modes deviennent alors des variables d'ordre empiriques. Une fois obtenue, la variable d'ordre peut être décrite par une équation différentielle stochastique effective, dont les termes représentent respectivement la structure globale, la complexité éliminée et les fluctuations rapides.

## 2. La variable d'ordre dans la théorie de Landau

La théorie de Landau est le modèle fondateur de cette manière de penser. Landau ne décrit pas toutes les variables microscopiques d'un matériau. Il introduit une grandeur macroscopique, appelée variable d'ordre, qui distingue les phases. Dans un ferromagnétique, cette variable est l'aimantation moyenne. Au-dessus de la température critique, les orientations microscopiques sont désordonnées et l'aimantation moyenne est nulle. En dessous de la température critique, les spins s'alignent collectivement et l'aimantation devient non nulle. La variable d'ordre condense donc l'apparition d'une organisation collective.

$$M = \langle s_i \rangle$$

La force de Landau est d'écrire l'énergie libre comme une fonction de cette variable d'ordre. Près du point critique, si la symétrie impose que l'énergie soit inchangée lorsque M devient -M, on développe l'énergie libre en puissances paires de M :

$$F(M,T) = F_0 + a\left(T - T_c\right)M^2 + bM^4, b > 0$$

La variable d'ordre est déterminée par la minimisation de cette énergie libre. Lorsque T est supérieur à T_c, le terme quadratique est positif et le minimum est situé en M = 0. Lorsque T devient inférieur à T_c, le terme quadratique change de signe : le point M = 0 devient instable et deux nouveaux minima

apparaissent. Le système choisit alors spontanément l'un de ces minima. La transition se lit donc comme un changement de forme du paysage énergétique.

$$\frac{dF}{dM} = 0 \Rightarrow M = 0 ou M^2 = -\frac{a\left(T-T_c\right)}{2b}$$

Ce point est essentiel pour votre démarche. Landau montre qu'un système très complexe peut être représenté par une coordonnée collective, à condition que cette coordonnée soit celle sur laquelle se lit le changement de régime. La variable d'ordre n'est donc pas une simple moyenne arbitraire. C'est la coordonnée macroscopique pertinente du basculement.

## 3. De Landau à Ginzburg-Landau : une variable d'ordre spatialisée

Ginzburg et Landau prolongent cette idée en autorisant la variable d'ordre à dépendre de l'espace. Au lieu d'avoir seulement une grandeur globale M(t), on considère un champ de variable d'ordre ψ(x,t). Cela permet de décrire des domaines, des interfaces, des défauts, des fronts, des textures spatiales ou des structures dissipatives étendues.

$$F[\psi) = \int_{\Omega}\left(a\psi^2 + b\psi^4 + \frac{\kappa}{2}|\nabla\psi)^2\right)dx$$

Le terme local a ψ^2 + b ψ^4 joue le rôle d'un potentiel de Landau. Il définit les états localement préférés. Le terme en gradient pénalise les variations spatiales brutales et introduit une cohérence spatiale. Cette fonctionnelle donne une lecture remarquable des systèmes étendus : la structure observable résulte d'un compromis entre tendance locale à l'ordre et coût spatial des variations. La variable d'ordre devient un champ, et l'énergie libre devient une fonctionnelle du champ.

Pour une structure dissipative décrite par une équation de diffusion-réaction, la proximité conceptuelle est forte. Une équation locale peut prendre la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f(u)$$

Lorsque le terme de réaction peut s'écrire comme la dérivée opposée d'un potentiel local, f(u) = -dW/du, l'équation prend une forme de descente de gradient sur une fonctionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F[u)}{\delta u}, F[u) = \int_{\Omega}\left(\frac{D}{2}|\nabla u)^2 + W(u)\right)dx$$

Dans ce cas, l'analogie avec Landau-Ginzburg est directe. Mais dans les structures dissipatives générales, cette énergie n'est pas toujours une énergie libre thermodynamique stricte. Il vaut mieux parler de potentiel effectif, de pseudo-énergie, de fonctionnelle de Lyapunov ou de paysage dynamique. Le principe reste cependant le même : il existe souvent une grandeur ou un petit nombre de grandeurs qui organisent la dynamique collective.

## 4. Que signifie un mode ?

Un mode est une forme cohérente de variation du système. Dans une EDP connue, les modes peuvent être des fonctions propres de l'opérateur linéarisé, des modes de Fourier, des modes propres de stabilité, des modes critiques près d'une bifurcation ou des modes dominants d'une équation

d'amplitude. Dans un système mesuré, les modes sont extraits des données. Ils représentent les formes spatiales ou organisationnelles qui expliquent le mieux les variations observées.

L'idée est que le système, malgré sa grande dimension, n'explore pas nécessairement tout l'espace des états possibles. Il peut évoluer sur une variété de faible dimension, dominée par quelques directions collectives. Ces directions sont les modes dominants. Une variable d'ordre empirique apparaît lorsque l'amplitude temporelle d'un mode dominant suffit à résumer une part importante de la dynamique.

## 5. Discrétiser la structure dissipative par le réseau de capteurs

Dans la pratique, on ne connaît pas le champ continu u(x,t) sur tout le domaine Ω. On le mesure en un nombre fini de points x_1, x_2, ..., x_N. Le réseau de capteurs transforme donc le système continu en une représentation discrète. À chaque instant, on obtient un vecteur d'état mesuré :

$$u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_N(t)\right)$$

En empilant ces vecteurs au cours du temps, on construit une matrice de données X, dont les lignes sont les instants de mesure et les colonnes les capteurs. Cette matrice est l'image expérimentale de la structure dissipative. Elle ne contient pas toute la réalité du système, mais elle contient toute la réalité accessible à travers le dispositif de mesure. La discrétisation n'est donc pas seulement un artifice numérique : elle est la traduction opérationnelle de ce que le système donne à voir.

$$X = [u_i(t_j)), j = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, N$$

Après centrage des données, on forme la matrice de covariance spatiale :

$$C = \frac{1}{T} X^T X$$

L'ACP diagonalise cette covariance. Elle fournit des vecteurs propres φ_k, qui sont les modes spatiaux dominants du système mesuré, et des valeurs propres λ_k, qui quantifient l'énergie statistique ou la variance portée par chaque mode. La décomposition s'écrit :

$$u(t) \approx \sum_{k=1}^{r} a_k(t) \phi_k$$

Les φ_k sont les formes collectives. Les a_k(t) sont les amplitudes temporelles de ces formes. Si λ_1 domine nettement le spectre, alors a_1(t) peut être interprété comme une variable d'ordre empirique :

$$X(t) = a_1(t) = \langle u(t), \phi_1 \rangle$$

Si plusieurs valeurs propres sont significatives, il faut plutôt parler d'un vecteur d'ordre :

$$X(t) = \left(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_r(t)\right)$$

Cette construction est rigoureuse du point de vue de la mesure. La variable d'ordre n'est pas choisie intuitivement : elle est construite comme la coordonnée temporelle d'un mode dominant extrait de la covariance des observations. L'ACP devient ainsi une manière expérimentale de découvrir la coordonnée collective pertinente.

## 6. Raccorder la variable d'ordre mesurée à une EDO stochastique

Une fois la variable d'ordre X(t) obtenue, la question devient celle de sa dynamique. L'hypothèse centrale est qu'un signal issu d'un système complexe peut souvent être représenté par une équation différentielle stochastique effective. Cette équation n'est pas l'équation microscopique du système. Elle est l'équation réduite de la variable d'ordre observée.

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(t)dW_1(t) + sdW_2(t)$$

Cette forme est générique parce qu'elle sépare trois contributions fondamentales. Le premier terme, -V'(X), représente la dérive structurante. Il indique vers quels régimes le système est attiré. Le potentiel V(X) joue le rôle du paysage effectif : ses minima sont les régimes stables, ses maxima ou cols sont les seuils de transition, et sa courbure renseigne sur la stabilité locale.

Le second terme, σ(t) dW_1(t), représente une volatilité lente. Il ne s'agit pas d'un simple bruit. Il s'agit de l'effet agrégé des variables éliminées, c'est-à-dire de tous les degrés de liberté qui ne sont pas conservés dans la variable d'ordre mais qui continuent à moduler son agitation. Dans un marché financier, cela peut représenter l'état latent du marché, la liquidité, le stress ou la contagion. Dans un projet industriel, cela peut représenter l'instabilité organisationnelle, les dépendances cachées, la pression du calendrier ou la qualité de coordination. Dans un clutter de mer, cela peut représenter l'état lent de la surface, l'énergie des vagues, la structuration intermittente des facettes réfléchissantes. Dans tous les cas, σ(t) représente le milieu fluctuant.

Le troisième terme, s dW_2(t), représente un bruit rapide résiduel. Il correspond aux fluctuations locales, aux chocs courts, aux erreurs de mesure ou aux effets rapides qui ne portent pas de mémoire significative. La distinction entre σ(t) dW_1(t) et s dW_2(t) permet donc de séparer l'agitation rapide du fond fluctuant lent.

## 7. Plusieurs niveaux de décomposition de l'EDO

La première décomposition est celle d'une diffusion markovienne classique :

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

Si la dérive b dérive d'un potentiel, on obtient :

$$b(X) = -V'(X), \text{ donc } dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

Cette forme suffit lorsque la variable d'ordre observée est approximativement markovienne. Mais les systèmes complexes réels montrent souvent de la mémoire, de l'intermittence et des queues lourdes. Il devient alors nécessaire d'introduire une volatilité lente ou rugueuse :

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma_t dW_t$$

La dynamique de σ_t peut être représentée par un processus lent, corrélé ou à mémoire. Une écriture possible est :

$$log(1 + \sigma_t^2) = (K_\alpha * \xi)(t)$$

où K_α est un noyau de mémoire et ξ(t) un bruit d'excitation. Cette écriture signifie que la volatilité n'est pas instantanée : elle garde la trace des sollicitations passées. Elle porte la mémoire des variables

éliminées. Ce point rejoint les idées modernes de la volatilité stochastique et de la volatilité rugueuse, dans lesquelles la log-volatilité possède une structure temporelle irrégulière et fortement corrélée à certaines échelles.

Une autre lecture, plus générale, est donnée par les méthodes de projection de Mori-Zwanzig. Lorsque l'on projette une dynamique de grande dimension sur quelques variables résolues, les variables non résolues ne disparaissent pas. Elles réapparaissent sous trois formes : une dérive effective, un terme de mémoire et un bruit. Votre modèle peut être lu comme une approximation praticable de cette structure : le potentiel porte la dérive effective, σ(t) porte une partie de la mémoire et des fluctuations des variables éliminées, et le bruit rapide porte le reste non structuré.

## 8. Peut-on lire cette dynamique dans une énergie libre ?

Le raccord avec Landau se fait par le potentiel effectif V(X). Si X est une variable d'ordre empirique, on peut chercher à reconstruire un paysage V(X) à partir des données. Dans le cas d'une diffusion stationnaire avec bruit constant, la densité stationnaire p(X) donne directement une estimation du potentiel, à une constante près :

$$V(X) \approx - \, Dlogp(X)$$

Cette relation signifie que les états fréquemment observés correspondent aux vallées du potentiel, tandis que les états rares correspondent aux barrières ou aux régions instables. Dans les systèmes complexes non gaussiens, avec volatilité variable, cette reconstruction devient plus délicate, mais l'idée demeure : le potentiel effectif résume la partie structurante de la dynamique, tandis que la volatilité explique l'intensité variable des excursions autour de cette structure.

Il faut cependant rester prudent. Dans Landau-Ginzburg, l'énergie libre possède un statut thermodynamique. Dans un système dissipatif mesuré, V(X) est plutôt une énergie libre effective, une fonction de Lyapunov approchée, ou un paysage statistique. Elle n'est pas toujours une énergie au sens physique strict. Elle est néanmoins extrêmement utile, car elle rend visible la géographie dynamique du système : attracteurs, seuils, transitions et bifurcations empiriques.

## 9. Synthèse : de la mesure à l'équation canonique

La démarche complète peut donc être résumée ainsi. Une structure dissipative réelle est observée par un réseau de capteurs. Ce réseau transforme le champ continu inconnu en une matrice de données. L'ACP ou la POD extrait les modes dominants de cette matrice. L'amplitude temporelle du premier mode, ou de quelques modes, devient une variable d'ordre empirique. Cette variable d'ordre peut ensuite être modélisée par une EDO stochastique effective où le potentiel représente la structure, la volatilité lente représente la complexité des variables éliminées et le bruit rapide représente les fluctuations résiduelles.

$$\text{structure réelle} \rightarrow \text{capteurs} \rightarrow \text{matrice X} \rightarrow \text{modes } \varphi\text{_k} \rightarrow \text{variables a_k(t)} \rightarrow \text{EDO effective}$$

$$dX_t = - \, V'\left(X_t\right)dt \, + \, \sigma(t)dW_1(t) + \, sdW_2(t)$$

Cette formulation généralise l'intuition de Landau. Chez Landau, on postule une variable d'ordre pour lire une transition de phase. Dans l'approche par mesures, on extrait une variable d'ordre à partir des données. Chez Landau-Ginzburg, l'énergie libre organise les états spatialisés de la variable d'ordre.

Dans l'approche des systèmes complexes, le potentiel effectif V(X) organise les régimes globaux, tandis que la volatilité lente rend compte de la mémoire, de l'intermittence et de l'action des degrés de liberté éliminés. L'EDO devient alors une forme normale empirique du signal complexe : elle ne décrit pas tout le système, mais elle donne une représentation compacte, interprétable et exploitable de sa dynamique collective.

## 10. Repères bibliographiques


- Landau, L. D. (1937). On the theory of phase transitions. Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, 7, 19-32.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. Statistical Physics. Pergamon / Elsevier. Référence classique pour l'énergie libre, les transitions de phase et les variables d'ordre.
- Ginzburg, V. L. and Landau, L. D. (1950). On the theory of superconductivity. Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, 20, 1064-1082.
- Haken, H. Synergetics: An Introduction. Springer. Référence importante pour les variables d'ordre, l'esclavage des modes rapides et l'auto-organisation.
- Holmes, P., Lumley, J. L. and Berkooz, G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge University Press. Référence majeure sur la POD et les structures cohérentes en turbulence.
- Chorin, A. J., Hald, O. H. and Kupferman, R. (2000). Optimal prediction and the Mori-Zwanzig representation of irreversible processes. Proceedings of the National Academy of Sciences, 97(7), 2968-2973.
- Gouasmi, A., Parish, E. J. and Duraisamy, K. (2017). A priori estimation of memory effects in reduced-order models of nonlinear systems using the Mori-Zwanzig formalism. Proceedings of the Royal Society A, 473.
- Gatheral, J., Jaisson, T. and Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. Quantitative Finance, 18(6), 933-949.
- Comte, F. and Renault, E. (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. Mathematical Finance, 8(4), 291-323.
- Pavliotis, G. A. and Stuart, A. M. Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. Springer. Référence utile pour le passage des dynamiques multivariées aux équations effectives.