Variables d’ordre, structures dissipatives et vision unifiée des systèmes complexes

Table des matières

Résumé 3

Introduction 5

1. Les structures dissipatives et la recherche d’une variable d’ordre 5

2. L’équation d’amplitude et la bifurcation de Hopf 6

3. Le rôle du bruit et la dynamique stochastique 6

4. L’énergie des fluctuations et l’intermittence 7

5. Analogie turbulence – finance 7

6. Spectres en loi de puissance 7

Conclusion 8

Réduction des diffusions stochastiques vers une forme canonique : séparation, transformations et temps effectif 8

Modélisation minimale des systèmes complexes à partir des données du CAC 40 12

Description du Modèle générique de système complexe 14

Une approche physique de l’EDA : potentiel effectif, volatilité latente et dynamiques stochastiques 18

- Modèle 18
- Reconstruction empirique du potentiel effectif 19
  - Détection des transitions critiques 20
- Extension vers une approche PINN 20
- Vers une physique empirique des données 20

Système dynamique turbulent à potentiel quartique et intensité latente à mémoire longue 21

1. Point de départ : une dynamique de gradient bruitée 21

2. Loi stationnaire conditionnelle de x pour une intensité fixée 22

3. De la loi conditionnelle à la loi stationnaire globale 22

4. Quelle loi choisir pour σ dans le cadre d'une cascade d'échelles ? 22

5. Déduction de la loi de σ à partir de la loi gamma de Y 23

6. Pourquoi négliger le facteur logarithmique est raisonnable 24

7. Approximation par méthode du col en négligeant Z(σ) 24

8. Cas simple où le bruit résiduel s tend vers zéro 24

9. Valeur de la loi stationnaire au point du col 25

10. Lecture du résultat pour un potentiel quartique à deux cuvettes 26

11. Interprétation en termes de turbulence 26

12. Bilan théorique 26

13. Conclusion physique 27

14. Récapitulatif des équations clés 27

De l'EDS à l'équation de Kolmogorov généralisée 28

1. Point de départ et objectif de la réduction 28

2. Réécriture de l'EDS et définition des variables 28

3. Hypothèses de fermeture retenues 29

3.1 Potentiel régulier 29

3.2 Volatilité lente, stationnaire et à mémoire longue 29

3.3 Décomposition moyenne plus fluctuation 30

3.4 Approximation quasi-adiabatique 30

4. Équation de Fokker-Planck moyenne 30

5. Calcul de la moyenne et de la covariance de la diffusion 31

6. Élimination de la variable latente et équation de Kolmogorov généralisée 31

7. Fermeture exploitable sous hypothèse quasi-adiabatique 32

8. Cas d'un noyau mémoire en loi de puissance 32

9. Cas particulier du potentiel quartique 33

10. Réécriture fractionnaire en temps 33

11. Domaine de validité et interprétation physique 33

Intérêt de la densité p(x,t) 34

La densité p(x,t) comme objet central du modèle 34

Ce que la densité permet de lire sur le système 34

Intérêt de p(x,t) en data science 35

Comment exploiter l'équation en pratique 35

Synthèse finale 36

Variable d’ordre : existence, portée et limites dans les systèmes complexes 36

Comment identifier concrètement une variable d’ordre dans un système complexe ? 40

Variable d’ordre, potentiel, mémoire et bruit : vers une forme générale du modèle réduit des systèmes complexes 44

Résumé

Ce chapitre cherche à construire une vision unifiée des systèmes complexes à partir de la notion de variable d’ordre. L’idée centrale est que des phénomènes très différents, comme la turbulence, les structures dissipatives ou les marchés financiers, peuvent être décrits à l’aide d’une variable collective dominante gouvernée par une équation d’amplitude non linéaire et bruitée. Cette perspective s’inscrit dans l’héritage de Landau et des transitions de phase : au lieu de suivre l’immense détail microscopique, on cherche une grandeur macroscopique capable de résumer le comportement global du système. Dans le cas des marchés financiers, le log-prix peut jouer ce rôle.

Le texte montre ensuite que cette variable d’ordre peut être décrite par une dynamique stochastique dans un paysage de potentiel. Le potentiel effectif représente la topologie des régimes possibles : états stables, barrières, transitions. Le bruit, quant à lui, ne doit pas être

vu comme un simple terme secondaire, mais comme une composante essentielle de la dynamique. L'originalité du cadre proposé est de faire dépendre l'intensité du bruit non pas de l'état du système, mais du temps, au moyen d'une volatilité latente σ(t)\sigma(t)σ(t) à mémoire longue. Le modèle prend alors la forme d'une variable évoluant dans un potentiel sous l'effet d'une agitation temporelle multi-échelle.

Cette séparation entre potentiel V(x)V(x)V(x) et volatilité latente σ(t)\sigma(t)σ(t) donne une lecture physique très claire. Le potentiel décrit le paysage morphologique du système, c'est-à-dire la forme des régimes, des bifurcations et des catastrophes éventuelles. La volatilité décrit au contraire la "météo interne" du système, autrement dit l'organisation temporelle de ses fluctuations, de ses paquets d'activité et de son intermittence. Pour stabiliser l'analyse, le texte introduit la variable logarithmique y(t)=ln(1+σ(t)2)y(t)=\ln(1+\sigma(t)^2)y(t)=ln(1+σ(t)2), qui porte la mémoire longue et peut être modélisée comme la sortie d'un filtre à longue mémoire appliqué à un bruit blanc.

À partir de là, le document propose une méthode d'EDA de type physique. Il ne s'agit plus seulement de calculer des statistiques descriptives, mais d'identifier conjointement le potentiel effectif, la volatilité latente et le noyau mémoire. La densité empirique permet de reconstruire le potentiel, l'énergie locale du signal permet d'estimer σ(t)2\sigma(t)^2σ(t)2, et l'étude de la série transformée permet de caractériser la mémoire longue. L'EDA devient ainsi une procédure d'identification dynamique visant à reconstruire le couple (V(x),σ(t))(V(x), \sigma(t))(V(x),σ(t)), plutôt qu'un simple ajustement de diffusion dépendant de l'état.

Le chapitre approfondit ensuite cette idée dans le cas d'un potentiel quartique à deux cuvettes, soumis à une intensité latente turbulente. En conditionnant la dynamique par une valeur fixée de σ\sigmaσ, on obtient une loi stationnaire de type Gibbs dans le potentiel. Puis, en intégrant sur une distribution de σ\sigmaσ choisie dans l'esprit d'une cascade d'échelles, on obtient une loi stationnaire globale à queues épaisses. Le choix d'une loi gamma pour la variable logarithmique de volatilité conduit à une loi de puissance pour σ\sigmaσ, puis à une densité stationnaire globale exprimable en fonction du potentiel par méthode du col. Le résultat majeur est qu'un double puits conserve une structure bimodale, tandis que la loi lourde de σ\sigmaσ introduit l'intermittence et les grandes excursions.

Enfin, le texte dérive une équation de Kolmogorov généralisée à partir de l'équation stochastique initiale. Cette équation fait apparaître un terme mémoire, conséquence directe de la volatilité lente et corrélée. La densité p(x,t)p(x,t)p(x,t) devient alors l'objet central du modèle : elle permet de lire les régimes, les transitions, les probabilités de dépassement, les risques et les temps de résidence. En data science, cette densité joue un rôle d'interface entre données, théorie et simulation. Elle permet de construire non seulement un modèle explicatif, mais aussi un tableau de bord probabiliste du système. Le chapitre se conclut ainsi sur une idée forte : l'analyse des systèmes complexes peut être pensée comme une

physique empirique des données, où l'on reconstruit à partir des observations un paysage de potentiel, une volatilité latente et une loi de mémoire.

Le chapitre se termine par une réflexion sur la notionn de variable d'ordre (existence, construction) et sur la signification du modèle réduit quant à la variable d'ordre.

Introduction

L'objectif de ce texte est de faire apparaître progressivement une vision unifiée : celle selon laquelle de nombreux systèmes complexes — turbulence, structures dissipatives, marchés financiers — peuvent être compris à partir de la dynamique d'une variable d'ordre gouvernée par une équation d'amplitude non linéaire et bruitée.

Dans l'étude des systèmes complexes hors équilibre, une difficulté fondamentale apparaît immédiatement : ces systèmes possèdent un très grand nombre de degrés de liberté. Un fluide turbulent, une réaction chimique oscillante ou un marché financier impliquent chacun des millions d'interactions élémentaires. Décrire directement ces interactions est pratiquement impossible.

La stratégie classique de la physique consiste alors à chercher une variable collective capable de résumer le comportement global du système. Cette idée est au cœur de la théorie des transitions de phase développée par Lev Landau. Landau introduisit le concept de variable d'ordre, c'est-à-dire une grandeur macroscopique qui décrit l'état collectif du système.

1. Les structures dissipatives et la recherche d'une variable d'ordre

Dans de nombreux phénomènes physiques, la variable d'ordre correspond à l'amplitude d'une structure émergente. Par exemple, dans la convection de Bénard, elle mesure l'intensité des rouleaux convectifs qui apparaissent lorsque le fluide est chauffé par le bas. Dans un laser, elle correspond à l'amplitude du champ électromagnétique cohérent. Dans une réaction chimique oscillante, elle décrit l'amplitude de l'oscillation des concentrations.

La même idée peut être appliquée à des systèmes beaucoup plus complexes. Dans un écoulement turbulent, on peut considérer que certaines structures cohérentes — tourbillons ou filaments — possèdent leur propre amplitude dynamique. Dans un marché financier, une variable macroscopique comme le log-prix peut jouer le rôle d'une variable collective résultant de l'interaction de milliers d'agents.

Système	Variable d'ordre
Convection de Bénard	Amplitude des rouleaux convectifs
Laser	Amplitude du champ optique
Turbulence naissante	Amplitude du mode instable
Réaction chimique oscillante	Amplitude de l'oscillation chimique
Marché financier	Log-prix

2. L'équation d'amplitude et la bifurcation de Hopf

Une fois la variable d'ordre identifiée, la dynamique du système peut souvent être décrite par une équation simple appelée équation d'amplitude. Près du seuil d'instabilité, la forme la plus générale de cette équation est remarquablement universelle.

Équation d'amplitude :
$dA/dt = \mu A - gA^3$

Dans cette équation, le paramètre μ mesure la distance au seuil d'instabilité. Lorsque μ est négatif, les perturbations sont amorties et l'amplitude revient vers zéro. Lorsque μ devient positif, une oscillation stable apparaît. Le terme cubique $-gA^3$ représente la saturation non linéaire qui empêche l'amplitude de croître indéfiniment.

Cette équation peut être interprétée comme la dynamique d'une particule dans un potentiel quartique :

$$U(A) = -(\mu/2)A^2 + (g/4)A^4$$

La valeur de l'amplitude stable est alors :

$A^* = \sqrt{\mu/g}$

3. Le rôle du bruit et la dynamique stochastique

Dans un système réel, il est impossible d'ignorer les fluctuations. Les interactions microscopiques, les perturbations externes ou les fluctuations thermiques introduisent toujours une composante aléatoire dans la dynamique.

L'équation d'amplitude devient alors :

$$\frac{dA}{dt} = F(A) + \eta(t)$$

où F(A) représente la dynamique déterministe et η(t) un bruit aléatoire.

Cette équation décrit un système dans lequel l'amplitude fluctue autour de sa valeur stable. Le bruit pousse le système à explorer différentes amplitudes, tandis que la non-linéarité cubique agit comme une force de rappel qui limite ces excursions.

4. L'énergie des fluctuations et l'intermittence

Pour comprendre ces fluctuations, il est utile d'introduire une quantité énergétique associée à la variable d'ordre :

$$E = \left(\frac{dA}{dt}\right)^2$$

Cette quantité peut être interprétée comme une énergie de fluctuation. Elle joue un rôle analogue à l'énergie cinétique dans un écoulement turbulent.

Domaine	Variable	Énergie associée
Turbulence	Vitesse du fluide	u^2
Oscillateur non linéaire	Amplitude A	A^2
Marché financier	Variation du prix	$(dx/dt)^2$

5. Analogie turbulence – finance

Dans un écoulement turbulent, la vitesse du fluide fluctue de manière complexe et son énergie cinétique varie fortement dans le temps. Dans un marché financier, les prix évoluent sous l'effet des transactions et des flux d'information. La variable observée peut être le log-prix x(t), tandis que la volatilité correspond à une mesure de l'intensité des fluctuations.

6. Spectres en loi de puissance

Dans de nombreux systèmes complexes, on observe un spectre de puissance suivant une loi d'échelle :

$$S(f) \approx 1/f^s$$

où f est la fréquence et s un exposant caractéristique. Cette loi indique l'absence d'échelle de temps caractéristique et l'existence d'une hiérarchie d'échelles temporelles.

Système	Variable mesurée	Spectre typique
Turbulence	Vitesse	$1/f^{(5/3)}$
Systèmes critiques	Variable d'ordre	1/f
Marchés financiers	Log-prix	$1/f^2$
Volatilité financière	Variance	1/f

Conclusion

Dans de nombreux systèmes complexes hors équilibre, la dynamique globale peut être décrite par une variable d'ordre obéissant à une équation d'amplitude non linéaire et bruitée. Cette dynamique produit des fluctuations intermittentes dont l'énergie possède souvent une mémoire longue et un spectre en loi de puissance.

Ces propriétés apparaissent aussi bien dans la turbulence que dans les marchés financiers. Elles reflètent l'existence d'une hiérarchie d'échelles temporelles et l'absence d'un temps caractéristique unique.

Ainsi, derrière des phénomènes très différents, on peut reconnaître une même architecture dynamique : celle d'un système complexe proche d'une instabilité, où une variable d'ordre fluctue sous l'effet du bruit et de la non-linéarité. Cette perspective ouvre la voie à une compréhension unifiée de nombreux systèmes naturels et sociaux.

Réduction des diffusions stochastiques vers une forme canonique : séparation, transformations et temps effectif

Lorsqu'on étudie des séries temporelles issues de systèmes complexes — qu'il s'agisse de turbulence, de marchés financiers, de phénomènes de fatigue des structures ou de systèmes écologiques — il est fréquent de modéliser la dynamique observée à l'aide d'une équation différentielle stochastique. Dans sa forme la plus générale, une diffusion unidimensionnelle peut être écrite :

$$dx = F(x,t)dt + g(x,t)dW_t$$

Dans cette équation, la fonction F(x,t) représente la dérive déterministe du système, tandis que g(x,t) décrit l'intensité des fluctuations stochastiques. Le processus W_t est un

mouvement brownien standard qui modélise l'agitation aléatoire résultant des nombreux degrés de liberté microscopiques du système.

Cette formulation est extrêmement générale, mais elle présente un inconvénient majeur : la dépendance simultanée de g par rapport à l'état x et au temps t rend souvent l'analyse difficile. Pour comprendre la structure dynamique du système, il est donc naturel de chercher à simplifier cette équation en la transformant vers une forme plus canonique.

L'intuition fondamentale consiste à se demander s'il est possible de factoriser le coefficient de diffusion sous la forme :

$$g(x,t) = H(x)s(t)$$

Une telle factorisation serait très utile, car elle séparerait clairement deux effets physiques différents. La fonction H(x) représenterait une modulation de la diffusion liée à la position dans l'espace des états, tandis que s(t) décrirait l'intensité globale de l'agitation du système à un instant donné. Dans ce cas, la dynamique pourrait être interprétée comme une exploration d'un paysage dynamique par une particule soumise à une agitation dont l'intensité varie dans le temps.

Cependant, une telle séparation n'est pas toujours possible. Mathématiquement, la condition pour qu'une fonction g(x,t) soit exactement séparable est très restrictive. Si l'on suppose que g est positive et suffisamment régulière, on peut prendre son logarithme. La fonction ln g(x,t) doit alors pouvoir s'écrire comme la somme d'une fonction de x et d'une fonction de t. Cette propriété équivaut à l'annulation de la dérivée croisée :

$$\partial^2/\partial x \partial t[lng(x,t)) = 0$$

Lorsque cette condition est satisfaite, la séparation est possible et l'équation stochastique prend immédiatement la forme :

$$dx = F(x,t)dt + H(x)s(t)dW_t$$

Dans ce cas particulier, une transformation bien connue de la théorie des diffusions permet d'éliminer la dépendance spatiale du bruit. Cette transformation est appelée transformation de Lamperti. Elle consiste à introduire une nouvelle variable d'état :

$$y = \varphi(x)$$

définie par :

$$\varphi'(x) = 1/H(x)$$

Autrement dit :

$$y = \int (1/H(u))du$$

Cette transformation modifie la métrique de l'espace des états de manière à rendre les fluctuations homogènes. Lorsque l'on applique la formule d'Itô à cette transformation, on obtient une nouvelle équation stochastique pour y. Le coefficient de diffusion devient alors indépendant de l'état et ne dépend plus que du temps :

$$dy = F(y,t)dt + s(t)dW_t$$

La dérive $\tilde{F}(y,t)$ est une fonction modifiée qui inclut un terme correctif provenant du calcul stochastique d'Itô. Ce terme correctif dépend de la dérivée de H(x) et reflète le fait que la transformation modifie la structure locale des fluctuations.

Cette transformation révèle une propriété importante : lorsqu'une diffusion possède un coefficient séparable, il est toujours possible de se ramener à une dynamique dont la diffusion dépend uniquement du temps. Le système peut alors être interprété comme une variable d'état évoluant dans un paysage dynamique sous l'effet d'une volatilité temporelle.

Il est toutefois rare que la séparation g(x,t) = H(x)s(t) soit exactement vérifiée dans les systèmes réels. La question devient alors de savoir si une transformation plus générale peut simplifier la structure du bruit. Une stratégie consiste à introduire une transformation de l'état dépendant éventuellement du temps :

$$y = \varphi(x,t)$$

En choisissant convenablement la dérivée partielle $\partial_x \varphi$, il est souvent possible de rendre le coefficient de diffusion indépendant de x. Le prix à payer est l'apparition de nouveaux termes dans la dérive, liés à la dérivée temporelle de la transformation. Cette opération correspond à une normalisation locale de la diffusion et permet souvent de réduire l'équation à une forme plus simple.

Une autre transformation utile consiste à modifier l'échelle du temps. Lorsque l'équation transformée possède un coefficient de diffusion dépendant uniquement du temps :

$$dy = A(y,t)dt + s(t)dW_t$$

on peut introduire un temps effectif :

$$\tau(t) = \int_0^t s(u)^2 du$$

Cette transformation correspond à la variance cumulée du processus brownien modulé par s(t). Dans le nouveau temps τ, le bruit peut souvent être réécrit sous la forme d'un mouvement brownien standard. L'équation devient alors :

$$dy = F(y,\tau)d\tau + dB_\tau$$

Cette forme est particulièrement simple. Elle correspond à une diffusion avec bruit additif constant dans un potentiel effectif. La dynamique du système peut alors être étudiée à l'aide des outils classiques de la physique statistique, notamment l'équation de Fokker–Planck et l'analyse des transitions entre bassins d'attraction.

Même lorsque la séparation exacte du coefficient de diffusion est impossible, il est souvent possible d'obtenir une séparation approchée. Une fonction de deux variables peut en effet être approximée par une somme de fonctions séparables :

$$g(x,t) \approx \sum_{k=1}^{r} H_k(x)s_k(t)$$

Cette décomposition est analogue à la décomposition en valeurs singulières d'une matrice. Dans de nombreux cas pratiques, un seul terme dominant suffit à capturer l'essentiel de la structure du coefficient de diffusion. On obtient alors une approximation :

$$g(x,t) \approx H_1(x)s_1(t)$$

qui permet de ramener le système vers la forme canonique étudiée précédemment.

Cette observation est particulièrement importante pour l'analyse exploratoire des données. Dans de nombreux systèmes complexes, la dynamique effective peut être décrite par une variable d'ordre évoluant dans un paysage de potentiel sous l'effet d'une volatilité temporelle. L'équation obtenue après transformation ou approximation prend alors la forme :

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_t$$

Dans cette représentation, le potentiel V(x) décrit la structure des régimes stables du système, tandis que la fonction σ(t) représente l'intensité de l'agitation collective. Cette séparation permet d'interpréter la dynamique comme l'exploration stochastique d'un paysage de potentiel dont la température effective varie dans le temps.

Une telle représentation est particulièrement adaptée à l'étude des transitions de régime. Lorsque la forme du potentiel se modifie, un minimum peut disparaître ou se rapprocher d'un maximum, ce qui rend le système plus sensible aux fluctuations. La volatilité temporelle joue alors un rôle déterminant dans le déclenchement de transitions soudaines entre différents états.

Ainsi, même si une diffusion générale ne peut pas toujours être rendue exactement séparable, les transformations de Lamperti, les changements de temps et les approximations de rang faible permettent souvent de ramener le problème à une forme

canonique simple. Cette forme correspond précisément au modèle d'une variable évoluant dans un potentiel sous l'effet d'une volatilité temporelle.

Cette observation donne une base conceptuelle solide à une approche physique de l'analyse exploratoire des données. Elle suggère que de nombreux systèmes complexes observés dans la nature ou dans les systèmes socio-économiques peuvent être décrits, au premier ordre, par une dynamique de type Langevin dans un paysage de potentiel modulé par une agitation temporelle.

Modélisation minimale des systèmes complexes à partir des données du CAC 40

Au départ, la démarche ne naît pas d'une théorie abstraite, mais d'une confrontation directe avec des données réelles. Le point de départ est l'observation empirique des séries temporelles du CAC 40. Lorsqu'on examine ces données sur une longue période, plusieurs propriétés statistiques apparaissent de manière très robuste. La distribution des rendements possède des queues épaisses : les événements extrêmes sont beaucoup plus fréquents que ce que prédirait un modèle gaussien classique. Les rendements eux-mêmes sont pratiquement non autocorrélés, ce qui signifie que le marché ne présente pas de mémoire directionnelle simple. En revanche, l'intensité des fluctuations, mesurée par les carrés des rendements ou par la volatilité, présente une mémoire longue : les périodes de forte agitation ont tendance à se regrouper dans le temps. Ce phénomène est connu sous le nom de volatility clustering.

Ces propriétés constituent ce que la finance empirique appelle les « faits stylisés » des marchés financiers. Elles sont connues depuis les années 1990, mais elles restent difficiles à reproduire avec les modèles traditionnels. Les modèles classiques de diffusion gaussienne, comme ceux qui sont à la base de la théorie de Black-Scholes, supposent une volatilité constante et produisent des distributions trop fines. Les modèles GARCH introduisent une volatilité variable, mais leur mémoire reste relativement courte. Face à cette situation, une question naturelle apparaît : existe-t-il une structure dynamique simple capable de reproduire simultanément ces propriétés ?

La démarche adoptée consiste alors à chercher non pas un modèle financier spécialisé, mais une structure dynamique minimale qui puisse expliquer ces phénomènes. L'idée centrale est d'introduire une variable d'ordre x(t) représentant l'état global du système étudié. Dans le cas d'un marché, cette variable peut être interprétée comme une composante principale du mouvement global du marché ou comme une amplitude collective résultant de l'interaction des nombreux agents. L'évolution de cette variable est décrite par une équation différentielle stochastique. La dynamique déterministe est construite à partir d'un potentiel non linéaire simple, tandis que les fluctuations sont introduites sous forme de bruit aléatoire.

$$dx = (\mu x - g\,x^3)\,dt + \sigma(t)\,dW_1 + s\,dW_2$$

Dans cette équation, le terme ($\mu x - g\,x^3$) représente la dynamique déterministe du système. Il correspond à ce que la théorie des bifurcations appelle la forme normale d'une bifurcation de Hopf ou d'une bifurcation de type pitchfork stabilisée. Le potentiel associé est quartique :

$$U(x) = -(\mu/2)x^2 + (g/4)x^4$$

Ce potentiel possède deux minima stables séparés par une barrière. Dans un langage physique, cela signifie que le système possède plusieurs régimes possibles. Dans un marché financier, ces régimes peuvent correspondre à des périodes relativement stables et à des périodes instables. Dans d'autres contextes, ces minima peuvent représenter différents états d'un système complexe.

Cependant, la non-linéarité du potentiel ne suffit pas à produire la richesse statistique observée dans les données. L'élément décisif du modèle réside dans l'introduction d'une volatilité fluctuante $\sigma(t)$. Cette volatilité n'est pas constante : elle possède une mémoire longue et évolue elle-même dans le temps selon une dynamique corrélée. On peut par exemple modéliser son logarithme à l'aide d'un filtre autorégressif ou d'un processus aléatoire corrélé. La volatilité agit alors comme une enveloppe lente qui module l'intensité du bruit appliqué au système.

Ce mécanisme a des conséquences très importantes. Lorsque la volatilité est faible, le système reste proche d'un régime stable et les fluctuations restent modérées. Lorsque la volatilité augmente, le bruit devient plus intense et le système peut franchir la barrière du potentiel, ce qui provoque des excursions importantes. La combinaison de la non-linéarité du potentiel et de la variabilité lente de la volatilité produit naturellement de l'intermittence : des périodes calmes alternent avec des périodes d'agitation intense.

Une fois cette structure identifiée à partir des données du CAC 40, une observation importante apparaît : la même combinaison d'ingrédients existe dans de nombreux systèmes complexes. Beaucoup de phénomènes physiques, technologiques ou organisationnels peuvent être décrits par une variable macroscopique évoluant dans un paysage de potentiel et soumise à des fluctuations multi-échelles.

Dans le cas de la surface de la mer ou de la turbulence de surface, la variable d'ordre peut être interprétée comme l'amplitude d'un mode dominant de la surface. Dans les systèmes financiers, elle correspond à un mode collectif du marché. Dans la gestion de projet, elle peut représenter la dérive globale du coût ou du calendrier d'un projet.

À cette structure dynamique vient ensuite s'ajouter une seconde couche conceptuelle : le modèle d'endommagement. Dans de nombreux systèmes réels, les fluctuations peuvent produire un effet cumulatif conduisant progressivement à la dégradation du système. On

introduit alors une variable d'endommagement D(t) dont l'évolution dépend de l'intensité du signal dynamique.

$$\frac{dD}{dt} = f(x(t))$$

Cette extension permet d'étudier des phénomènes de fatigue et de durée de vie. Elle relie la dynamique instantanée du système à l'évolution lente de sa fiabilité. L'ensemble forme aujourd'hui un cadre conceptuel cohérent dans lequel un modèle stochastique simple capture les mécanismes fondamentaux de l'intermittence dans les systèmes complexes.

Description du Modèle générique de système complexe

Il faut en effet distinguer clairement deux cadres théoriques qui, à première vue, peuvent sembler voisins, mais qui relèvent en réalité de philosophies de modélisation différentes. Dans le cadre classique, on écrit une diffusion de la forme

$$dx = F(x)dt + G(x)dW$$

où le bruit dépend de l'état x. Dans votre cadre, au contraire, la bonne écriture devient

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

où le bruit principal dépend du temps par l'intermédiaire d'une volatilité ou d'une intensité fluctuante σ(t). Cette différence n'est pas un simple détail technique. Elle modifie profondément la lecture du système. Dans le premier cas, la complexité est essentiellement portée par la géométrie de l'espace des états, puisque l'intensité du bruit varie avec la position x. Dans le second cas, la non-stationnarité et la complexité proviennent d'abord d'une agitation temporelle multi-échelle qui module la dynamique. On est alors beaucoup plus proche d'un modèle à volatilité latente, ou à enveloppe stochastique corrélée, que d'un simple processus de Langevin à diffusion G(x).

La bonne écriture conceptuelle de votre approche consiste donc à considérer que V(x) décrit le paysage morphologique du système, c'est-à-dire la structure des régimes, des bifurcations et des catastrophes éventuelles. Le terme s dW_2 représente un fond de bruit rapide, homogène, qui modélise une agitation de base. Le terme σ(t) dW_1 constitue quant à lui la composante essentielle de complexité : il représente une intensité de fluctuation variable dans le temps, susceptible de posséder une persistance, une mémoire longue, voire une structure multi-échelle.

Dans ce cadre, l'EDA change de nature. Elle ne consiste plus à estimer une diffusion conditionnelle D(x) en fonction de x, comme on le ferait dans un modèle où l'aléa dépend principalement de l'état. Elle consiste désormais à séparer deux objets complémentaires. D'une part, il faut reconstruire la dérive structurante

$$F(x) = -\ V'(x)$$

et, d'autre part, il faut reconstruire la dynamique temporelle de l'agitation σ(t). Autrement dit, l'objet pertinent n'est plus un simple potentiel ou une simple diffusion d'état. Ce que l'on cherche, c'est le couple

$$(V(x), \sigma(t))$$

Cette reformulation est beaucoup plus riche, car elle permet de décrire des systèmes dans lesquels la structure des états reste relativement simple tandis que l'intensité des fluctuations est elle-même un processus complexe, possiblement à mémoire longue.

Votre manière d'estimer σ(t) à partir de l'énergie locale du signal est, dans cette optique, tout à fait naturelle. Si l'on regarde localement la dynamique, on peut écrire de façon heuristique

$$\frac{dx}{dt} \approx -\ V'(x) + \ termebruité$$

Dans ce cas, les variations quadratiques ou quasi quadratiques du signal donnent accès à l'intensité instantanée des fluctuations. En temps discret, cela revient à introduire une quantité du type

$$r_t \ = \ (x_{t+1} \ - \ x_t) \ / \ \Delta t$$

ou, selon la convention retenue, simplement les incréments Δx_t, puis à construire un estimateur d'énergie locale à partir de

$$r_t^2 \ \ ou \ \ (\Delta x_t)^2$$

L'idée est alors de considérer que cette quantité reflète l'ordre de grandeur de $\sigma(t)^2$, au moins après lissage ou moyennage local. Bien entendu, l'égalité n'est jamais exacte. Il existe toujours un mélange entre la contribution de la dérive $-V'(x)$, la contribution du bruit additif s dW_2 et la contribution du bruit modulé $\sigma(t)\ dW_1$. Mais comme variable exploratoire, $(dx/dt)^2$ ou $(\Delta x)^2$ constitue un excellent point de départ.

Le passage à la variable

$$y(t) = \ ln\left(1 \ + \ \sigma(t)^2\right)$$

est lui aussi particulièrement pertinent. Cette transformation logarithmique possède plusieurs avantages importants. Elle compresse d'abord les grandes valeurs et stabilise l'estimation lorsque la volatilité présente des pics violents ou des queues lourdes. Elle garantit ensuite une variable bien définie, sans singularité en zéro. Enfin, elle permet de transformer un mécanisme multiplicatif en une représentation additive, ce qui simplifie considérablement l'analyse. Dans votre perspective, la variable réellement porteuse de structure n'est donc plus directement σ(t), mais cette énergie logarithmique y(t). C'est elle qui porte la mémoire longue du système.

Lorsque vous dites que $\ln(1 + \sigma(t)^2)$ est corrélé avec un bruit blanc via une mémoire longue, vous décrivez en réalité un schéma du type

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)\eta(n - k)$$

où η est un bruit blanc et où les coefficients a(k) décroissent lentement. Ce point est fondamental. On n'est plus dans un modèle ARMA de mémoire courte, mais dans un filtre linéaire à mémoire longue. Si les coefficients a(k) décroissent exponentiellement, la mémoire est courte. S'ils décroissent selon une loi de puissance, la mémoire devient longue. Votre modèle prend alors une forme hiérarchique très générale. On part de l'équation

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

on introduit ensuite

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

puis on modélise cette nouvelle variable par

$$y(n) = \sum_{k} \geq 0 a(k)\eta(n - k)$$

Cette architecture est très puissante, parce qu'elle sépare explicitement deux dimensions du problème. D'un côté, V(x) décrit la topologie des états, c'est-à-dire la géométrie lente du système : états stables, bistabilité, seuils, catastrophes au sens de Thom, ou structures d'amplitude de type Hopf. De l'autre, y(t), donc indirectement σ(t), décrit la texture temporelle des fluctuations : phases calmes et agitées, regroupements de volatilité, intermittence et mémoire longue.

C'est ici que votre approche prend toute sa force physique. Le potentiel V(x) décrit la structure lente du système. Il fixe la géométrie du possible. La fonction σ(t), quant à elle, décrit le niveau d'agitation du milieu. Elle joue un rôle analogue à l'intensité turbulente dans un écoulement, à la volatilité dans un marché financier, à l'intensité d'excitation dans un système biologique ou à la variabilité du chargement dans un problème de fatigue. Autrement dit, V(x) décrit le paysage, tandis que σ(t) décrit la météo interne du système. Cette distinction est décisive, car deux systèmes peuvent partager le même potentiel effectif et pourtant avoir des comportements statistiques très différents selon la mémoire et la structure de σ(t).

Dans cette perspective, l'EDA générale des systèmes complexes peut être organisée en deux volets étroitement articulés. Le premier volet consiste à reconstruire le paysage V(x). À partir de la série x(t), on estime une dérive moyenne conditionnelle, ou directement un potentiel effectif, afin d'identifier si le système est mono-stable, bistable, proche d'une catastrophe de pli, proche d'une cusp, ou proche d'une structure de Hopf réduite en

amplitude. Le second volet consiste à reconstruire la dynamique de σ(t). À partir de $(dx/dt)^2$ ou des incréments carrés, on construit une estimation de $\sigma(t)^2$, puis on passe à

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

et l'on étudie alors son autocorrélation, sa densité spectrale, son éventuelle loi de puissance et, surtout, le noyau mémoire a(k) du filtre qui la génère.

L'EDA devient ainsi une procédure d'identification conjointe. On ne cherche plus un simple coefficient G(x), mais une structure plus complète que l'on peut résumer sous la forme

$$EDA \longrightarrow (V(x), a(k), s)$$

Cette formulation est beaucoup plus précise et beaucoup plus générale qu'une simple diffusion d'état. Le modèle G(x) suppose que l'intensité du bruit dépend de la position dans l'espace des états. Cela convient à certaines situations, mais pas à toutes. Votre approche est particulièrement bien adaptée aux systèmes où l'on observe des phases calmes et agitées, du clustering de volatilité, une persistance de l'intensité des fluctuations et des changements de régime statistiques sans modification immédiate de la topologie de V. C'est exactement ce que l'on rencontre dans la turbulence, dans la finance, dans certains signaux physiologiques, dans les chargements de fatigue irréguliers ou encore dans des processus de projet soumis à un environnement fluctuant. Dans ces cas, la complexité est moins dans la géométrie de x que dans la mémoire portée par σ(t).

On peut dès lors reformuler proprement votre programme méthodologique. On part d'une série x(t), que l'on suppose gouvernée par

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

À partir de cette hypothèse, on estime d'abord le potentiel V(x) à partir de la dynamique moyenne. On estime ensuite un proxy de $\sigma(t)^2$ à partir de $(dx/dt)^2$ ou des incréments carrés. On introduit alors

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

que l'on modélise comme un processus filtré à mémoire longue. Puis l'on simule le modèle complet et on le compare aux données à partir des densités, des corrélations, de l'intermittence, des temps de résidence et des queues de distribution. On obtient ainsi un cadre générique de calibration qui n'est plus simplement une extension de la théorie des catastrophes, mais un schéma général où Thom fournit les formes de potentiel, la physique stochastique fournit la dynamique de Langevin et la mémoire longue de σ(t) fournit la texture multi-échelle.

La formulation la plus juste de votre intuition pourrait alors être énoncée ainsi : les catastrophes décrivent la forme du paysage, et la mémoire longue de σ(t) décrit la manière

dont le système explore ce paysage. Cette phrase résume remarquablement bien la logique d'ensemble de votre approche.

Il faut donc corriger la formulation plus ancienne qui consistait à écrire

$$dx = F(x)dt + G(x)dW$$

Cette écriture, bien qu'utile dans certains contextes, n'est pas la plus fidèle à votre cadre. La bonne méthode consiste plutôt à travailler avec

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

et à estimer séparément V(x), σ(t), ainsi que la loi de mémoire portée par

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

Autrement dit, votre EDA générique est bien une EDA à potentiel plus volatilité latente à mémoire longue.

La conclusion de cette réflexion est claire. Le bruit pertinent, dans votre modèle, n'est pas une simple fonction d'état G(x), mais une fonction temporelle latente σ(t), estimable à partir de l'énergie locale du signal, puis modélisable, après transformation logarithmique, par un filtre à mémoire longue appliqué à un bruit blanc. On obtient ainsi un cadre beaucoup plus fidèle à votre intuition de départ : V(x) décrit la structure topologique des régimes, σ(t) l'organisation temporelle des fluctuations, et leur combinaison permet de décrire les systèmes complexes de manière à la fois générique, interprétable et calibrable.

La suite naturelle consiste maintenant à formaliser ce cadre en un véritable algorithme EDA complet, étape par étape, avec des estimateurs concrets de V(x), de σ(t) et du noyau mémoire a(k).

Une approche physique de l'EDA : potentiel effectif, volatilité latente et dynamiques stochastiques

L'objectif est de clarifier le fil conceptuel qui relie la physique des systèmes complexes, la théorie des catastrophes, la dynamique stochastique et la data science.

Modèle

L'étude des systèmes complexes pose une difficulté fondamentale. Dans de nombreux domaines — turbulence, marchés financiers, fatigue des structures, systèmes écologiques ou dynamiques sociales — les phénomènes observés résultent de l'interaction d'un très grand nombre de variables. La description microscopique complète du système est alors pratiquement impossible. Pourtant, l'expérience montre que ces systèmes présentent souvent des comportements collectifs relativement simples : transitions de régime,

intermittence, alternance entre phases calmes et phases instables, ou encore catastrophes soudaines.

Une manière féconde d'aborder ce problème consiste à supposer que la dynamique observable du système peut être décrite par une variable d'ordre dominante. Cette variable résume l'état macroscopique du système et évolue dans le temps sous l'influence de deux mécanismes complémentaires : une structure déterministe qui organise les états stables du système et une agitation stochastique résultant de l'interaction des nombreux degrés de liberté microscopiques. Cette idée est au cœur de la physique statistique moderne et apparaît notamment dans les travaux sur les structures dissipatives, les transitions critiques ou les systèmes hors équilibre.

Dans ce cadre, une description naturelle du système consiste à introduire une équation stochastique de type Langevin. La variable d'ordre x(t) évolue alors sous l'effet d'une dérive déterministe dérivée d'un potentiel effectif et d'un bruit qui représente l'agitation collective du système.

$$dx = -V'(x)dt + \sigma(t)dW_1 + sdW_2$$

Dans cette équation, la fonction V(x) joue le rôle de paysage de potentiel effectif. Les minima de ce potentiel correspondent à des états stables du système. Les maxima représentent des barrières séparant différents régimes. Les transitions entre régimes apparaissent lorsque la dynamique stochastique permet au système de franchir une barrière ou lorsque la structure du potentiel se modifie sous l'effet d'un paramètre de contrôle. Cette représentation est profondément liée à la théorie des catastrophes de René Thom, qui décrit comment des structures stables peuvent disparaître ou se transformer lorsque les paramètres du système évoluent.

La particularité essentielle de ce modèle réside dans la structure du bruit. Plutôt que de supposer une diffusion dépendant uniquement de l'état x, on introduit une volatilité dépendant du temps, notée σ(t). Cette fonction représente l'intensité de l'agitation du système à un instant donné. Dans de nombreux phénomènes naturels, cette agitation n'est pas stationnaire et possède une mémoire longue. Par exemple, dans les marchés financiers, les périodes de forte volatilité ont tendance à se regrouper ; dans la turbulence, les fluctuations énergétiques apparaissent sous forme d'intermittence ; dans les systèmes mécaniques soumis à des chargements irréguliers, l'intensité des contraintes peut varier fortement dans le temps.

Une manière naturelle de modéliser cette volatilité consiste à introduire la variable

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

Cette transformation logarithmique permet de stabiliser la dynamique et de transformer une variable multiplicative en une variable additive. La variable y(t) peut ensuite être décrite comme la sortie d'un filtre linéaire appliqué à un bruit blanc, ce qui introduit une mémoire longue dans le processus. La dynamique globale du système se décompose alors en deux éléments : la géométrie du paysage dynamique, décrite par V(x), et la texture temporelle des fluctuations, décrite par y(t).

Cette séparation est conceptuellement très puissante. Elle permet d'interpréter la dynamique d'un système complexe comme l'exploration stochastique d'un paysage de potentiel sous l'effet d'une agitation dont l'intensité varie dans le temps. Dans cette perspective, la variable d'ordre x(t) peut être vue comme une particule évoluant dans un paysage énergétique déformable, tandis que la volatilité joue le rôle d'une température effective fluctuante.

Reconstruction empirique du potentiel effectif

Dans le contexte de la data science, cette représentation ouvre la voie à une nouvelle forme d'analyse exploratoire des données. L'objectif n'est plus seulement de décrire statistiquement les données, mais de reconstruire la dynamique effective qui les génère.

La première étape consiste à identifier une variable d'ordre pertinente. Dans un système financier, cette variable peut être une composante principale du marché ; dans un système turbulent, il peut s'agir de l'énergie locale ; dans un système mécanique, d'une variable d'endommagement ; dans un projet complexe, d'un indicateur global de performance.

Une fois cette variable identifiée, on peut estimer empiriquement la dérive moyenne du processus.

$$F(x) = -\ V'(x)$$

L'intégration de cette fonction permet alors de reconstruire une approximation du potentiel V(x). La forme de ce potentiel fournit une information précieuse sur la structure du système.

Parallèlement, l'analyse des fluctuations permet d'estimer la volatilité latente σ(t).

On introduit de nouveau la variable

$$y(t) = ln\left(1 + \sigma(t)^2\right)$$

Ainsi, l'EDA se transforme en une procédure de reconstruction dynamique. Elle vise à identifier deux objets fondamentaux : le paysage de potentiel qui organise les états du système et la volatilité latente qui gouverne l'intensité des fluctuations.

Détection des transitions critiques

Une fois le potentiel reconstruit, il devient possible de détecter l'approche de transitions critiques. Lorsque le système se rapproche d'une catastrophe, la structure du potentiel se modifie.

Extension vers une approche PINN

Cette vision physique de l'EDA peut être enrichie par l'utilisation de réseaux de neurones informés par la physique (Physics-Informed Neural Networks, PINN).

Dans ce cadre, le réseau peut être structuré de manière à apprendre simultanément le potentiel $V(x)$ et la volatilité latente $\sigma(t)$.

Vers une physique empirique des données

Cette approche conduit finalement à une vision unifiée de l'analyse des systèmes complexes. Plutôt que de construire des modèles spécifiques pour chaque domaine, on cherche à identifier une structure dynamique universelle.

L'EDA devient ainsi une forme de physique empirique des données, dont l'objectif est de reconstruire les lois dynamiques effectives à partir des observations.

Système dynamique turbulent à potentiel quartique et intensité latente à mémoire longue

Texte narratif, pédagogique et détaillé sur la construction du modèle, la loi stationnaire conditionnelle, le choix d'une loi de cascade pour σ et l'approximation par méthode du col

Résumé. Le fil directeur du raisonnement consiste à partir d'une équation différentielle stochastique à potentiel quartique, à introduire une intensité latente $\sigma(t)$ interprétée comme variable d'activité turbulente, à construire la loi stationnaire de x conditionnellement à σ, puis à rechercher une loi recevable pour σ dans l'esprit d'une cascade d'échelles. En choisissant pour la variable logarithmique une loi gamma à mémoire longue, on obtient pour σ une loi à queue lourde, éventuellement modulée par un facteur logarithmique. En première approximation, ce facteur lent peut être négligé, ce qui conduit à une loi de puissance pour $\pi(\sigma)$. La méthode du col donne alors une expression stationnaire simple et directement interprétable en fonction du potentiel $V(x)$, tout en conservant, dans le cas d'un double puits, une loi stationnaire bimodale pour x.

1. Point de départ : une dynamique de gradient bruitée

Le point de départ du modèle est une équation différentielle stochastique unidimensionnelle écrite sous la forme d'une dynamique de gradient soumise à une agitation aléatoire d'intensité variable. L'idée physique est simple. La variable x(t) représente un état macroscopique ou une variable d'ordre observable. Le potentiel V(x) encode le paysage des régimes possibles, tandis que l'intensité du bruit traduit l'activité intermittente sous-jacente du système.

$$dx_t = -V'(x_t)dt + \sigma_t dW_{1,t} + s dW_{2,t}$$

Dans cette écriture, V(x) est un potentiel quartique, s désigne un niveau de bruit de fond additif, et σ_t est une variable latente positive modulant le terme diffusif principal. Ce point est essentiel : σ_t n'est pas interprété comme un simple écart-type constant, mais comme une intensité stochastique fluctuante, liée à la cascade d'échelles et à l'intermittence.

Le potentiel quartique est pris sous la forme la plus générale compatible avec l'existence d'un ou de deux puits de potentiel.

$$V(x) = (a/4)x^4 - (b/2)x^2 - cx$$

Lorsque a est strictement positif, le terme quartique confine la dynamique aux grandes amplitudes. Lorsque b est positif, le potentiel peut présenter deux minima séparés par une barrière. Enfin, le terme linéaire c introduit une dissymétrie entre les deux puits. Ce cadre est particulièrement intéressant car il permet de décrire à la fois des régimes mono-stables et des régimes bi-stables, qui apparaissent dans plusieurs problèmes de turbulence et de systèmes complexes adaptatifs.

2. Loi stationnaire conditionnelle de x pour une intensité fixée

Si l'on fige momentanément la valeur de σ, ou plus précisément si l'on conditionne la dynamique par une réalisation lente de σ, la variable x suit une diffusion dans le potentiel V avec un coefficient de diffusion instantané $\sigma^2 + s^2$. Dans ce cadre conditionnel, l'équation de Fokker–Planck stationnaire conduit à une loi de Gibbs effective.

$$p(x|\sigma) = 1/Z(\sigma) \cdot exp\left(-2V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right)\right)$$

La constante de normalisation Z(σ) dépend elle-même de σ et s'écrit comme l'intégrale de partition associée au potentiel.

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-2V(u)/\left(\sigma^2 + s^2\right)\right)du$$

Cette loi conditionnelle a une interprétation très claire. Pour une intensité de bruit fixée, le système se comporte comme une particule effective dans un paysage d'énergie V(x), à une température effective proportionnelle à $\sigma^2 + s^2$. Lorsque le potentiel possède deux minima, la densité conditionnelle présente naturellement deux bosses autour des puits. Lorsque le

bruit est faible, la loi se concentre près des minima. Lorsque le bruit augmente, la barrière est franchie plus facilement et la densité s'étale.

3. De la loi conditionnelle à la loi stationnaire globale

La difficulté du problème réel vient du fait que σ n'est pas fixé. Il faut donc moyenner la loi conditionnelle sur une densité stationnaire π(σ), qui représente la statistique lente des amplitudes turbulentes. La loi stationnaire globale de x prend alors la forme d'un mélange de lois de Gibbs locales.

$$p_s(x) = \int_0^{+\infty} p(x|\sigma)\pi(\sigma)d\sigma$$

$$p_s(x) = \int_0^{+\infty} [1/Z(\sigma))exp\left(-\ 2V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right)\right)\pi(\sigma)d\sigma$$

Cette écriture est très importante du point de vue physique. Le potentiel V fixe la géométrie des régimes accessibles et l'existence éventuelle d'une bimodalité centrale, tandis que π(σ) détermine l'intermittence et l'épaisseur des queues. Si le potentiel est à double puits, la structure bimodale de la densité est préservée. Si π(σ) possède une queue lourde, les grandes valeurs de σ restent suffisamment probables pour engendrer des excursions inhabituelles de x et épaissir la loi stationnaire globale.

4. Quelle loi choisir pour σ dans le cadre d'une cascade d'échelles ?

La question centrale devient alors le choix de π(σ). Si l'on se contente d'une volatilité gaussienne ou lognormale classique, on obtient de l'intermittence, mais pas nécessairement une vraie loi de puissance. Pour coller davantage à l'esprit d'une cascade d'échelles, l'idée retenue consiste à travailler non pas directement sur σ, mais sur une variable logarithmique positive liée à l'intensité de diffusion.

$$Y_t = ln\left(1 + \sigma_t^2\right)$$

Cette variable Y_t peut être interprétée comme un niveau latent d'activité ou d'intermittence. Elle doit être positive et fluctuante, et il est naturel de lui attribuer une mémoire longue traduisant la persistance des phases d'activité et de calme.

$$Corr\left(Y_t, Y_{t+\tau}\right)\tau^{-\beta}$$

Le choix effectué consiste à prendre pour le bruit élémentaire ξ une loi gamma, puis à identifier Y à cette variable positive. La loi gamma est intéressante pour trois raisons. D'abord, elle vit sur les valeurs positives, ce qui est cohérent avec l'interprétation de Y comme intensité. Ensuite, elle possède une queue exponentielle modulée par un facteur polynomial. Enfin, elle fait partie des lois infiniment divisibles, ce qui est en accord avec

l'idée d'une construction additive sur le logarithme avant exponentiation, donc avec l'esprit des cascades log-infinitely divisible.

$$Y\Gamma(k, \theta)$$

$$f_Y(y) = [1/\left(\Gamma(k)\theta^k\right))y^{k-1}exp(-\ y/\theta), y\ >\ 0$$

La mémoire longue est introduite séparément par un noyau de corrélation en τ^{-β}. Le point important est que la forme marginale de Y et sa structure temporelle sont deux objets distincts. La loi gamma fixe la statistique instantanée de l'intensité, tandis que la corrélation en loi de puissance fixe la persistance temporelle.

5. Déduction de la loi de σ à partir de la loi gamma de Y

Le passage de Y à σ se fait par la relation Y = ln(1 + σ^2). Il suffit donc d'effectuer un changement de variable. On a

$$y\ =\ ln\left(1\ +\ \sigma^2\right), \frac{dy}{d\sigma}\ =\ 2\sigma/\left(1\ +\ \sigma^2\right)$$

La densité stationnaire π(σ) s'écrit alors

$$\pi(\sigma) = f_Y\left(ln\left(1\ +\ \sigma^2\right)\right) \cdot\ [2\sigma/\left(1\ +\ \sigma^2\right))$$

En remplaçant f_Y par sa forme gamma explicite, on obtient

$$\pi(\sigma) =\ [2\sigma/\left(\Gamma(k)\theta^k\right))[ln\left(1\ +\ \sigma^2\right))^{k-1}\left(1\ +\ \sigma^2\right)^{-(1+1/\theta)}$$

Aux grandes valeurs de σ, cette densité se simplifie. En effet, ln(1 + σ^2) est équivalent à 2 ln σ, tandis que 1 + σ^2 est équivalent à σ^2. Il vient alors

$$\pi(\sigma)C(ln\sigma)^{k-1}\sigma^{-(1+2/\theta)}$$

On obtient donc bien une loi à queue lourde, modulée par un facteur logarithmique lent. Ce point est capital. Physiquement, ce n'est pas le facteur logarithmique qui porte l'essentiel du sens du modèle, mais le caractère de loi de puissance. Le terme en logarithme affine la description, mais l'information dominante est l'existence d'épisodes de très forte agitation dont la probabilité décroît de façon algébrique.

Dans toute la suite, et en première approximation, il est donc légitime de négliger cette modulation logarithmique et de retenir simplement

$$\pi(\sigma) \approx C\ \sigma^{-\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 + 2\ /\ \theta$$

Cette simplification donne une forme analytiquement beaucoup plus maniable, sans modifier la structure physique principale du problème.

6. Pourquoi négliger le facteur logarithmique est raisonnable

Le facteur (ln σ)^{k−1} varie lentement devant la puissance σ^{−α}. Dans une analyse asymptotique ou semi-phénoménologique, il modifie les constantes et certains préfacteurs, mais ne change pas l'exposant principal de la queue. Si l'objectif est de comprendre le mécanisme dominant reliant la cascade d'échelles à la loi stationnaire de x, il est donc raisonnable d'écrire π(σ) sous la forme d'une simple puissance. Le gain conceptuel est considérable. La loi de puissance rend immédiatement visible le rôle des grandes valeurs de σ dans les excursions extrêmes de x et permet d'obtenir des formules simples, directement exprimées en fonction du potentiel V(x).

7. Approximation par méthode du col en négligeant Z(σ)

Pour aller plus loin et dégager une expression explicite, on néglige d'abord la dépendance de Z(σ). Cette approximation est assez naturelle si l'on souhaite mettre en évidence le compromis dominant entre le coût énergétique imposé par V(x) et la rareté statistique des grandes valeurs de σ. On considère donc l'intégrale

$$p_s(x) \propto \int_0^{+\infty} exp\left(-\ 2V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right)\right)\pi(\sigma)d\sigma$$

En remplaçant π(σ) par sa forme de puissance, on introduit la fonction de phase

$$\Phi_x(\sigma) = -\ 2V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right) - \ \alpha ln\sigma$$

La méthode du col consiste à rechercher la valeur σ_*(x) qui maximise cette fonction, c'est-à-dire la valeur la plus contributive à l'intégrale. Le point critique est défini par Φ'_x(σ_*) = 0. La dérivation donne

$$\frac{d}{d\sigma}[-\ 2V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right)) \ = \ 4\sigma V(x)/\left(\sigma^2 + s^2\right)^2$$

$$\frac{d}{d\sigma}[-\ \alpha ln\sigma) \ = -\ \alpha/\sigma$$

L'équation du col devient donc

$$4\sigma_* V(x)/\left(\sigma_*^2 + s^2\right)^2 - \ \alpha/\sigma_* = 0$$

$$ou, après multiplication par \sigma_*,$$

$$4\sigma_*^2 V(x)/\left(\sigma_*^2 + s^2\right)^2 = \ \alpha$$

Cette relation exprime de façon très directe le compromis entre le surcoût énergétique de la position x, mesuré par V(x), et la rareté des grandes intensités de bruit, mesurée par α.

8. Cas simple où le bruit résiduel s tend vers zéro

Le cas le plus simple, et celui qui permet de lire le mécanisme sans ambiguïté, est la limite s → 0. L'équation du col devient alors

$$4V(x)/\sigma_*^2 = \alpha$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\sigma_*^2(x) = 4V(x)/\alpha$$

$$\sigma_*(x) = 2\sqrt{(V(x)/\alpha)}$$

Le résultat est remarquable par sa simplicité. La valeur dominante de σ croît comme la racine du coût énergétique V(x). Plus la position x est coûteuse du point de vue du potentiel, plus l'intégrale sélectionne naturellement des épisodes de forte agitation, c'est-à-dire des valeurs élevées de σ. On retrouve ainsi une interprétation physique très claire : les excursions loin des puits de potentiel ne sont pas portées par des fluctuations typiques, mais par les phases intermittentes de cascade intense.

9. Valeur de la loi stationnaire au point du col

On remplace ensuite σ par sa valeur optimale dans la fonction de phase. En reprenant

$$\Phi_x(\sigma) = -2V(x)/\sigma^2 - \alpha ln\sigma$$

et en utilisant σ_*² = 4V(x)/α, on obtient

$$-2V(x)/\sigma_*^2 = -\alpha/2$$

puis

$$\Phi_x(\sigma_*) = -\alpha/2 - \alpha ln\left(2\sqrt{(V(x)/\alpha)}\right) + constante$$

En exponentiant cette expression, on voit apparaître une dépendance en puissance de V(x). La contribution principale donne

$$exp\left(\Phi_x(\sigma_*)\right) \propto V(x)^{-\alpha/2}$$

Il faut encore tenir compte du préfacteur de la méthode de Laplace, c'est-à-dire de la courbure au point du col. Dans le cas s = 0, la dérivée seconde vaut

$$\Phi_x''(\sigma) = -12V(x)/\sigma^4 + \alpha/\sigma^2$$

et, au point selle, on obtient

$$\Phi_x''(\sigma_*) = -\alpha^2/(2V(x))$$

Le préfacteur associé vaut alors

$$\sqrt{(2\pi/(-\Phi_x''(\sigma_*)))} \propto \sqrt{(V(x))}$$

En combinant le terme exponentiel principal et ce préfacteur, on aboutit à une expression stationnaire simple, entièrement exprimée en fonction du potentiel.

$$p_s(x) \propto V(x)^{1/2-\alpha/2}$$

$$p_s(x) \propto V(x)^{-(\alpha-1)/2}$$

C'est le résultat le plus simple et le plus exploitable obtenu dans cette approximation. Il montre que la loi stationnaire globale n'est plus une simple loi de Gibbs en exp(−V), mais une loi de puissance en V(x).

10. Lecture du résultat pour un potentiel quartique à deux cuvettes

Lorsque l'on conserve l'expression complète du potentiel quartique, ce résultat devient particulièrement intéressant. En effet, si V possède deux minima, par exemple lorsque b > 0 dans le cas symétrique c = 0, la loi stationnaire reste naturellement bimodale. Le rôle de V(x) exact est alors essentiel. Il fixe la topologie du paysage et garantit la présence de deux zones de forte probabilité autour des puits.

Le mélange sur σ n'efface pas cette structure. Il modifie plutôt la largeur des pics, la fréquence des transitions et l'épaisseur des queues. Autrement dit, le double puits explique la bimodalité centrale, tandis que la loi de puissance sur σ explique l'intermittence et les grandes excursions. Cette combinaison est précisément ce qui rend le modèle intéressant du point de vue physique.

Si l'on regarde uniquement les grandes amplitudes de x et que l'on remplace le potentiel par son terme dominant quartique, $V(x) \sim (a/4)\, x^4$, on obtient

$$p_s(x)|x)^{-(2\alpha-2)}$$

Mais cette asymptotique lointaine ne doit pas faire oublier que, près du cœur de la densité, l'expression exacte de V(x) conserve toute son importance et permet précisément de retrouver une densité stationnaire bimodale lorsque le potentiel présente deux cuvettes.

11. Interprétation en termes de turbulence

Du point de vue de la turbulence, le modèle obtenu n'a pas vocation à reproduire l'intégralité de la cascade multifractale canonique. En revanche, il reproduit plusieurs signatures statistiques majeures. Il introduit une variable d'activité lente à mémoire longue, il conduit à une intensité σ à queue lourde, et il transforme une loi locale de type Gibbs en

une loi stationnaire globale beaucoup plus épaisse. On retrouve ainsi, dans un cadre réduit, l'idée superstatistique selon laquelle les grandes excursions observées proviennent d'un mélange de régimes d'agitation locale.

Le résultat est particulièrement pertinent dans les problèmes de turbulence ou de systèmes fluides où l'on observe une variable d'ordre grande échelle présentant deux états concurrents. Dans ce cas, la description par un potentiel effectif à deux puits est cohérente. La densité stationnaire bimodale représente les deux états macroscopiques, tandis que la queue lourde de $\pi(\sigma)$ rend compte de l'intermittence et des transitions rares mais intenses entre ces régimes. La variable σ joue alors le rôle d'une intensité latente de cascade ou d'activation turbulente.

12. Bilan théorique

Le raisonnement suivi peut maintenant être résumé sans rupture logique. On part d'une dynamique stochastique de gradient dans un potentiel quartique, dans laquelle l'agitation est portée par une intensité latente $\sigma(t)$. En conditionnant par σ, on obtient une loi stationnaire locale de type Gibbs. On cherche ensuite une loi recevable pour σ dans l'esprit d'une cascade d'échelles. Pour cela, on introduit la variable logarithmique positive $Y = \ln(1 + \sigma^2)$, que l'on suppose à mémoire longue en $\tau^{-\beta}$ et marginalement distribuée selon une loi gamma. Cette hypothèse conduit, après changement de variable, à une loi lourde pour σ, modulée par un facteur logarithmique lent. En première approximation, ce facteur lent peut être négligé et $\pi(\sigma)$ peut être remplacée par une loi de puissance pure. La méthode du col, appliquée à l'intégrale stationnaire en négligeant $Z(\sigma)$ et dans la limite $s \to 0$, conduit alors à une expression simple de la densité stationnaire globale, de la forme $p_s(x) \propto V(x)^{-(\alpha-1)/2}$. Ce résultat conserve la structure bimodale dès lors que le potentiel présente deux cuvettes, tout en expliquant l'épaississement des queues par les grandes valeurs de σ.

13. Conclusion physique

Le résultat final possède une force conceptuelle réelle. D'un côté, la géométrie du potentiel encode les états macroscopiques et la présence éventuelle de plusieurs régimes stables. De l'autre, la cascade d'échelles introduit une intensité latente à mémoire longue dont la statistique lourde explique l'intermittence. Le modèle fait ainsi le lien entre un paysage d'énergie effectif, une variable lente d'activité et une loi stationnaire globale non gaussienne. Dans le cas d'un double puits, il permet d'obtenir une densité stationnaire bimodale à queues épaisses, ce qui rejoint plusieurs situations rencontrées en turbulence organisée ou dans des systèmes fluides présentant des transitions entre régimes concurrents.

Ce cadre reste volontairement réduit, mais il est riche. Il permet d'interpréter simplement des phénomènes complexes, de conserver une lecture physique claire, et de dégager des lois effectives directement exploitables en termes de potentiel et d'intermittence. En ce sens, il constitue une passerelle intéressante entre modèles de type Langevin dans un paysage de potentiel, approches de superstatistique et intuition des cascades turbulentes.

14. Récapitulatif des équations clés

Objet	Expression
EDS de départ	$dx_t = -V'(x_t)dt + \sigma_t dW_{1,t} + s dW_{2,t}$
Potentiel quartique	$V(x) = (a/4)x^4 - (b/2)x^2 - cx$
Variable latente	$Y_t = ln(1 + \sigma_t^2)$
Loi gamma de Y	$f_Y(y) = [1/(\Gamma(k)\theta^k))y^{k-1}exp(-y/\theta)$
Loi conditionnelle	$p(x\|\sigma) = [1/Z(\sigma))exp(-2V(x)/(\sigma^2 + s^2))$
Mélange stationnaire	$p_s(x) = \int_0^{+\infty} p(x\|\sigma)\pi(\sigma)d\sigma$
Queue de $\pi(\sigma)$	$\pi(\sigma)C(ln\sigma)^{k-1}\sigma^{-(1+2/\theta)}$
Approximation simplifiée	$\pi(\sigma) \approx C\sigma^{-\alpha}, \alpha = 1 + 2/\theta$
Point col, s quelconque	$4\sigma_*^2 V(x)/(\sigma_*^2 + s^2)^2 = \alpha$
$Pointcol, s \to 0$	$\sigma_*^2(x) = 4V(x)/\alpha$
Résultat final	$p_s(x) \propto V(x)^{-(\alpha-1)/2}$

De l'EDS à l'équation de Kolmogorov généralisée

1. Point de départ et objectif de la réduction

Le point de départ est une équation différentielle stochastique pour une variable d'état X_t qui représente une variable d'ordre, une coordonnée réduite ou un indicateur global de régime. Cette variable est soumise à trois effets. Le premier est une dérive déterministe qui pousse le système vers les configurations favorisées par le potentiel V(x). Le deuxième est une agitation aléatoire de fond, de type brownien, qui subsiste même lorsque la volatilité latente est faible. Le troisième est une modulation stochastique de l'intensité des fluctuations, portée par une variable lente sigma_t. L'idée générale consiste à éliminer cette variable latente afin d'obtenir une équation fermée, ou du moins exploitable, pour la densité de probabilité de X_t seule.

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma_t dW_t^{(1)} + s dW_t^{(2)}$$

Dans cette écriture, V'(x) désigne la dérivée du potentiel, W_t^(1) et W_t^(2) sont deux mouvements browniens standards indépendants, sigma_t est une volatilité stochastique lente et s est un niveau de bruit additif permanent. Tant que l'on suit une trajectoire particulière, l'équation décrit une réalisation possible parmi une infinité

d'évolutions. En revanche, si l'on s'intéresse à l'ensemble des trajectoires possibles, l'objet central n'est plus X_t lui-même mais la densité p(x,t), c'est-à-dire la probabilité de trouver le système près de la valeur x à l'instant t.

Le problème mathématique est alors le suivant. Comment passer d'une équation stochastique trajectorielle à une équation d'évolution pour p(x,t), en tenant compte du fait que sigma_t possède une mémoire longue et ne peut donc pas être traité comme un simple bruit blanc indépendant du passé ? La difficulté essentielle vient du fait que X_t seul n'est plus markovien dès que la diffusion dépend d'une variable latente corrélée. Il faut donc formuler des hypothèses de fermeture et accepter qu'il n'existe pas, en général, de réduction exacte simple sur la seule variable x.

2. Réécriture de l'EDS et définition des variables

La première étape consiste à regrouper les deux termes browniens. Comme les deux bruits sont indépendants, leur somme est encore un terme brownien, mais avec une variance instantanée égale à la somme des variances. On peut donc réécrire le modèle sous la forme d'une diffusion unique à coefficient aléatoire.

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sqrt{D_t}dB_t$$

$$D_t = s^2 + \sigma_t^2$$

Ici B_t est un brownien standard. La variable D_t joue le rôle de diffusion instantanée effective. Elle est toujours positive, puisqu'elle est la somme d'un plancher diffusif s^2 et de la composante aléatoire sigma_t^2. Cette réécriture est importante, car elle montre que conditionnellement à D_t, la dynamique de X_t reste gaussienne. La non-gaussianité marginale et les queues lourdes ne viennent donc pas d'un saut instantané de type Lévy au niveau conditionnel, mais du mélange de gaussiennes de variance variable lorsque l'on moyenne sur les réalisations de D_t.

Pour décrire la volatilité de manière plus commode, on introduit la log-volatilité Y_t définie par la relation suivante.

$$Y_t = ln\left(1 + \sigma_t^2\right)$$

$$\sigma_t^2 = e^{(Y_t)} - 1$$

$$D_t = s^2 + e^{(Y_t)} - 1$$

Cette paramétrisation a deux avantages. D'une part, elle garantit automatiquement la positivité de sigma_t^2. D'autre part, elle permet de travailler avec une variable Y_t

souvent plus simple à modéliser statistiquement, en particulier lorsque l'on suppose une structure gaussienne ou quasi-gaussienne pour la log-volatilité.

3. Hypothèses de fermeture retenues

3.1 Potentiel régulier

On suppose que le potentiel V(x) est une fonction régulière, par exemple de classe C^2, afin que sa dérivée V'(x) soit bien définie et que l'opérateur de dérive soit correctement posé. Dans de nombreuses applications aux systèmes complexes, à la turbulence intermittente ou aux transitions de régime, le choix naturel est un potentiel quartique. Il permet de représenter deux bassins de stabilité séparés par une barrière.

$$V(x) = (a/4)x^4 - (b/2)x^2 - cx$$

$$V'(x) = ax^3 - bx - c$$

Le cas c = 0 correspond au potentiel symétrique à deux puits. Le paramètre a contrôle la raideur du confinement pour les grandes amplitudes, b règle la profondeur relative et la séparation des puits, et c introduit un biais qui favorise un régime par rapport à l'autre.

3.2 Volatilité lente, stationnaire et à mémoire longue

La seconde hypothèse concerne la variable Y_t. On suppose qu'elle est stationnaire autour d'une moyenne m_Y et qu'elle présente une mémoire longue, décrite par une covariance décroissant selon une loi de puissance. Cette hypothèse formalise le fait que les épisodes de forte agitation ne sont pas indépendants les uns des autres, mais laissent une trace durable dans le temps.

$$E[Y_t) = m_Y$$

$$Cov\left(Y_t, Y_{(t+\tau)}\right) C_Y * \left(\tau_0/\left(\tau + \tau_0\right)\right)^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

Le paramètre tau_0 est un temps de régularisation microscopique qui évite une divergence au voisinage de zéro. Le paramètre alpha mesure la longueur de mémoire. Plus alpha est petit, plus la décroissance est lente et plus la mémoire est longue. Le choix 0 < alpha < 1 correspond à une mémoire non intégrable à l'infini, ce qui est précisément la signature d'une persistance longue.

3.3 Décomposition moyenne plus fluctuation

Afin de fermer le problème à un ordre exploitable, on écrit la diffusion effective comme la somme d'une moyenne et d'une fluctuation centrée.

$$D_t = \bar{D} + \delta D_t$$

$$\bar{D} = E[D_t), E[\delta D_t) = 0$$

On suppose ensuite que les fluctuations δD_t sont suffisamment modérées pour qu'une fermeture de type second ordre, c'est-à-dire fondée sur la covariance temporelle de δD_t, soit pertinente. Cette hypothèse ne signifie pas que les fluctuations sont infiniment petites. Elle signifie seulement que, dans l'élimination de la variable latente, les cumulants d'ordre deux dominent la correction mémoire au premier ordre non trivial.

3.4 Approximation quasi-adiabatique

Enfin, on suppose que la variable de volatilité évolue plus lentement que la relaxation locale de X_t dans le potentiel. Cette hypothèse quasi-adiabatique est essentielle. Elle autorise une séparation d'échelles entre un mécanisme rapide de relaxation déterministe-diffusive dans V(x) et un mécanisme lent de modulation de la diffusion. C'est elle qui permet de remplacer une partie du propagateur exact par son comportement dominant et d'obtenir une équation fermée utilisable.

4. Équation de Fokker-Planck moyenne

Si, par hypothèse fictive, D_t était constant et égal à sa moyenne D̄, alors la densité p(x,t) satisferait l'équation de Fokker-Planck ordinaire associée à la diffusion dans le potentiel. Cette équation constitue l'ossature de la réduction.

$$\partial_t p = L_0 p$$

$$L_0 p = \partial_x (V'(x) p) + (\bar{D}/2) \partial_{(xx)} p$$

$$L'opérateur L_0 est l'opérateur moyen de Kolmogorov direct. Il se décompose naturellement en une partie de déri$$

$$Ap = \partial_x (V'(x) p)$$

$$Bp = (1/2) \partial_{(xx)} p$$

$$L_0 = A + \bar{D}B$$

L'opérateur A pousse la densité vers les minima du potentiel, c'est-à-dire vers les régimes stables. L'opérateur B représente l'action infinitésimale d'une fluctuation diffusante élémentaire. Si la diffusion était constante, le problème serait entièrement markovien et local en temps. Mais ce n'est pas le cas ici, car D_t dépend d'une variable latente à mémoire longue.

5. Calcul de la moyenne et de la covariance de la diffusion

À partir de la relation D_t = s^2 + e^(Y_t) - 1, on peut relier les paramètres statistiques de D_t à ceux de Y_t. Si Y_t est supposé gaussien de moyenne m_Y et de variance v_Y, alors on retrouve les formules classiques de la variable lognormale.

$$D = s^2 + E[e^{(Y_t)}) - 1$$

$$E[e^{(Y_t)}) = e^{(m_Y + v_Y/2)}$$

$$D = s^2 + e^{(m_Y + v_Y/2)} - 1$$

On calcule ensuite la covariance temporelle de D_t, qui est le noyau mémoire apparaissant dans l'équation réduite. Par définition, on a la relation suivante.

$$C_D(\tau) = Cov\left(D_t, D_{(t+\tau)}\right) = Cov\left(e^{(Y_t)}, e^{(Y_{(t+\tau)})}\right)$$

Dans le cas gaussien, le calcul exact donne une expression fermée particulièrement simple.

$$C_D(\tau) = e^{(2m_Y + v_Y)}\left(e^{(C_Y(\tau))} - 1\right)$$

Lorsque C_Y(τ) est faible aux temps suffisamment grands, on peut linéariser l'exponentielle et obtenir un noyau mémoire de même type asymptotique que celui de Y_t.

$$C_D(\tau) \approx e^{(2m_Y + v_Y)} C_Y(\tau)$$

$$C_D(\tau) C_D * \left(\tau_0 / \left(\tau + \tau_0\right)\right)^{\alpha}$$

$$C_D * \approx e^{(2m_Y + v_Y)} C_Y *$$

Cette étape est fondamentale, car elle montre que la mémoire longue de la log-volatilité se transmet directement à la diffusion effective. C'est cette covariance C_D(τ) qui portera toute l'information de mémoire dans l'équation généralisée de Kolmogorov.

6. Élimination de la variable latente et équation de Kolmogorov généralisée

On écrit maintenant l'opérateur instantané comme la somme de l'opérateur moyen et d'une perturbation aléatoire portée par la fluctuation de diffusion.

$$L_t = L_0 + \delta D_t B$$

L'équation conditionnelle pour la densité, à diffusion imposée, s'écrit alors sous la forme ∂_t p = L_t p. Lorsque l'on élimine la variable latente δD_t en conservant le premier terme non trivial de second ordre, la covariance temporelle de δD_t apparaît naturellement. On obtient une équation de mémoire sous forme de convolution en temps.

$$\partial_t p(x,t) = L_0 p(x,t) + \int_0^t C_D(t-\tau) B e^{\left((t-\tau)L_0\right)} B p(x,\tau) d\tau$$

Cette équation est déjà une équation généralisée de Kolmogorov explicite. Le semi-groupe e^((t-τ)L_0) représente la propagation moyenne entre les temps tau et t. Le premier opérateur B transforme une fluctuation de diffusion en correction sur la densité au temps tau. Le semi-groupe transporte ensuite cette correction sous la dynamique moyenne, et le second opérateur B réinjecte l'effet de modulation de la diffusion. Enfin, l'intégration contre C_D(t-tau) additionne les contributions de tous les temps passés avec un poids mémoriel.

7. Fermeture exploitable sous hypothèse quasi-adiabatique

La formule précédente est mathématiquement claire, mais encore coûteuse à exploiter. Pour obtenir un modèle de travail simple, on utilise l'approximation quasi-adiabatique et l'on remplace, dans le terme mémoire, le semi-groupe exact par son effet dominant. La fermeture la plus simple consiste à écrire e^((t-τ)L_0) ≈ I sur l'échelle du noyau mémoire. Cela revient à considérer que la propagation moyenne sur l'intervalle t - tau ne déforme pas qualitativement la correction de second ordre au niveau dominant.

$$e^{\left((t-\tau)L_0\right)} \approx I$$

$$\partial_t p(x,t) = L_0 p(x,t) + \int_0^t C_D(t-\tau) B^2 p(x,\tau) d\tau$$

Or l'opérateur B vaut un demi-laplacien en dimension un. Son carré donne donc une dérivée d'ordre quatre.

$$B = (1/2)\partial_{(xx)}$$

$$B^2 = (1/4)\partial_{(xxxx)}$$

On arrive ainsi à la forme explicite la plus simple de l'équation généralisée de Kolmogorov associée à votre EDS.

$$\partial_t p(x,t) = \partial_x (V'(x) p(x,t)) + (D/2)\partial_{(xx)} p(x,t) + (1/4)\int_0^t C_D(t-\tau)\partial_{(xxxx)} p(x,\tau) d\tau$$

Cette équation combine trois mécanismes. Le premier, la dérive en potentiel, organise la densité autour des régimes stables. Le deuxième, la diffusion moyenne, élargit la densité de manière classique. Le troisième, le terme mémoire d'ordre quatre, traduit l'effet cumulé et corrélé des fluctuations passées de la volatilité. Ce terme ne dépend pas seulement de l'état présent de la densité, mais de tout son historique.

8. Cas d'un noyau mémoire en loi de puissance

Pour obtenir une forme opérationnelle, on choisit maintenant un noyau mémoire explicite conforme à l'hypothèse de mémoire longue. On prend une loi de puissance régularisée à l'origine.

$$C_D(\tau) = A_D\left(\tau_0/\left(\tau + \tau_0\right)\right)^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

L'équation se réécrit alors sous une forme entièrement paramétrée.

$$\partial_t p(x,t) = \partial_x(V'(x)p(x,t)) + (D/2)\partial_{(xx)}p(x,t) + \left(A_D/4\right)\int_0^t \left(\tau_0/\left(t - \tau + \tau_0\right)\right)^{\alpha}\partial_{(xxxx)}p(x,\tau)d\tau$$

Cette forme est directement utilisable pour une simulation numérique ou pour une étude de sensibilité. Le paramètre A_D règle l'intensité de la mémoire, tau_0 fixe l'échelle de régularisation, et alpha règle la vitesse de décroissance de l'influence du passé. Lorsque alpha diminue, l'influence des temps anciens décroît moins vite, ce qui renforce la persistance des épisodes de forte agitation.

9. Cas particulier du potentiel quartique

En remplaçant V'(x) par l'expression quartique, on obtient l'équation explicitement adaptée au cas bistable.

$$V'(x) = ax^3 - bx - c$$

$$\partial_t p(x,t) = \partial_x\left(\left(ax^3 - bx - c\right)p(x,t)\right) + (D/2)\partial_{(xx)}p(x,t) + \left(A_D/4\right)\int_0^t \left(\tau_0/\left(t - \tau + \tau_0\right)\right)^{\alpha}\partial_{(xxxx)}p(x,\tau)d\tau$$

Dans le cas symétrique, c est nul et les deux puits ont le même poids potentiel. Dans le cas asymétrique, le terme c incline le potentiel et modifie la répartition des probabilités entre les bassins. Ce cadre est particulièrement bien adapté aux systèmes qui passent d'un régime à un autre sous l'effet combiné d'un paysage énergétique et d'une agitation intermittente à mémoire longue.

10. Réécriture fractionnaire en temps

Lorsque le noyau mémoire suit asymptotiquement une loi de puissance, la convolution temporelle peut être interprétée comme une intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Cette réécriture n'est pas nécessaire pour la simulation, mais elle est

utile pour l'analyse théorique et pour relier le modèle à la littérature des diffusions anormales.

$$I_t^{(1-\alpha)} f(t) = (1/\Gamma(1-\alpha)) \int_0^t (t-\tau)^{(-\alpha)} f(\tau) d\tau$$

À grande échelle, lorsque tau_0 peut être négligé dans le noyau, le terme mémoire devient proportionnel à une intégrale fractionnaire appliquée à la dérivée d'ordre quatre de la densité.

$$M[p)(x,t) \approx \kappa_\alpha I_t^{(1-\alpha)} [\partial_{(xxxx)} p(x,t))$$

$$\kappa_\alpha = \left(A_D \tau_0^\alpha \Gamma(1-\alpha) \right) / 4$$

$$\partial_t p = \partial_x (V' p) + (D/2) \partial_{(xx)} p + \kappa_\alpha I_t^{(1-\alpha)} [\partial_{(xxxx)} p)$$

Cette écriture montre de manière compacte que la mémoire longue de la volatilité se traduit par un opérateur fractionnaire en temps agissant sur une correction spatiale d'ordre quatre. La forme fractionnaire n'est donc pas postulée au départ. Elle apparaît comme une conséquence de la structure asymptotique du noyau mémoire.

11. Domaine de validité et interprétation physique

L'équation obtenue est cohérente avec l'EDS de départ tant que plusieurs conditions restent raisonnablement satisfaites. Il faut que la modulation par la volatilité agisse principalement comme une modulation de la diffusion et non comme un véritable mécanisme de sauts. Il faut aussi que la fermeture au second ordre soit suffisante, c'est-à-dire que la covariance de la diffusion capture l'essentiel de l'effet de la variable latente sur la densité. Enfin, l'approximation quasi-adiabatique suppose que la mémoire soit lente par rapport à la relaxation locale de X_t dans le potentiel.

Physiquement, l'équation exprime un fait simple mais profond. Le système n'oublie pas ses épisodes d'agitation passés. Une forte volatilité à un instant donné ne modifie pas seulement la largeur instantanée de la distribution. Elle laisse une trace dans le futur, parce que les épisodes de forte volatilité sont eux-mêmes corrélés. Le terme mémoire représente donc l'empreinte des régimes d'activité sur l'évolution probabiliste du système.

Intérêt de la densité p(x,t)

La densité p(x,t) comme objet central du modèle

Une fois l'équation réduite obtenue, la densité p(x,t) devient l'objet principal de l'analyse. Elle donne, pour chaque temps, la manière dont se répartissent les valeurs

possibles de la variable d'état. Si l'on considère un petit intervalle [x, x + dx], alors la probabilité de trouver le système dans cet intervalle est approximativement égale à p(x,t) dx. La densité résume donc, à un temps donné, l'ensemble des trajectoires possibles du système.

$$Pr\left(X_t \in [x, x + dx)\right) \approx p(x,t)dx$$

À partir de p(x,t), on peut reconstruire toutes les quantités probabilistes utiles. La probabilité d'appartenir à une région A est l'intégrale de p sur cette région. La moyenne de l'état, sa variance, ses moments d'ordre supérieur, ses probabilités de dépassement de seuil ou ses poids de régime sont autant de quantités calculables à partir de la densité. La transition entre le modèle stochastique et l'outil quantitatif passe précisément par cette étape.

$$Pr\left(X_t \in A\right) = \int_A p(x,t)dx$$

$$E[X_t) = \int xp(x,t)dx$$

$$Var\left(X_t\right) = \int\left(x - E[X_t)\right)^2 p(x,t)dx$$

$$E[f\left(X_t\right)) = \int f(x)p(x,t)dx$$

Ce que la densité permet de lire sur le système

Dans un potentiel à deux puits, la forme de p(x,t) indique comment la probabilité se répartit entre les bassins de stabilité. Si la densité est centrée sur un seul puits, cela signifie que le système reste essentiellement dans un régime. Si deux pics apparaissent, le système est partagé entre deux régimes. Si le poids relatif de ces pics varie, cela signale une modification des probabilités de présence dans chaque bassin. La densité permet donc une lecture probabiliste des transitions de régime.

La largeur de la densité renseigne sur la dispersion et l'incertitude. Une densité étroite correspond à une localisation forte du système. Une densité large indique que les trajectoires possibles se dispersent davantage. Les queues de la densité quantifient la fréquence des excursions extrêmes. Elles permettent de calculer la probabilité d'atteindre une zone critique ou indésirable, définie par un seuil x_c.

$$R\left(t; x_c\right) = Pr\left(X_t > x_c\right) = \int_{\left(x_c\right)}^{(+\infty)} p(x,t)dx$$

Une transformation de la forme de p(x,t), par exemple le passage d'une densité unimodale à une densité bimodale, peut être interprétée comme une signature probabiliste de bifurcation, de transition ou de restructuration du système. La densité

offre donc une vision plus robuste et plus informative qu'une trajectoire unique, car elle fait apparaître ce qui est structurellement probable et non seulement ce qui s'est produit une fois.

Intérêt de p(x,t) en data science

Du point de vue de la data science, la densité p(x,t) joue un rôle d'interface entre les données observées et la structure théorique du modèle. À partir d'un jeu de données, on peut estimer des histogrammes, des densités empiriques, des moments, des probabilités de dépassement ou des poids de régime. Le modèle fournit alors une densité théorique qu'il devient possible de comparer à ces objets empiriques. L'ajustement des paramètres du potentiel, de la diffusion moyenne et du noyau mémoire peut être mené en cherchant la meilleure concordance entre la densité théorique et la densité observée.

Cette approche est particulièrement intéressante lorsque l'on cherche moins à prédire une trajectoire précise qu'à décrire une distribution, un risque, une structure de régimes ou une dynamique d'incertitude. Dans un contexte financier, p(x,t) permet d'évaluer la probabilité de grandes fluctuations, la persistance d'une période agitée ou la redistribution des probabilités entre régimes de marché. Dans un contexte physique, elle permet d'étudier les excursions d'amplitude, la persistance d'états turbulents ou le temps passé dans des configurations préférées. Dans un contexte organisationnel ou projet, elle peut être interprétée comme la loi d'un indicateur global d'écart, de tension ou de performance.

La densité permet aussi de construire des indicateurs synthétiques, comparables à des KPI probabilistes. La moyenne donne la position globale du système. La variance mesure la dispersion. L'asymétrie renseigne sur les déséquilibres. Les probabilités de dépassement donnent des indicateurs de risque. La masse contenue dans chaque bassin d'un potentiel bistable fournit un indicateur de présence dans chaque régime. Le modèle devient ainsi un moteur de tableau de bord probabiliste plutôt qu'un simple générateur de trajectoires.

Comment exploiter l'équation en pratique

Deux voies d'exploitation sont naturelles. La première consiste à simuler directement l'EDS de départ pour un grand nombre de trajectoires, puis à reconstruire p(x,t) par histogrammes ou estimations de densité. Cette stratégie est robuste et intuitive. Elle permet de vérifier qualitativement les effets du potentiel, de la diffusion et de la mémoire. La seconde consiste à résoudre directement l'équation aux dérivées partielles avec mémoire. Cette voie est plus structurée du point de vue analytique et permet d'accéder plus directement aux objets probabilistes, mais elle nécessite de gérer la convolution temporelle et donc de stocker ou d'approximer l'historique.

Dans une résolution directe, on discrétise x sur une grille spatiale et t sur une grille temporelle. À chaque pas, on évalue la dérive, la diffusion et le terme mémoire. Le coût principal vient de la convolution sur tous les temps passés. On peut cependant la tronquer, la compresser ou la réécrire récursivement lorsque le noyau le permet. Une fois p(x,t) obtenu, on calcule les probabilités d'intérêt, les moments, les poids de régime et les indicateurs de risque par intégration numérique.

Synthèse finale

Le raisonnement complet peut maintenant être résumé simplement. On part d'une EDS dans laquelle une variable d'état évolue dans un potentiel sous l'effet d'un bruit brownien dont l'intensité est modulée par une volatilité lente à mémoire longue. En regroupant les bruits et en introduisant une diffusion effective D_t, on fait apparaître une structure de Fokker-Planck conditionnelle. En décomposant D_t en moyenne plus fluctuation et en fermant le problème au second ordre, on obtient une équation généralisée de Kolmogorov comportant un noyau mémoire donné par la covariance de la diffusion. Sous l'hypothèse quasi-adiabatique, cette équation se simplifie en une forme explicite comportant un terme de dérivée spatiale d'ordre quatre convolué dans le temps avec un noyau en loi de puissance. Lorsque ce noyau est asymptotiquement de type puissance, l'équation peut se réécrire sous forme fractionnaire en temps.

La densité p(x,t) issue de cette équation n'est pas seulement un objet théorique. Elle est la représentation probabiliste globale du système. Elle permet de quantifier les régimes, la dispersion, les risques d'excursion, la persistance des états et l'effet de la mémoire longue. Elle constitue ainsi l'outil naturel pour relier le modèle, les données, l'interprétation physique et l'aide à la décision.

Variable d’ordre : existence, portée et limites dans les systèmes complexes

La notion de variable d’ordre est l’une des idées les plus puissantes de la physique moderne, mais aussi l’une des plus délicates dès que l’on quitte les cadres classiques et bien structurés. Dans les transitions de phase élémentaires, elle paraît presque évidente. Elle surgit comme la grandeur qui distingue deux régimes, traduit une symétrie brisée, et résume l’organisation collective du système. Dans ces cas, la variable d’ordre donne au phénomène une lisibilité remarquable. Elle transforme un ensemble immense d’interactions microscopiques en une grandeur macroscopique simple, porteuse de sens physique. C’est précisément cette réussite qui donne envie d’étendre la notion à des systèmes beaucoup plus complexes.

Mais dès que l’on entre dans les systèmes réels, multi-échelles, ouverts, bruités, non stationnaires, fortement couplés, cette extension devient moins automatique. On découvre alors que la variable d’ordre n’est pas toujours un objet donné d’avance, comme si la nature l’offrait naturellement à l’observateur. Elle est souvent le résultat d’un

travail de réduction, d'interprétation et de construction. C'est pourquoi il est important de distinguer soigneusement l'existence théorique d'une variable d'ordre, sa portée physique, et ses limites.

La première idée à poser clairement est qu'il n'existe pas, en toute généralité, de théorème universel garantissant que tout système complexe possède une variable d'ordre simple, unique, naturelle et utile. Une telle affirmation serait trop forte. Le réel est trop divers, trop hétérogène, trop dépendant des échelles et des observables pour qu'une telle propriété puisse être imposée sans condition. On peut montrer, dans certains cadres, qu'une réduction de dimension est possible, qu'un petit nombre de modes lents gouverne la dynamique près d'un seuil, ou qu'une variété lente existe localement. Mais cela n'équivaut pas à l'existence universelle d'une variable d'ordre au sens fort.

Cette nuance est essentielle. Elle signifie que la variable d'ordre n'est pas un absolu métaphysique du système. Elle est toujours relative à une question physique, à un régime, à une échelle et à un niveau de description. Une même réalité peut ne pas admettre de variable d'ordre simple si on la regarde dans toute sa richesse, et en admettre une très bonne si on se place au voisinage d'une transition particulière, sur une échelle de temps donnée, ou pour un objectif précis de compréhension ou de pilotage. La variable d'ordre est donc moins un objet intrinsèque et universel qu'un objet relationnel, lié à la manière dont on choisit de rendre le système intelligible.

Cela ne diminue pas sa valeur, bien au contraire. Cela oblige simplement à comprendre qu'elle est un outil de condensation structurée, et non une essence cachée présente dans tout système sous une forme évidente. Dans les cas les plus favorables, comme les transitions de phase classiques, cette condensation est remarquable. L'aimantation dans un ferromagnétique, par exemple, distingue clairement les régimes et résume l'organisation collective. Mais dans bien d'autres cas, la situation est plus souple. Il peut exister une variable d'ordre approximative, valable localement. Il peut exister plusieurs variables d'ordre couplées. Il peut exister une famille de variables collectives possibles, selon la question posée. Et parfois, il peut n'exister aucune réduction simple satisfaisante à une dimension faible.

Cette diversité conduit à distinguer plusieurs niveaux de validité de la notion. Au niveau le plus fort, on imaginerait une variable d'ordre unique, naturelle, exacte, dérivée de la théorie fondamentale et valable dans tout le domaine d'évolution du système. Ce cas existe dans quelques systèmes canoniques, mais il est rare dans les systèmes complexes réels. Au niveau intermédiaire, on cherche une ou quelques grandeurs collectives qui captent l'essentiel d'un régime particulier. C'est une situation beaucoup plus fréquente. Enfin, au niveau pratique, on cherche une variable utile, c'est-à-dire une grandeur qui rende le phénomène lisible, permette une dynamique réduite interprétable,

et aide à comprendre, prévoir ou piloter. Dans les sciences appliquées et dans la physique de la complexité, c'est souvent ce troisième niveau qui compte le plus.

On comprend alors que la variable d'ordre ne doit pas être pensée seulement comme une propriété du système, mais comme le résultat d'un compromis réussi entre le système, l'observateur et l'objectif de modélisation. Si l'objectif est de décrire une transition, on cherchera une grandeur qui la distingue. Si l'objectif est de piloter, on cherchera une grandeur sensible aux pertes de stabilité et exploitable opérationnellement. Si l'objectif est de construire une théorie réduite, on cherchera une grandeur dont la dynamique puisse être fermée, au moins approximativement. Cette relativité à l'objectif n'est pas une faiblesse. Elle est au contraire ce qui rend la notion vivante et opératoire.

Il faut ici souligner un point important. Le fait qu'il n'existe pas de théorème général d'existence ne signifie pas que la démarche soit arbitraire. Il existe des situations où la réduction vers peu de variables est mathématiquement ou physiquement justifiée. Près d'une bifurcation, par exemple, les modes critiques dominent et les autres variables deviennent asservies. Dans les systèmes à séparation d'échelles, les dynamiques lentes émergent naturellement. Dans certains problèmes hors équilibre, des champs collectifs ou des amplitudes lentes portent la structure macroscopique. Dans ces cas, on ne possède peut-être pas une variable d'ordre universelle, mais on a de bonnes raisons théoriques de chercher une représentation réduite.

Cela montre que la notion de variable d'ordre se tient à l'intersection de deux mouvements. D'un côté, il y a un mouvement descendant, venant de la théorie fondamentale, des symétries, des bifurcations, des lois de conservation, des modes instables ou lents. De l'autre, il y a un mouvement ascendant, venant des données, de l'observation, de l'expérience, des structures empiriques dominantes. La variable d'ordre apparaît souvent lorsque ces deux mouvements se rencontrent. Elle est alors à la fois plausible physiquement et robuste empiriquement.

Mais cette réussite a aussi ses limites. La première limite est celle de l'échelle. Une variable d'ordre valable à une certaine échelle peut devenir inopérante à une autre. Une grandeur qui résume bien un comportement global peut ne rien dire des mécanismes fins, et inversement. Cela signifie qu'il n'y a pas de variable d'ordre sans choix implicite de résolution. Toute réduction suppose une perte d'information, et cette perte doit être assumée comme telle. Le bon critère n'est pas de tout conserver, mais de perdre ce qui peut l'être sans détruire la compréhension du phénomène visé.

La deuxième limite est celle du régime. Une variable d'ordre peut être excellente près d'un seuil et médiocre loin de ce seuil. Elle peut porter admirablement une transition particulière et devenir presque aveugle dans un autre domaine du comportement. Cela

est très fréquent dans les systèmes non linéaires. Une réduction locale peut être très pertinente sans être globalement valable. Il faut donc toujours se demander dans quel domaine de validité on travaille. Une bonne variable d'ordre n'est pas nécessairement universelle. Elle est souvent attachée à un régime d'usage.

La troisième limite est celle de la dimension. Dans de nombreux systèmes, une seule variable ne suffit pas. Il faut au minimum un petit nombre de grandeurs collectives. Cela se produit dès que plusieurs mécanismes lents interagissent, que plusieurs instabilités sont en compétition, ou que la mémoire du système ne peut être absorbée dans un seul scalaire. La tentation de tout réduire à une variable unique peut alors devenir trompeuse. Il vaut parfois mieux accepter une réduction à deux ou trois dimensions, plus fidèle et plus claire, plutôt que de forcer artificiellement un système dans une description trop pauvre.

La quatrième limite est celle de la fermeture. Une variable d'ordre n'est réellement utile que si sa dynamique peut être écrite de manière à peu près autonome, même si cette autonomie est approchée. Or il arrive souvent qu'une grandeur soit très discriminante, mais que son évolution dépende trop fortement d'autres variables cachées pour pouvoir être modélisée proprement. Dans ce cas, elle peut rester un bon indicateur descriptif, sans devenir pour autant le cœur d'un modèle réduit. Cette distinction entre variable descriptive et variable dynamiquement fermable est capitale.

La cinquième limite est plus profonde encore. Dans certains systèmes très ouverts, adaptatifs ou historiquement contingents, il se peut qu'aucune variable d'ordre stable ne s'impose durablement. Le système change alors lui-même de structure d'organisation. Les bonnes variables d'aujourd'hui ne sont plus celles de demain. On entre dans une situation où la réduction doit être révisée en permanence. Cela n'annule pas la démarche, mais cela impose une grande prudence. La variable d'ordre n'est plus alors un objet fixe, mais un outil transitoire de lecture d'un régime donné.

Malgré ces limites, la notion conserve une portée immense. Elle permet de transformer une masse confuse d'informations en une dynamique intelligible. Elle offre un point d'ancrage à partir duquel on peut introduire un potentiel, une mémoire, un bruit, ou dans le cas spatial, une réaction, une diffusion, une résilience. Elle donne au système une colonne vertébrale conceptuelle. Sans elle, on risque de rester prisonnier d'un foisonnement de détails. Avec elle, on commence à voir la structure des régimes, les seuils, les transitions, les attracteurs, les fronts ou les pertes de stabilité.

C'est pourquoi il faut peut-être reformuler la question initiale. Au lieu de demander s'il existe toujours une variable d'ordre, il vaut mieux demander dans quelles conditions un système admet une réduction utile sur une ou quelques variables collectives. Cette formulation est plus modeste, mais aussi plus féconde. Elle ouvre un programme de

recherche concret. Il s'agit alors d'identifier l'échelle pertinente, le régime étudié, l'objectif de modélisation, les grandeurs naturelles du système, et de tester lesquelles permettent une dynamique réduite lisible.

Dans votre propre cadre, cette question prend une forme très claire. Une variable d'ordre utile serait celle pour laquelle la dynamique réduite peut être relue comme combinaison d'une structure de régimes, d'une rétroaction différée des degrés de liberté éliminés et de fluctuations résiduelles. Cette définition ne prétend pas imposer une variable d'ordre partout. Elle propose un critère de réussite. Si une grandeur permet cette décomposition, alors elle mérite d'être considérée comme variable d'ordre. Sinon, il faut soit en changer, soit accepter qu'il faille plusieurs variables, soit reconnaître que le système résiste à cette réduction.

On peut donc conclure de la manière suivante. La variable d'ordre n'est ni un miracle toujours disponible, ni une fiction arbitraire. Elle est un objet de réduction, parfois théoriquement fondé, souvent empiriquement construit, toujours lié à une échelle, un régime et un objectif. Sa force vient de sa capacité à rendre lisible l'organisation collective d'un système. Sa limite vient du fait que cette lisibilité n'est jamais garantie universellement. La bonne attitude consiste donc à la chercher sans la postuler dogmatiquement, à la tester sans l'idéaliser, et à l'utiliser dès qu'elle permet effectivement de faire émerger une dynamique réduite intelligible.

C'est en ce sens que la variable d'ordre n'est pas seulement une notion technique. Elle est une manière de penser la connaissance des systèmes complexes. Elle rappelle qu'entre le détail total et l'abstraction vide, il existe un niveau intermédiaire où le réel devient compréhensible. Mais ce niveau intermédiaire ne se donne pas toujours d'emblée. Il se conquiert.

Comment identifier concrètement une variable d'ordre dans un système complexe ?

Identifier une variable d'ordre est sans doute l'un des actes les plus décisifs dans toute démarche de modélisation des systèmes complexes. C'est aussi l'un des plus délicats. Tant que cette variable n'est pas trouvée, le système reste dispersé dans une multitude de mesures, de phénomènes locaux, de signaux partiels et de mécanismes entremêlés. Dès qu'elle apparaît, une forme de lisibilité émerge. Le système cesse d'être un amas de détails pour devenir une dynamique d'ensemble. On commence alors à voir non plus seulement ce qui bouge, mais ce qui organise le mouvement.

La difficulté vient du fait qu'une variable d'ordre n'est pas donnée immédiatement. Elle n'est pas toujours écrite dans les équations fondamentales, ni visible directement dans les données brutes. Elle doit souvent être construite, reconnue, testée, parfois même

approchée progressivement. En ce sens, sa découverte relève à la fois de la physique, de l'analyse exploratoire, de l'intuition structurale et de l'expérience du domaine. Il ne s'agit pas simplement de choisir une grandeur synthétique. Il s'agit de trouver celle qui porte réellement la transition entre le détail foisonnant du système et son comportement global.

La première idée à garder en tête est qu'une variable d'ordre sert à distinguer des régimes. Elle n'est pas seulement une moyenne ou un résumé commode. Elle doit changer de manière significative lorsque le système change qualitativement d'état. Si le phénomène traverse une transition, une instabilité, une réorganisation, une perte de stabilité ou une propagation, la variable d'ordre doit être capable de porter cette mutation. Si elle reste presque inchangée alors que le système se transforme profondément, ce n'est pas la bonne. La première question à poser est donc très simple : quelle grandeur varie réellement quand le système change de régime ?

Cette question oblige à renoncer à une vision trop descriptive des données. Dans un système complexe, beaucoup de variables fluctuent sans porter l'essentiel. Elles réagissent, accompagnent, reflètent, mais ne structurent pas. La variable d'ordre, elle, n'est pas n'importe quelle variable sensible. Elle est celle qui condense le comportement collectif. Elle doit donc être recherchée non pas parmi les mesures les plus abondantes, mais parmi celles qui traduisent le mieux le passage d'un état global à un autre.

La deuxième caractéristique d'une bonne variable d'ordre est sa lenteur relative. Elle n'est pas nécessairement lente au sens absolu, mais elle porte le temps structurant du phénomène. Les détails rapides, les oscillations locales, les microfluctuations peuvent continuer d'exister, mais ils doivent apparaître comme des perturbations autour d'une dynamique plus profonde. Une variable d'ordre bien choisie évolue en général sur l'échelle où le système devient intelligible. Elle porte la respiration du phénomène, sa transformation de fond, sa tendance principale. Cela ne signifie pas qu'elle soit parfaitement régulière. Elle peut être agitée, intermittente, bruitée. Mais derrière cette agitation, elle doit garder une signification de temps long ou de dynamique organisatrice.

Cette propriété est essentielle, car elle permet justement l'écriture d'un modèle réduit. Si la variable candidate bouge aussi vite, aussi chaotiquement et aussi localement que tout le reste, elle ne réduit rien. En revanche, si elle capte une dynamique plus lente ou plus structurante, alors les autres degrés de liberté pourront être interprétés comme fluctuations, mémoire ou variables asservies. La recherche d'une variable d'ordre revient donc très souvent à chercher une grandeur qui fasse émerger une séparation d'échelles.

La troisième caractéristique est son caractère collectif. Une variable d'ordre ne doit pas être un simple détail local, sauf si ce détail local est lui-même représentatif d'un

phénomène global. En règle générale, elle résulte d'une agrégation, d'une projection, d'un lissage, d'une amplitude dominante, d'un contraste ou d'une densité moyenne. Elle doit parler du système dans son ensemble, ou du moins d'une partie cohérente du système. C'est ce qui distingue une variable d'ordre d'une simple mesure instrumentale. Une température moyenne, une densité centrale, une aimantation, une amplitude de mode, un taux global d'activité, une distance à un régime nominal, une tension synthétique de projet, une énergie locale moyennée dans une bande fréquentielle, voilà des exemples typiques de grandeurs collectives.

Cette dimension collective est fondamentale, car elle est ce qui permet à la variable d'ordre de devenir le lieu de la réduction. Elle est le point où se rassemblent des influences multiples. Elle ne décrit pas un mécanisme particulier isolé, mais la résultante d'un ensemble de couplages. En cela, elle est déjà une forme de théorie condensée.

La quatrième propriété est le lien avec un mécanisme physique ou fonctionnel identifiable. Une variable d'ordre n'est pas seulement une grandeur mathématiquement pratique. Elle doit être raccordée à un mécanisme intelligible. Si elle est choisie seulement parce qu'elle ressort d'une méthode statistique, sans pouvoir être reliée à une dynamique concrète, son pouvoir d'interprétation reste faible. L'idéal est qu'elle puisse être racontée physiquement. On doit pouvoir dire ce qu'elle représente. Porte-t-elle une condensation, une synchronisation, une instabilité, une intensité de convection, un niveau de désorganisation, une activité de combustion, un taux de transformation, un degré d'endommagement, une pression de pilotage, une proximité de bifurcation ? Plus ce lien est clair, plus la variable d'ordre devient utile.

C'est ici qu'apparaît le dialogue entre théorie et données. Dans certains cas, la théorie suggère directement la variable d'ordre. Dans d'autres, ce sont les données qui révèlent une structure dominante. Mais dans les meilleurs cas, les deux se rencontrent. Une analyse exploratoire peut mettre en évidence une composante principale, un mode lent, une structure récurrente, une énergie cohérente. La théorie peut alors interpréter cette structure comme une amplitude, une variable de régime ou un indicateur de transition. La variable d'ordre n'est donc pas seulement trouvée, elle est reconnue comme pertinente à la fois empiriquement et physiquement.

Une cinquième propriété, très importante dans votre perspective, est la possibilité d'une dynamique réduite intelligible. Une bonne variable d'ordre est celle pour laquelle on peut écrire une évolution qui ait un sens. Cela rejoint directement votre triptyque potentiel, mémoire, bruit. La variable la plus féconde n'est pas seulement celle qui résume bien les données. C'est celle dont la dynamique peut être relue comme combinaison d'une structure de régimes, d'effets de mémoire et de fluctuations résiduelles. Autrement dit, une variable d'ordre devient réellement intéressante lorsqu'elle permet l'émergence naturelle d'un modèle réduit.

Ce critère est extrêmement opératoire. Il signifie que l'on peut tester une variable candidate non seulement par sa capacité descriptive, mais par sa capacité de fermeture. Peut-on écrire une dérive effective ? Observe-t-on une tendance vers certains états préférentiels ? Y a-t-il des signatures de mémoire ? Le résidu ressemble-t-il à un bruit raisonnablement interprétable ? Si la réponse est oui, alors on tient sans doute quelque chose de profond. Si au contraire la dynamique de la variable reste totalement opaque, sans structure, sans attracteurs, sans temps caractéristique ni résidu interprétable, alors cette variable n'est peut-être pas la bonne.

Concrètement, comment procéder ? La première étape consiste à partir du phénomène et non des seules données. Il faut d'abord formuler ce que l'on cherche à décrire : une transition de régime, une perte de stabilité, une propagation, une intermittence, une oscillation, une condensation, une fatigue progressive, une tension globale. Cette clarification est décisive, car elle oriente immédiatement le type de variable recherchée. Si l'on s'intéresse à un phénomène de basculement, on cherchera une grandeur qui distingue nettement avant et après. Si l'on s'intéresse à une propagation, on cherchera un champ local ou une densité spatiale. Si l'on s'intéresse à une dynamique cyclique, on cherchera une amplitude ou une phase.

La deuxième étape consiste à examiner les quantités naturelles du système. Il peut s'agir de densités, d'énergies, de flux, de gradients, d'écarts à une référence, de nombres de défauts, de masses condensées, de rapports de temps, de taux d'activité, ou de toute autre grandeur déjà présente dans la physique ou la logique fonctionnelle du système. On ne part pas d'abord des méthodes mathématiques. On part des objets naturels du problème. Cette étape évite de fabriquer une variable artificielle sans racine physique.

La troisième étape est exploratoire. On regarde comment ces grandeurs se comportent dans les données ou dans les simulations. On cherche lesquelles discriminent les régimes, lesquelles portent les temps longs, lesquelles montrent des signatures d'intermittence, de changement de pente, de saturation, de bifurcation, de regroupement. Les outils classiques peuvent ici être très utiles : corrélations, PCA, analyses spectrales, ondelettes, distributions, temps de retour, cartes d'états, distances à des profils de référence. Mais ces outils ne sont que des instruments. Ils doivent être utilisés au service de la question structurale.

La quatrième étape consiste à projeter le regard vers la dynamique. Une variable candidate peut être très bonne pour séparer des classes, mais médiocre pour porter une dynamique. Il faut donc regarder si son évolution temporelle ou spatio-temporelle fait apparaître des attracteurs, des états stables, des transitions, des ralentissements, des mémoires, des fluctuations résiduelles relativement structurées. C'est ici que la variable d'ordre commence à devenir le centre du modèle.

La cinquième étape est la plus importante. Il faut tenter une première écriture réduite. Même très grossière. On essaie de voir si la variable peut être représentée par une dynamique de type potentiel plus bruit, ou réaction plus diffusion, ou toute autre forme simple. Ce test est décisif. Une bonne variable d'ordre est souvent celle qui rend le phénomène plus simple sans le trahir. Lorsqu'une telle simplification devient possible, on sent que le système commence à parler.

On peut alors formuler quelques critères pratiques de validation. Une variable d'ordre crédible doit distinguer les régimes observés. Elle doit avoir une cohérence temporelle ou spatiale suffisante. Elle doit pouvoir être reconstruite de façon robuste à partir des données. Elle doit permettre une dynamique réduite interprétable. Et elle doit conserver un sens lorsqu'on change légèrement le contexte, le jeu de données ou l'échelle d'observation. Si elle ne vaut que dans un cas extrêmement particulier, elle risque d'être un artefact.

Il faut aussi accepter que, dans beaucoup de systèmes, il n'existe pas une unique variable d'ordre parfaite. Il peut y avoir plusieurs niveaux de réduction. Une variable peut porter la dynamique globale, une autre la mémoire, une autre encore les fluctuations d'environnement. Dans certains cas, il faudra même passer d'une variable d'ordre scalaire à un petit nombre de variables collectives. Cela ne contredit pas la démarche. Cela signifie simplement que le système demande une réduction à deux ou trois dimensions plutôt qu'à une seule. Le principe reste le même : chercher les grandeurs qui organisent le comportement global.

Dans votre propre perspective, il me semble qu'on peut proposer une définition très claire. Une variable d'ordre est une grandeur collective, lente ou structurante, qui distingue les régimes d'un système complexe et dont la dynamique peut être approximativement écrite comme l'effet combiné d'une structure de stabilité, d'une rétroaction différée des variables cachées et de fluctuations résiduelles. Cette définition a l'avantage d'être à la fois physique, opérationnelle et compatible avec vos deux grands cadres de modélisation.

Elle permet aussi de comprendre pourquoi la recherche d'une variable d'ordre est moins un problème de calcul qu'un problème de lecture. Il s'agit de voir, derrière l'abondance des phénomènes, quelle grandeur joue le rôle d'axe organisateur. Cette lecture demande de l'expérience, mais aussi une certaine discipline intellectuelle. Il faut toujours revenir à la même question : qu'est-ce qui change vraiment quand le système change ? Qu'est-ce qui résume ce changement sans l'écraser ? Qu'est-ce qui permet ensuite d'écrire une dynamique simple mais signifiante ?

On pourrait presque dire que l'identification d'une variable d'ordre est l'équivalent, dans la science des systèmes complexes, de la découverte d'un bon repère en géométrie.

Tant que l'on n'a pas trouvé le bon repère, les formes restent confuses. Une fois ce repère trouvé, les structures deviennent visibles. La variable d'ordre joue ce rôle. Elle n'est pas seulement un paramètre. Elle est le repère dans lequel la dynamique devient intelligible.

Ainsi, identifier concrètement une variable d'ordre revient à suivre une démarche en profondeur. On part du phénomène, on cherche ce qui distingue ses régimes, on examine quelles grandeurs collectives portent ce changement, on teste leur caractère lent et structurant, on tente une écriture réduite, puis on garde celle qui fait le mieux apparaître un paysage de stabilité, une mémoire et un résidu fluctuant interprétable. À ce moment-là, le système commence réellement à se laisser modéliser.

Variable d'ordre, potentiel, mémoire et bruit : vers une forme générale du modèle réduit des systèmes complexes

Lorsqu'on cherche à comprendre un système complexe, la difficulté première vient du fait que ce système possède beaucoup plus de degrés de liberté que ceux que l'on peut réellement observer, interpréter ou piloter. Qu'il s'agisse d'un fluide turbulent, d'un marché financier, d'un système biologique, d'un projet industriel, d'un matériau endommagé, d'un réseau technique ou d'un milieu astrophysique, on se heurte toujours au même problème. La physique fondamentale ou les équations complètes existent parfois, au moins en principe, mais elles sont trop riches, trop nombreuses, trop couplées, ou trop peu accessibles pour être utilisées directement comme langage de compréhension globale. Il faut donc réduire. Mais réduire ne signifie pas appauvrir arbitrairement. Réduire signifie chercher le bon niveau de description, celui où la complexité devient lisible.

C'est ici qu'apparaît la notion de variable d'ordre. Une variable d'ordre n'est pas simplement une variable pratique ou commode. Elle est la grandeur qui condense, à une échelle pertinente, l'état collectif du système. Elle ne décrit pas tous les détails du phénomène, mais elle en résume l'organisation essentielle. Elle porte le régime dans lequel le système se trouve, elle traduit son niveau de structuration, elle signale ses changements d'état, et elle offre un point d'entrée à partir duquel une dynamique intelligible peut être formulée. En ce sens, la variable d'ordre est le pont entre la profusion microscopique et la lecture macroscopique.

Mais une fois cette variable choisie, une question décisive se pose. Sous quelle forme peut-on écrire sa dynamique réduite de manière suffisamment générale pour qu'elle soit à la fois physique, interprétable et transposable d'un domaine à l'autre ? L'idée qui émerge ici est qu'une grande variété de systèmes complexes peut être relue à travers trois contributions fondamentales. La première organise les régimes possibles du

système. La deuxième traduit l'effet différé de ce qui n'a pas été gardé explicitement dans la réduction. La troisième représente l'agitation résiduelle qui subsiste à petite échelle. Autrement dit, la dynamique de la variable d'ordre peut souvent être pensée comme la combinaison d'un potentiel, d'une mémoire et d'un bruit.

Cette proposition est profonde, car elle revient à dire qu'un modèle réduit n'est pas seulement une simplification du réel. Il est une redistribution de la complexité. Ce que l'on retire de la description détaillée ne disparaît pas sans laisser de trace. Une partie se réorganise sous forme de structure moyenne, une autre sous forme d'histoire, et une autre encore sous forme de fluctuation. Le système réduit n'est donc pas une mécanique pauvre. C'est un système qui continue à porter, sous une forme condensée, les effets essentiels de la richesse initiale.

Le premier terme de cette décomposition est le potentiel. Celui-ci représente la structure générale des régimes possibles. Il donne une géographie du comportement global. Certains états correspondent à des zones stables, d'autres à des états instables, d'autres encore à des seuils ou à des barrières entre régimes. Le potentiel ne doit pas être compris ici comme un artifice purement mathématique. Il représente la manière dont le système, en moyenne, tend à s'organiser. Il exprime la présence d'états privilégiés, d'attracteurs, de formes d'équilibre ou de quasi-équilibre. Lorsqu'un système possède deux états stables séparés par une barrière, le potentiel permet de lire immédiatement la coexistence possible de plusieurs régimes et la difficulté relative du passage de l'un à l'autre.

Cette image est extrêmement féconde, car elle transforme la dynamique en paysage. On ne voit plus seulement une variable évoluer dans le temps. On voit cette variable évoluer dans une topographie de stabilité. Une vallée représente un état préférentiel, une crête une séparation, une pente une tendance de retour. Grâce à cette représentation, la notion de régime devient concrète. Un système peut être profondément installé dans un état stable, proche d'un seuil, ou au contraire fragilisé parce que la barrière qui le protégeait s'est abaissée. Le potentiel devient ainsi la forme condensée de la structure des possibles.

Le deuxième terme est la mémoire. C'est sans doute l'un des points les plus importants pour une physique des systèmes complexes. Lorsqu'on réduit un système à une seule variable d'ordre ou à un petit nombre de variables collectives, on élimine une masse considérable de degrés de liberté. Or ces degrés de liberté éliminés ne sont pas neutres. Ils continuent d'agir, mais de façon indirecte. Leur action réapparaît souvent sous la forme d'une dépendance au passé. Le système réduit ne réagit plus seulement à son état présent, mais aussi à son histoire. Cette histoire peut être courte ou longue, explicite ou cachée, locale ou distribuée sur plusieurs échelles, mais elle rappelle

toujours la même réalité physique : le système complet était plus riche que la description actuelle.

La mémoire longue a donc une signification bien plus profonde qu'un simple raffinement statistique. Elle est la signature de l'épaisseur temporelle du système. Elle dit que le présent n'est pas indépendant du passé récent ou lointain. Elle dit aussi que les variables non retenues dans le modèle n'ont pas été supprimées, mais intégrées de manière différée dans la dynamique observable. Dans certains cas, cette mémoire pourra prendre la forme d'un noyau intégral. Dans d'autres, elle sera portée par une variable cachée lente, par une volatilité latente, par une cascade d'échelles ou par un processus d'adaptation progressive. Quelle que soit sa forme, son sens physique reste le même : ce que l'on n'a pas gardé comme variable explicite revient comme histoire.

Le troisième terme est le bruit. Là encore, il ne faut pas le réduire à l'idée triviale d'erreur ou d'imprécision. Dans un modèle réduit, le bruit représente l'agitation rapide, diffuse, résiduelle, qui continue à affecter la variable d'ordre. Il peut venir des degrés de liberté rapides, des interactions locales non résolues, des perturbations du milieu, ou simplement du fait que la réduction ne conserve que la structure lente et moyenne du phénomène. Le choix d'un bruit gaussien constitue souvent un premier niveau très naturel. Il représente l'agitation élémentaire, désordonnée, de faible mémoire propre, qui secoue le système à petite échelle.

Le bruit gaussien est en ce sens la brique de base de la fluctuation. Il n'épuise pas toute la richesse possible des phénomènes complexes. Dans certains cas, il faudra aller vers des bruits multiplicatifs, des fluctuations intermittentes, des sauts, ou des lois à queues épaisses. Mais comme premier niveau de description, il joue un rôle essentiel. Il empêche de figer le système dans une évolution purement déterministe. Il rappelle que même si la structure moyenne et la mémoire sont connues, la dynamique conserve une part d'ouverture, d'incertitude et de variabilité.

On peut alors comprendre la portée générale de cette décomposition. Une fois choisie la variable d'ordre pertinente, sa dynamique réduite peut être relue comme la synthèse de trois composantes. Le potentiel organise les régimes stables et les transitions possibles. La mémoire longue traduit la rétroaction différée des variables éliminées. Le bruit résume l'agitation rapide résiduelle. Le système réduit devient ainsi une variable qui n'évolue pas seulement dans un paysage, mais dans un paysage habité par l'histoire et traversé par des fluctuations.

Cette formulation a un intérêt théorique majeur, car elle donne une forme très générale au passage entre physique fondamentale et modèle réduit. Elle suggère que ce que l'on observe à l'échelle macroscopique n'est pas la simple projection pauvre du système complet, mais sa reformulation en trois effets principaux. Une tendance vers certains

états, une trace persistante du passé, et une agitation locale permanente. Le détail microscopique se condense en structure, mémoire et bruit. Cela donne une lecture beaucoup plus claire de ce que signifie modéliser un système complexe.

Cette approche éclaire aussi la manière de choisir une bonne variable d'ordre. Une variable d'ordre n'est pas seulement bonne parce qu'elle résume le système ou parce qu'elle est facile à mesurer. Elle est bonne lorsque sa dynamique peut être comprise de manière naturelle dans ce triptyque. Autrement dit, la meilleure variable d'ordre est celle pour laquelle on peut identifier un paysage de stabilité, une rétroaction différée des variables cachées et un niveau de fluctuation résiduelle. Cette idée donne un critère très opérationnel. On ne choisit plus la variable d'ordre uniquement parce qu'elle varie lentement ou parce qu'elle semble synthétique, mais parce qu'elle permet une écriture intelligible en potentiel, mémoire et bruit.

Cette perspective permet en outre d'unifier des cadres qui, au premier regard, pourraient sembler différents. Dans un modèle de type EDO, cette structure apparaît directement. La variable d'ordre évolue dans un potentiel effectif, subit des fluctuations rapides et garde la trace du passé par un terme de mémoire ou par une volatilité à mémoire longue. Dans une dynamique spatialisée de type diffusion-réaction, on retrouve le même schéma sous une autre forme. Le potentiel devient alors local, incorporé dans la structure du terme de réaction. La mémoire peut prendre la forme d'une hystérésis, d'une récupération lente, d'une variable interne, ou d'un terme non local en temps. Le bruit devient une fluctuation locale dans l'espace et le temps. Ainsi, le triptyque ne disparaît pas. Il change simplement de géométrie.

Cela conduit à une idée essentielle. Le vrai cadre général n'est peut-être pas l'EDO seule, ni même le modèle diffusion-réaction pris isolément. Le cadre le plus profond est peut-être celui-ci : tout modèle réduit de système complexe cherche à articuler une structure des régimes, une mémoire des couplages cachés et des fluctuations résiduelles. L'EDO serait la forme concentrée de cette idée sur une variable globale. La dynamique spatialisée en serait la forme distribuée, lorsqu'une transformation locale peut se propager dans un milieu.

Une telle vision a également une grande valeur pédagogique. Elle offre une manière simple et robuste d'expliquer des phénomènes très variés sans sombrer dans le détail technique propre à chaque domaine. Que l'on parle d'un système physique, biologique, économique, organisationnel ou astrophysique, on peut poser les mêmes questions. Quel est le paysage des états possibles ? Quelle part du passé continue à agir sur le présent ? Quelle est l'intensité des fluctuations résiduelles ? En répondant à ces trois questions, on pose déjà les fondations du modèle réduit.

On voit alors que cette approche n’est pas seulement une technique de modélisation. Elle est une manière d’interpréter le réel. Elle suppose que les systèmes complexes ne sont compréhensibles ni par le seul déterminisme structurel, ni par la seule histoire, ni par la seule agitation aléatoire. Ils doivent être pensés à l’intersection de ces trois dimensions. Ils possèdent une architecture des régimes, une profondeur temporelle et une variabilité intrinsèque. C’est cette triple nature qui leur donne leur richesse et leur difficulté.

On peut donc proposer la formulation suivante comme cœur théorique de la démarche. Dans un système complexe, une fois choisie une variable d’ordre pertinente, la dynamique réduite peut souvent être interprétée comme la combinaison d’une composante structurante, représentée par un potentiel effectif organisant les régimes stables et les transitions possibles, d’une composante rémanente, représentée par une mémoire longue traduisant la rétroaction différée des degrés de liberté éliminés, et d’une composante fluctuante, représentée par un bruit effectif résumant l’agitation rapide résiduelle. La dynamique observable devient alors la synthèse de structure, histoire et fluctuation.

Cette formule me paraît suffisamment générale pour devenir le noyau d’un chapitre, voire d’une méthode complète. Elle ne prétend pas remplacer les équations fondamentales, mais elle offre un cadre unificateur pour leur réduction. Elle ne nie pas la diversité des phénomènes, mais elle montre qu’au-delà de cette diversité, un même schéma peut souvent apparaître. C’est précisément cette possibilité d’une forme générale du modèle réduit qui donne à la notion de variable d’ordre toute sa portée.