Mesurer la complexité à partir d’une variable d’ordre

EDO, potentiel, entropie de Shannon, exemples quadratique et quartique

Introduction

Lorsqu'on étudie un système complexe, on ne peut généralement pas suivre toutes ses composantes élémentaires. Un marché financier comporte des milliers d'acteurs, un fluide turbulent contient une infinité de degrés de liberté, une organisation humaine mobilise des individus, des règles, des contraintes, des décisions et des boucles de rétroaction. Face à cette complexité, l'objectif n'est pas de tout décrire, mais de trouver une grandeur synthétique capable de représenter l'état global du système.

C'est le rôle de la variable d'ordre. Une variable d'ordre X(t) est une grandeur macroscopique qui condense le comportement collectif du système. Elle ne décrit pas tous les détails microscopiques, mais elle permet de suivre l'évolution globale du système. Dans un marché financier, X(t) peut représenter un indice recentré ; dans un système physique, une amplitude dominante ; dans une organisation, un indicateur global de tension, de performance ou de désorganisation.

L'idée centrale est simple : si la variable d'ordre résume l'état du système, alors la manière dont cette variable explore ses états possibles peut servir à mesurer la complexité du système. La complexité n'est plus seulement une idée qualitative. Elle devient liée à la répartition statistique des états effectivement visités par X(t).

1. L’EDO comme modèle réduit du système complexe

On peut modéliser l'évolution de la variable d'ordre par une équation différentielle stochastique. Dans sa forme générale, elle peut s'écrire :

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(t)dW_t + sdB_t$$

Cette équation contient trois idées fondamentales. Le terme -V'(X_t) représente la force de rappel du système. Il signifie que la variable d'ordre n'évolue pas dans un hasard pur. Elle est guidée par un paysage de potentiel V(X). Les minima du potentiel correspondent aux états stables, aux régimes préférentiels ou aux attracteurs du système. Les maxima et les zones élevées du potentiel correspondent aux états rares, instables ou difficiles à atteindre.

Le terme σ(t) dW_t représente des fluctuations dont l'intensité peut varier dans le temps. Dans un système réel, l'agitation n'est pas toujours constante. Il existe des périodes calmes et des périodes instables. Dans certains modèles, σ(t) peut même posséder une mémoire longue : les périodes agitées tendent alors à se regrouper.

Le terme s dB_t représente un bruit de fond permanent. Il traduit l'idée qu'un système vivant, financier, physique ou organisationnel n'est jamais parfaitement immobile. Il subsiste toujours une agitation minimale.

L'EDO devient ainsi une représentation réduite du système complexe : une variable d'ordre, un potentiel qui structure son mouvement, et des fluctuations qui lui permettent d'explorer plusieurs états.

2. Le potentiel comme énergie libre effective

Le potentiel V(X) peut être imaginé comme un paysage. Une vallée représente un état stable. Une crête représente une barrière. Une zone plate indique que le système peut se déplacer plus facilement. Cette image est très pédagogique, car elle permet de lire la dynamique comme un déplacement dans un relief.

Dans un système dissipatif, l'organisation ne se maintient pas gratuitement. Le système reçoit de l'énergie, en dissipe une partie, et conserve localement une forme d'ordre. Cette énergie disponible peut être appelée énergie libre. Dans un modèle réduit, cette énergie libre n'est pas nécessairement l'énergie libre thermodynamique exacte. Elle devient une énergie libre effective, reconstruite au niveau de la variable d'ordre.

La passerelle est donc la suivante : le potentiel V(X) de l'EDO peut être interprété comme l'énergie libre effective qui structure l'évolution de la variable d'ordre. Il représente les régimes vers lesquels le système tend spontanément et les états qu'il doit franchir avec effort.

$$énergie\ libre\ effective\ \approx\ potentiel V(X)$$

Cette identification doit rester prudente. On ne dit pas que le potentiel est toujours l'énergie libre physique exacte. On dit qu'il joue ce rôle dans le modèle réduit : il résume, dans l'espace de la variable d'ordre, les contraintes, les attracteurs et les coûts de transition du système.

3. De la trajectoire à la distribution des états

Si l'on observe longtemps la trajectoire X(t), on peut construire la densité de probabilité p(X). Cette densité indique avec quelle fréquence la variable d'ordre visite chaque zone de l'espace des états.

Si p(X) est concentrée autour d'une seule valeur, le système explore peu d'états. Il est relativement prévisible. Si p(X) est étalée ou possède plusieurs modes, le système explore davantage d'états. Il présente une plus grande diversité dynamique.

On peut alors reconstruire un potentiel effectif à partir de cette densité :

$$V(X) = -\ ln(p(X))$$

Cette formule signifie que les états très probables correspondent à des valeurs basses du potentiel. Les états rares correspondent à des valeurs élevées du potentiel. Les vallées du potentiel sont donc les états fréquemment visités, tandis que les crêtes sont les états peu probables.

Cette relation fait le lien entre dynamique, probabilité et information. Le système possède une trajectoire ; cette trajectoire produit une distribution ; cette distribution définit un potentiel ; ce potentiel devient une lecture informationnelle de l'organisation du système.

4. Pourquoi l’entropie de Shannon mesure la complexité

L'entropie de Shannon mesure l'incertitude associée à une distribution de probabilité. Dans le cadre de la variable d'ordre, elle mesure l'incertitude sur l'état occupé par X(t).

Lorsque l'espace des états est discrétisé en classes i, on écrit :

$$H(X) = -\sum_i p_i ln\left(p_i\right)$$

Dans cette formule, p_i est la probabilité que X(t) se trouve dans la classe i. Si un état est très probable, il est peu surprenant et apporte peu d'information. Si un état est rare, il est plus surprenant et apporte davantage d'information. L'entropie de Shannon mesure donc la quantité moyenne d'information nécessaire pour décrire l'état du système.

Dans votre cadre, cette entropie devient une mesure naturelle de la complexité, parce qu'elle mesure la répartition des états possibles réellement visités par la variable d'ordre. Si le système visite toujours le même état, l'entropie est faible. Si le système se répartit entre plusieurs états ou plusieurs régimes, l'entropie augmente.

$$C(X) = H(X)$$

Première mesure de complexité associée à la variable d'ordre

Cette définition signifie que la complexité est d'abord la diversité statistique des états accessibles. Elle ne mesure pas seulement l'agitation du signal ; elle mesure l'étendue de l'espace des états effectivement occupé.

5. Lien direct entre entropie et potentiel

La relation avec le potentiel devient immédiate si l'on pose, pour chaque classe i :

$$V_i = -\ ln\left(p_i\right)$$

En remplaçant -ln(p_i) par V_i dans la formule de Shannon, on obtient :

$$H(X) = \sum_i p_i V_i$$

Cette écriture est très importante. Elle signifie que l'entropie de Shannon est la moyenne du potentiel informationnel exploré par le système. Le système ne se contente pas d'avoir un paysage de potentiel ; il parcourt ce paysage. La complexité dépend donc à la fois de la forme du paysage et de la manière dont la trajectoire X(t) l'occupe.

On peut alors formuler l'idée centrale ainsi :

$$complexité\ =\ potentiel\ informationnel\ moyen\ exploré\ par\ la\ variable\ d'ordre$$

Le potentiel V(X) décrit l'organisation du système. La densité p(X) décrit la répartition des états visités. L'entropie H(X) mesure la richesse de cette répartition.

6. Les hypothèses nécessaires

Cette manière de mesurer la complexité repose sur plusieurs hypothèses. Ces hypothèses sont importantes, car elles évitent de transformer une formule simple en affirmation abusive.

- La variable d'ordre X(t) doit être pertinente. Elle doit représenter une dimension réellement structurante du système.
- La trajectoire observée doit être suffisamment longue. Sinon, certains états possibles ne seront pas vus et l'entropie sera sous-estimée.

- Le système doit être approximativement stationnaire sur la période étudiée. Si la distribution change au cours du temps, il faut utiliser des fenêtres glissantes.
- La discrétisation de l'espace des états doit être raisonnable. Trop peu de classes appauvrissent la mesure ; trop de classes ajoutent du bruit statistique.
- La mesure de Shannon doit être interprétée avec prudence : un bruit pur peut avoir une forte entropie sans être complexe au sens organisationnel.

Pour comparer plusieurs systèmes, il est utile de normaliser l'entropie. Si l'on utilise N classes, l'entropie maximale vaut :

$$H_{max} = ln(N)$$

On définit alors une complexité normalisée :

$$C_N(X) = \frac{H(X)}{ln(N)}$$

Cette grandeur varie entre 0 et 1. Une valeur proche de 0 indique que le système explore très peu d'états. Une valeur proche de 1 indique qu'il explore de nombreux états avec une répartition assez équilibrée.

7. Exemple du potentiel quadratique : un seul régime stable

Considérons d'abord un potentiel quadratique :

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2$$

Ce potentiel possède un seul minimum, situé en x = 0. Il correspond à un système qui possède un seul régime stable. La densité stationnaire associée est de type gaussien :

$$p(x) \propto exp(- V(x))$$

Le système fluctue autour d'un seul état d'équilibre. Il peut s'en écarter sous l'effet du bruit, mais la force de rappel le ramène vers le centre.

Dans ce cas, la complexité mesurée par l'entropie dépend surtout de la largeur de la distribution. Si le potentiel est très raide, X(t) reste proche du minimum. La distribution est étroite, l'incertitude est faible et l'entropie est faible. Si le potentiel est plus plat, la variable explore une zone plus large. La distribution est plus étalée et l'entropie augmente.

Cependant, même lorsque la distribution est relativement large, le système reste organisé autour d'un seul attracteur. Du point de vue des régimes accessibles, il s'agit d'une organisation simple.

8. Exemple du potentiel quartique : deux régimes stables

Considérons maintenant un potentiel quartique bistable :

$$V(x) = a\left(x^2 - b^2\right)^2$$

Ce potentiel possède deux minima situés approximativement en :

$$x =- betx =+ b$$

Il décrit un système capable d'occuper deux régimes stables différents. La densité stationnaire associée devient bimodale :

$$p(x) \propto exp(-V(x))$$

La variable d'ordre passe alors une partie du temps autour d'un premier régime et une autre partie du temps autour d'un second régime. Si les fluctuations sont suffisantes, elle peut franchir la barrière située entre les deux vallées et basculer d'un régime à l'autre.

La complexité augmente pour une raison simple : il existe une incertitude supplémentaire. Dans le cas quadratique, il fallait seulement savoir où se trouve X(t) autour d'un seul centre. Dans le cas quartique, il faut aussi savoir dans quelle vallée se trouve le système.

$$entropie\ totale = entropie\ intra - vallée + entropie\ du\ choix\ entre\ les\ vallées$$

Si les deux vallées sont également probables et possèdent une largeur comparable, le fait d'avoir deux régimes ajoute approximativement :

$$ln(2)$$

à l'entropie par rapport à une seule vallée équivalente. On peut écrire de façon intuitive :

$$H_{bimodal} \approx H_{unevallée} + ln(2)$$

Cette formule montre que la bimodalité introduit une information de régime. Le système n'est plus seulement fluctuant ; il est capable d'exister selon deux formes stables.

9. Quadratique et quartique : comparaison pédagogique

Aspect	Potentiel quadratique	Potentiel quartique bistable
Forme du potentiel	Une seule vallée.	Deux vallées séparées par une barrière.
Nombre de régimes stables	Un seul régime stable.	Deux régimes stables possibles.
Densité p(x)	Unimodale, souvent gaussienne.	Bimodale si les deux vallées sont occupées.
Source principale d'incertitude	Position autour d'un seul attracteur.	Position dans une vallée et choix de la vallée.
Entropie de Shannon	Liée surtout à la largeur de la distribution.	Augmentée par la coexistence de plusieurs régimes.
Lecture de la complexité	Complexité faible ou modérée.	Complexité plus riche si les transitions ou les deux occupations sont réelles.

Cette comparaison montre que la complexité ne vient pas seulement du bruit. Elle vient aussi de la structure du paysage de potentiel. Une distribution bimodale possède une richesse particulière, parce qu'elle encode plusieurs régimes accessibles.

10. Commentaires et limites

Il ne faut toutefois pas dire qu'un potentiel quartique donne toujours une entropie plus forte qu'un potentiel quadratique. La réponse dépend de la largeur des vallées, de la profondeur relative des minima, de la hauteur de la barrière et de l'intensité du bruit.

Si les deux vallées du potentiel quartique sont très étroites, la distribution peut rester très concentrée et l'entropie peut être faible. Si une vallée est beaucoup plus profonde que l'autre, le système occupe presque toujours le même régime. La distribution devient alors presque unimodale et le gain d'entropie est faible. A l'inverse, un potentiel quadratique très plat peut produire une distribution très large, dont l'entropie peut dépasser celle d'une bimodale très concentrée.

La conclusion correcte est donc la suivante : à largeur comparable des vallées et si les deux régimes sont réellement visités, une densité bimodale issue d'un potentiel quartique possède généralement une entropie plus élevée qu'une densité unimodale issue d'un potentiel quadratique, parce qu'elle ajoute une incertitude sur le régime occupé par le système.

11. Conclusion générale

La mesure de complexité par l'entropie de Shannon permet de donner une traduction quantitative à une idée intuitive : un système est plus complexe lorsqu'il peut se répartir entre plusieurs états ou plusieurs régimes accessibles.

A partir d'un système complexe, on définit une variable d'ordre X(t). Cette variable est modélisée par une EDO stochastique dans un potentiel V(X). En observant la trajectoire de X(t), on estime une densité stationnaire p(X). Cette densité permet de reconstruire un potentiel effectif :

$$V(X) = -\ ln(p(X))$$

L'entropie de Shannon :

$$H(X) = -\sum_i p_i ln\left(p_i\right)$$

mesure alors la diversité des états visités par la variable d'ordre. Comme :

$$V_i = -\ ln\left(p_i\right)$$

on obtient :

$$H(X) = \sum_i p_i V_i$$

La complexité peut donc être interprétée comme le potentiel informationnel moyen exploré par le système.

Dans un potentiel quadratique, le système explore essentiellement un seul régime stable. Dans un potentiel quartique bistable, il peut explorer deux régimes stables séparés par une barrière. Si ces deux régimes sont effectivement visités, l'entropie augmente, car la répartition des états possibles devient plus riche.

On peut retenir la formule conceptuelle suivante :

$$potentiel\ =\ forme\ du\ paysage; probabilité\ =\ occupation\ du\ paysage; entropie\ =\ richesse\ de\ cette\ occupation$$