Du duel entre deux magasins au marché à M attracteurs concurrents

Modèle pédagogique, équations, intérêt conceptuel et références bibliographiques

Ce texte prolonge le modèle pédagogique de concurrence entre deux magasins en le généralisant à M magasins. L'objectif n'est pas seulement de compliquer le calcul. Il s'agit de montrer comment un cas élémentaire de duel commercial peut devenir un modèle réduit de marché concurrentiel, c'est-à-dire un système dans lequel plusieurs attracteurs économiques se partagent une même population de clients.

Le fil conducteur est le suivant : chaque magasin choisit un prix ; ce prix contribue à financer une efficacité commerciale ou marketing ; mais ce même prix agit aussi comme une pénalité concurrentielle si le magasin devient plus cher que ses concurrents. L'attractivité obtenue détermine ensuite une part de marché, puis cette part de marché produit des ventes, une marge et un profit. Enfin, la population de clients ne bascule pas instantanément vers l'équilibre : elle suit un transitoire gouverné par des constantes de temps qui traduisent la porosité du marché.

1. Du cas à deux magasins au cas à M magasins

Dans le modèle à deux magasins, la population totale se partageait entre une population neutre, une population captée par le magasin 1 et une population captée par le magasin 2. On écrivait donc :

$$N = N_0 + N_1 + N_2$$

Le passage à M magasins généralise cette partition. La population neutre correspond aux consommateurs non encore captés, indécis ou non exposés à l'offre. Les populations N_i correspondent aux clients captés par les magasins i = 1,…,M. On écrit alors :

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^{M} N_i$$

Ce simple changement modifie profondément la lecture du problème. Avec deux magasins, la concurrence est frontale. Avec M magasins, elle devient distribuée. Un magasin ne se compare plus seulement à un adversaire unique ; il se compare à un ensemble de concurrents, éventuellement plus ou moins proches de lui selon la géographie, la gamme, le prix, la clientèle visée ou l'image commerciale.

2. Intérêt conceptuel de la généralisation

La généralisation à M magasins permet d'introduire quatre idées importantes. Premièrement, elle permet de représenter un vrai marché local ou sectoriel, où coexistent un leader, des challengers, des acteurs de niche et des concurrents plus marginaux. Deuxièmement, elle fait apparaître une fragmentation possible du marché : tous les acteurs ne s'affrontent pas avec la même intensité. Troisièmement, elle introduit une géométrie de concurrence grâce à une matrice d'interaction. Quatrièmement, elle relie naturellement le modèle à la littérature sur les modèles d'attraction de parts de marché, les modèles logit multinomiaux, les jeux de prix oligopolistiques, les dynamiques Lotka-Volterra appliquées aux marchés et les modèles de diffusion concurrentielle.

L'intérêt pédagogique est donc double. D'un côté, on garde une structure très simple, compréhensible à partir du cas à deux magasins. De l'autre, on ouvre la porte à des phénomènes plus riches : arrivée d'un nouvel entrant, guerre des prix, différenciation par segment, domination d'un acteur, coexistence de niches, ou évolution dynamique des parts de marché.

3. Les variables du problème

On suppose qu'il existe M magasins vendant le même produit ou un produit suffisamment comparable. Chaque magasin i choisit un prix p_i. Il possède aussi un coefficient alpha_i, positif et inférieur à 1, qui représente la fraction du prix transformée en efficacité commerciale, par exemple en marketing, en qualité de présentation, en service ou en visibilité.

$$0 < \alpha_i < 1$$

Le coût unitaire du produit pour le magasin i est noté c_i. La demande totale adressée au marché est notée D. Cette demande totale peut être considérée comme fixe dans un premier modèle pédagogique, ou rendue dépendante du niveau général des prix dans un modèle plus avancé.

Symbole	Interprétation
N	Population totale de consommateurs potentiels
N_0(t)	Population neutre ou non encore captée
N_i(t)	Population captée par le magasin i
M	Nombre total de magasins concurrents
p_i	Prix choisi par le magasin i
alpha_i	Fraction du prix convertie en efficacité marketing ou commerciale
c_i	Coût unitaire de revient du produit pour le magasin i

Symbole	Interprétation
X_i	Attractivité ou efficacité relative du magasin i
P_i	Part de marché d'équilibre du magasin i
Pi_i	Profit du magasin i
λ_0	Vitesse de captation de la population neutre
λ	Vitesse de rééquilibrage concurrentiel entre magasins

4. Attractivité du magasin i : comparaison au prix moyen des concurrents

Dans le cas à deux magasins, l'attractivité du magasin 1 était construite comme la somme d'un effet propre et d'un effet concurrentiel. L'effet propre venait de la fraction du prix convertie en efficacité commerciale. L'effet concurrentiel venait du différentiel de prix avec le concurrent. Pour M magasins, le plus simple est de comparer le prix du magasin i au prix moyen des autres magasins.

$$p'_{-i} = \frac{1}{M-1}\sum_{j\neq i} p_j$$

L'attractivité du magasin i peut alors être posée sous la forme :

$$X_i = A\alpha_i p_i + B\left(p'_{-i} - p_i\right)$$

Le paramètre A mesure l'efficacité de la conversion du prix en visibilité, marketing ou qualité commerciale. Le paramètre B mesure la sensibilité concurrentielle au différentiel de prix. Si le magasin i est moins cher que le prix moyen des concurrents, alors pbar_{-i}-p_i est positif et son attractivité augmente. S'il est plus cher que la moyenne, ce terme devient négatif et son attractivité diminue.

On peut aussi écrire cette équation sous une forme développée :

$$X_i = \left(A\alpha_i - B\right)p_i + \frac{B}{M-1}\sum_{j\neq i} p_j$$

5. La matrice de concurrence : géométrie du marché

La comparaison au prix moyen est utile pour poser le problème, mais elle suppose que tous les concurrents pèsent de la même manière. Dans un vrai marché, cette hypothèse est rarement satisfaisante. Un magasin peut être beaucoup plus menacé par un concurrent

proche géographiquement ou proche en gamme que par un concurrent éloigné ou positionné sur un autre segment.

On introduit donc une matrice de concurrence W. Le coefficient w_ij mesure l'intensité de concurrence exercée par le magasin j sur le magasin i. On prend généralement :

$$w_{ij} \geq 0, w_{ii} = 0, \sum_{j \neq i} w_{ij} = 1$$

L'attractivité devient alors :

$$X_i = A\alpha_i p_i + B\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} p_j - p_i\right)$$

La matrice W joue le rôle d'une géométrie du marché. Elle peut coder la proximité géographique, la proximité de gamme, la proximité de clientèle, la proximité de prix ou la proximité symbolique entre magasins. Dans une lecture de physique de la complexité, W est une matrice d'interaction entre attracteurs économiques.

6. Parts de marché d'équilibre

Une fois les attractivités X_i définies, il faut transformer ces attractivités en parts de marché. Dans le modèle pédagogique le plus simple, on écrit :

$$P_i = \frac{X_i}{\sum_{k=1}^{M} X_k}$$

Cette forme conserve l'intuition directe : la part de marché d'un magasin est proportionnelle à son attractivité relative. Elle a cependant une limite : elle suppose que tous les X_i restent positifs. Si une attractivité devient négative, l'interprétation probabiliste disparaît.

C'est pourquoi la littérature économique et marketing utilise souvent une forme logit multinomiale :

$$P_i = \frac{exp(X_i)}{\sum_{k=1}^{M} exp(X_k)}$$

Cette écriture garantit que toutes les parts sont positives et que leur somme vaut 1. Elle est utilisée dans les modèles de choix discret et dans les modèles d'attraction de parts de marché. Le modèle pédagogique X_i / somme X_i peut donc être vu comme une approximation simple de la logique logit.

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1$$

7. Demande, ventes, marge et profit

Si la demande totale du marché est D, les ventes du magasin i sont :

$$D_i = DP_i$$

La marge unitaire nette doit tenir compte du coût de revient et de la fraction du prix consacrée au marketing ou à l'efficacité commerciale. On pose donc :

$$m_i = \left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i$$

Le profit du magasin i est alors :

$$\Pi_i = DP_i[\left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i)$$

Chaque magasin choisit son prix en tenant compte des prix des autres magasins. Le problème devient un jeu de prix à M acteurs. L'équilibre recherché est un équilibre de Nash : aucun magasin ne peut améliorer son profit en modifiant seul son prix lorsque les prix des autres sont fixés à leur valeur d'équilibre.

$$p_i^* = arg \max_{p_i} \Pi_i\left(p_i, p_{-i}^*\right)$$

$$i = 1, ..., M$$

8. Amorcer la résolution : conditions générales d'optimalité

On note :

$$S = \sum_{k=1}^{M} X_k$$

La part de marché vaut P_i = X_i/S et le profit vaut Pi_i = D(X_i/S)m_i. La condition du premier ordre pour le magasin i est :

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0$$

En dérivant, on obtient :

$$\left(1 - \alpha_i\right)P_i + m_i\frac{\partial P_i}{\partial p_i} = 0$$

Or :

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_i} = \frac{\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_i}\right)S - X_i\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)}{S^2}$$

Dans le modèle avec matrice W, on a :

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_i} = A\alpha_i - B$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial p_i} = Bw_{ki}, k \neq i$$

Donc :

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = A\alpha_i - B + B\sum_{k\neq i} w_{ki}$$

La condition générale d'optimalité devient alors :

$$\left(1 - \alpha_i\right)X_i S + [\left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i)[\left(A\alpha_i - B\right)S - X_i\frac{\partial S}{\partial p_i}) = 0$$

Pour i = 1,…,M, on obtient un système de M équations à M inconnues p_1,…,p_M. Dans le cas général, ce système se résout numériquement.

9. Cas symétrique : solution fermée

Pour obtenir une expression analytique simple, on suppose que tous les magasins sont identiques. On pose :

$$\alpha_i = \alpha, c_i = c, w_{ij} = \frac{1}{M-1}(j \neq i)$$

On cherche un équilibre symétrique :

$$p_1^* = p_2^* = \cdots = p_M^* = p^*$$

Dans ce cas, le prix moyen concurrent est égal à p*, donc le terme concurrentiel s'annule à l'équilibre symétrique :

$$X_i = A\alpha p^*$$

La somme des attractivités vaut :

$$S = MA\alpha p^*$$

Chaque magasin a donc une part de marché égale à :

$$P_i^* = \frac{1}{M}$$

En calculant la dérivée de la part de marché par rapport au prix du magasin i, on obtient au voisinage de l'équilibre symétrique :

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_i} = \frac{(M-1)A\alpha - MB}{M^2 A\alpha p}$$

La condition d'optimalité donne alors le prix optimal symétrique :

$$p^* = \frac{c[MB-(M-1)A\alpha)}{(1-\alpha)[MB-(2M-1)A\alpha)}$$

Cette formule généralise celle obtenue pour deux magasins. En effet, si M = 2, on retrouve :

$$p^* = \frac{c(2B-A\alpha)}{(1-\alpha)(2B-3A\alpha)}$$

Pour que le prix soit positif et fini dans cette version, il faut notamment que le dénominateur soit positif :

$$B > \frac{2M-1}{M} A\alpha$$

Cette condition a un sens économique clair. La sensibilité concurrentielle au prix doit être assez forte pour contrebalancer les effets positifs d'une hausse de prix sur la marge et sur l'efficacité marketing financée par le prix.

10. Dynamique transitoire avec population neutre

Le prix optimal ne dit pas à quelle vitesse les clients se répartissent entre les magasins. Pour cela, il faut ajouter une dynamique de population. On conserve une population neutre N_0(t), c'est-à-dire une population non encore captée. Elle décroît avec une constante λ_0 :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\lambda_0 N_0$$

$$N_0(t) = N_0(0) exp\left(-\lambda_0 t\right)$$

On définit le marché déjà capté :

$$M_c(t) = N - N_0(t)$$

Attention : M_c(t) désigne ici le marché capté, afin de ne pas le confondre avec M, le nombre de magasins. Les populations captées N_i(t) convergent vers les parts d'équilibre P_i*. On pose :

$$\frac{dN_i}{dt} = \lambda_0 P_i^* N_0 + \lambda\left(P_i^* \sum_{k=1}^{M} N_k - N_i\right)$$

Le premier terme représente la conquête des consommateurs neutres. Le second terme représente le rééquilibrage concurrentiel entre les magasins déjà présents sur le marché. La solution explicite est :

$$N_i(t) = P_i^* M_c(t) + [N_i(0) - P_i^* M_c(0))exp(- \lambda t)$$

avec :

$$M_c(t) = N - N_0(0)exp\left(- \lambda_0 t\right)$$

La limite asymptotique est :

$$N_i(t) \to NP_i^* quandt \to \infty$$

On obtient ainsi une séparation claire. Les prix et les attractivités déterminent où le système va ; les constantes de temps λ_0 et λ déterminent à quelle vitesse il y va.

11. Ce que montre le modèle à M magasins

Le modèle à M magasins montre que le marché peut être pensé comme un réseau d'attracteurs économiques. Chaque magasin est un attracteur qui capte une partie de la population selon son prix, son efficacité marketing, son positionnement et sa relation aux autres magasins. La matrice W introduit une structure relationnelle : tous les magasins ne sont pas concurrents de la même manière.

Cette structure permet de simuler plusieurs scénarios. On peut introduire un nouvel entrant, modifier le prix d'un leader, renforcer l'efficacité marketing d'un acteur, faire varier la porosité du marché, rendre certains magasins proches et d'autres éloignés, ou encore introduire une baisse de demande globale. Dans chaque cas, le modèle distingue les effets sur l'équilibre final et les effets sur le transitoire.

C'est en ce sens que le modèle est utile en physique de la complexité. Il réduit un marché réel très complexe à une chaîne de variables : prix, attractivité, part de marché, population captée, profit et dynamique de convergence. Il ne remplace pas les modèles économiques détaillés, mais il donne une structure pédagogique permettant de comprendre les mécanismes fondamentaux.

12. Positionnement par rapport à la littérature

Le modèle proposé se situe au croisement de plusieurs familles de travaux. Les modèles d'attraction de parts de marché, étudiés notamment par Cooper et Nakanishi, considèrent que les parts de marché sont déterminées par des attractivités relatives. Les modèles logit multinomiaux, issus de la théorie du choix discret, transforment des utilités en probabilités de choix. Les modèles de concurrence en prix sous demande logit étudient les équilibres de Nash lorsque plusieurs firmes choisissent leurs prix. Les modèles de diffusion de Bass décrivent la conquête progressive d'une population par une innovation. Les extensions concurrentielles de Bass et les modèles Lotka-Volterra appliqués aux marchés introduisent la compétition dynamique entre produits, marques ou firmes.

Élément du modèle	Littérature proche	Références utiles
Attractivité X_i	Market-share attraction models ; modèles logit multinomiaux	Cooper & Nakanishi ; McFadden ; Morais et al.
Prix → part de marché → profit	Concurrence en prix sous demande logit	Aksoy-Pierson, Allon & Federgruen
Population neutre N_0	Diffusion d'innovation ; modèle de Bass	Bass ; Rogers
Produits ou marques en compétition	Bass concurrentiel ; diffusion multimarque	Laciana et al. ; Aggrawal et al.
M magasins comme attracteurs	Oligopole, jeux de prix, réseaux d'interaction	Allon et al. ; Besbes et al.
Dynamique des parts de marché	Lotka-Volterra non autonome appliqué au marché	Marasco, Picucci & Romano
Simulation	Système dynamique, simulation multi-agents, scénarios	Laciana et al. ; littérature ABM/retail

13. Bibliographie indicative

Aksoy-Pierson, M., Allon, G., & Federgruen, A. (2013). *Price competition under mixed multinomial logit demand functions*. Management Science, 59(8), 1817-1835.

Bass, F. M. (1969). *A new product growth model for consumer durables*. Management Science, 15(5), 215-227.

Besbes, O., & Saure, D. (2016). *Product Assortment and Price Competition under Multinomial Logit Demand*. Production and Operations Management, 25(1), 114-127.

Cooper, L. G., & Nakanishi, M. (1988). *Market-Share Analysis: Evaluating Competitive Marketing Effectiveness*. Kluwer Academic Publishers.

Galam, S. (2012). *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena*. Springer. Utile pour les analogies avec dynamique d'opinion et attracteurs sociaux.

Laciana, C. E., Rovere, S. L., & Podestá, G. P. (2014). *Diffusion of two brands in competition: Cross-brand effect*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 413, 104-115.

Marasco, A., Picucci, A., & Romano, A. (2016). *Market share dynamics using Lotka-Volterra models*. Technological Forecasting and Social Change, 105, 49-62.

McFadden, D. (1974). *Conditional logit analysis of qualitative choice behavior*. In P. Zarembka (Ed.), *Frontiers in Econometrics*. Academic Press.

Morais, J., Thomas-Agnan, C., & Simioni, M. (2017). *Using compositional and Dirichlet models for market-share regression*. Working paper, Toulouse School of Economics / INRA.

Rogers, E. M. (1962). *Diffusion of Innovations*. Free Press.

Aggrawal, D., et al. (2022). *Modelling product lines diffusion: a framework incorporating competitive brands, multiple products and switching behaviour*. Littérature open-access sur la diffusion concurrentielle.

14. Conclusion générale

La généralisation du modèle de deux magasins à M magasins transforme un duel pédagogique en véritable modèle réduit de marché concurrentiel. Les magasins deviennent des attracteurs, les clients deviennent une population mobile, les prix deviennent des paramètres de contrôle, les parts de marché deviennent des états macroscopiques et les constantes de temps décrivent la porosité du marché.

Le cœur du modèle peut être résumé par la chaîne suivante :

$$p_i \to X_i \to P_i^* \to N_i(t) \to \Pi_i$$

Cette chaîne est simple, mais elle permet de faire dialoguer économie, marketing, théorie des jeux, diffusion d'innovation, modèles logit, Lotka-Volterra et physique de la complexité. Elle fournit une base très efficace pour construire des simulations pédagogiques et pour montrer comment des comportements économiques collectifs peuvent émerger d'interactions concurrentielles locales.