Du modèle économique à la concurrence entre attracteurs

Introduction

Le modèle pédagogique construit à partir de deux magasins concurrents peut sembler, au premier regard, appartenir uniquement à l'économie ou au marketing. Deux acteurs proposent le même produit, fixent chacun un prix, consacrent une partie de ce prix à un effort de communication ou de marketing, puis se partagent une population de clients. Pourtant, la structure mathématique qui apparaît est beaucoup plus générale. Elle ne décrit pas seulement un commerce. Elle décrit une situation où une population se répartit entre plusieurs options concurrentes, chacune possédant une attractivité propre, un avantage relatif, une dynamique de diffusion et une fonction de bénéfice.

C'est pourquoi ce modèle peut être lu comme un modèle réduit de **concurrence entre attracteurs**. Le mot attracteur est ici utilisé dans un sens large : un magasin, une technologie, une opinion, une plateforme numérique, une pratique sociale ou un outil d'entreprise peuvent tous être vus comme des pôles d'attraction capables de capter une fraction d'une population. La question n'est plus seulement : quel magasin vend le plus ? Elle devient : comment une population se répartit-elle entre des attracteurs concurrents, comment cette répartition se forme-t-elle dans le temps, et quel bénéfice chaque attracteur retire-t-il de la population captée ?

Cette manière de raisonner rejoint plusieurs traditions scientifiques. En marketing, elle rappelle les modèles de choix discret et les modèles logit. En diffusion d'innovation, elle renvoie au modèle de Bass et à ses extensions concurrentielles. En écologie mathématique, elle évoque les équations de Lotka-Volterra. En théorie des jeux évolutionnaires, elle se rapproche des dynamiques de réplication où des stratégies gagnent ou perdent de la population selon leur payoff relatif. En psychologie sociale dynamique, elle rejoint l'idée que des opinions, des normes ou des comportements peuvent fonctionner comme des attracteurs sociaux.

L'objectif de ce texte est de reprendre le raisonnement de manière pédagogique, de rappeler les équations du modèle, de montrer comment il se généralise, puis de situer cette généralisation dans la littérature scientifique.

1. Le modèle de départ : deux magasins comme deux attracteurs commerciaux

On considère deux magasins, notés 1 et 2, qui vendent le même produit à une population totale de consommateurs potentiels. Le magasin 1 fixe un prix (p_1), le magasin 2 fixe un prix (p_2). Chaque magasin consacre une fraction de son prix à une efficacité commerciale ou marketing. Cette fraction est notée (_i), avec :

$$0 < \alpha_i < 1.$$

Dans le cas du magasin 1, l'effort marketing unitaire est donc proportionnel à :

$$\alpha_1 p_1.$$

Dans le cas du magasin 2, il est proportionnel à :

$$\alpha_2 p_2.$$

L'idée pédagogique est que le prix joue un rôle ambivalent. D'un côté, un prix plus élevé permet une marge plus forte et peut financer plus d'effort marketing. De l'autre, un prix plus élevé que celui du concurrent diminue l'attractivité relative du magasin. On écrit donc les attractivités :

$$X_1 = A\alpha_1 p_1 + B\left(p_2 - p_1\right),$$

$$X_2 = A\alpha_2 p_2 + B\left(p_1 - p_2\right).$$

Le coefficient (A) mesure l'efficacité du marketing financé par le prix. Le coefficient (B) mesure la sensibilité des consommateurs à l'écart de prix relatif. Si (p_2>p_1), alors le magasin 1 bénéficie d'un avantage relatif de prix, car le concurrent est plus cher. Si (p_1>p_2), c'est l'inverse.

Ces deux quantités (X_1) et (X_2) sont des attractivités. Elles ne sont pas encore des ventes. Elles représentent la capacité relative des deux magasins à capter la population de clients.

2. De l'attractivité aux parts de marché

Une fois les attractivités définies, on suppose que la population se répartit entre les deux magasins selon leurs attractivités relatives. La part d'équilibre du magasin 1 est :

$$P_1^* = \frac{X_1}{X_1 + X_2},$$

et la part d'équilibre du magasin 2 est :

$$P_2^* = \frac{X_2}{X_1 + X_2}.$$

On a naturellement :

$$P_1^* + P_2^* = 1.$$

Si la population totale est (N), alors les populations captées à l'équilibre sont :

$$N_1^* = NP_1^*,$$

$$N_2^* = NP_2^*.$$

Cette écriture est très simple, mais elle contient déjà une idée puissante : les ventes observées ne sont pas seulement une donnée extérieure. Elles résultent d'une compétition d'attractivité. Le prix, le marketing, la concurrence et la sensibilité du marché construisent une répartition de la population.

Dans la littérature marketing, une forme proche mais plus robuste est le modèle logit. On écrit souvent :

$$P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_j e^{V_j}},$$

où (V_i) est l'utilité ou l'attractivité perçue de l'option (i). Cette forme garantit que les probabilités restent positives, même si les utilités sont négatives. Le modèle pédagogique (X_i/(X_1+X_2)) est plus lisible, tandis que le modèle logit est plus stable mathématiquement.

3. Le profit comme fonction objectif

Pour chaque magasin, la marge unitaire nette peut être écrite :

$$m_i = \left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i,$$

où (c_i) représente le coût de revient unitaire. Le terme ((1-_i)p_i) signifie que la fraction (_i p_i) du prix est consommée par l'effort marketing, tandis que le reste contribue à couvrir le coût et à produire la marge.

Si la demande totale est représentée par la population captée, le profit du magasin (i) peut s'écrire :

$$\Pi_i = N_i^* m_i.$$

Pour le magasin 1 :

$$\Pi_1 = NP_1^*[\left(1 - \alpha_1\right)p_1 - c_1).$$

Pour le magasin 2 :

$$\Pi_2 = NP_2^*[\left(1 - \alpha_2\right)p_2 - c_2).$$

Chaque magasin cherche alors à choisir son prix pour maximiser son profit, en tenant compte du prix choisi par l'autre. On obtient un problème de théorie des jeux :

$$p_1^* = arg \max_{p_1} \Pi_1\left(p_1, p_2^*\right),$$

$$p_2^* = arg \max_{p_2} \Pi_2\left(p_1^*, p_2\right).$$

Le couple ((p_1^,*p_2*^)) est un équilibre de Nash si aucun des deux magasins n'a intérêt à modifier seul son prix lorsque le prix de l'autre est fixé.

4. Le transitoire : de la population neutre aux populations captées

L'équilibre précédent décrit une cible. Mais un marché réel ne se réorganise pas instantanément. Il existe un transitoire. Certains consommateurs ne sont pas encore captés, d'autres sont déjà attachés à un magasin, et les basculements se font progressivement.

On introduit donc une population neutre :

$$N_0(t),$$

et deux populations captées :

$$N_1(t), N_2(t).$$

La population totale est :

$$N = N_0(t) + N_1(t) + N_2(t).$$

Les consommateurs neutres sont progressivement captés avec une constante de porosité (_0). Le rééquilibrage entre les deux magasins se fait avec une autre constante (). On écrit :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\lambda_0 N_0,$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_0 P_1^* N_0 + \lambda[P_1^*(N_1 + N_2) - N_1),$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_0 P_2^* N_0 + \lambda[P_2^*(N_1 + N_2) - N_2).$$

La constante de temps associée à la conquête des consommateurs neutres est :

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda_0}.$$

La constante de temps associée au rééquilibrage concurrentiel est :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

On peut résoudre explicitement ce système. La population neutre décroît selon :

$$N_0(t) = N_0(0)e^{-t/\tau_0}.$$

La population déjà captée par le marché est :

$$M(t) = N - N_0(0)e^{-t/\tau_0}.$$

Les deux populations captées évoluent selon :

$$N_1(t) = P_1^* M(t) + [N_1(0) - P_1^* M(0))e^{-t/\tau},$$

$$N_2(t) = P_2^* M(t) + [N_2(0) - P_2^* M(0))e^{-t/\tau}.$$

Ces équations séparent clairement deux phénomènes. Les prix et l'attractivité déterminent la cible (P_i^*). La porosité du marché détermine la vitesse avec laquelle la population s'approche de cette cible. C'est exactement une logique de physique des systèmes dynamiques : un état asymptotique est donné par les paramètres de contrôle, puis un transitoire conduit vers cet état avec des constantes de temps.

5. Généraliser le prix en variable stratégique

Le pas décisif consiste maintenant à ne plus réserver (p_i) au seul prix commercial. On introduit une variable stratégique plus générale :

$$u_i.$$

Cette variable peut être un prix, un coût d'adoption, un effort de communication, un effort de formation, un niveau d'investissement, une intensité de service, une dépense énergétique ou un effort d'adaptation. Le modèle devient :

$$X_1 = \alpha_1 u_1 + B(u_2 - u_1),$$

$$X_2 = \alpha_2 u_2 + B(u_1 - u_2).$$

L'expression (_i u_i) représente l'efficacité propre de la stratégie. Le terme (B(u_j-u_i)) représente l'effet relatif face au concurrent. Si (u_i) est un coût ou un prix, le fait d'avoir un (u_i) plus élevé peut pénaliser l'attractivité. Si (u_i) représente au contraire une qualité ou une performance, il faudra adapter le signe. C'est pourquoi la formule ne doit pas être considérée comme universelle dans sa forme exacte. Ce qui est universalisable, c'est la structure :

$$stratégie \rightarrow attractivité \rightarrow population\ captée \rightarrow bénéfice\ généralisé.$$

6. Généraliser la marge en bénéfice généralisé

Dans le commerce, la fonction de gain unitaire est une marge :

$$m_i = (1 - \alpha_i)p_i - c_i.$$

Dans un système général, cette marge devient une fonction de bénéfice, d'utilité ou de valeur :

$$g_i(u_i).$$

Le bénéfice total généralisé peut alors s'écrire :

$$J_i = N_i^* g_i(u_i) - C_i(u_i),$$

où (N_i^*) est la population captée, (g_i(u_i)) la valeur obtenue par individu capté, et (C_i(u_i)) le coût global de la stratégie.

En dynamique, on peut aussi écrire une fonction objectif actualisée :

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}[N_i(t) g_i(u_i) - C_i(u_i))dt.$$

Cette écriture permet de sortir du seul cadre économique. Dans un marché, (J_i) est un profit. Dans une organisation, c'est un gain de productivité ou de cohérence. Dans une dynamique d'opinion, c'est une influence. Dans une dynamique écologique, c'est une fitness ou une croissance nette de population. Dans un territoire, c'est une valeur d'attractivité sociale, économique ou démographique.

7. Tableau de généralisation du modèle

Le tableau suivant reprend les grands cas où le raisonnement peut être transposé. Il montre comment les notions de prix, marge, profit, attractivité et constante de temps changent de signification selon le domaine.

Tableau 1 - Population, variable stratégique et attractivité

Cas étudié	Population (N)	Variable stratégique (u_i)	Attractivité (X_i)
Deux magasins concurrents	Clients potentiels	Prix de vente (p_i)	Attractivité commerciale : marketing financé par le prix et avantage relatif de prix

Cas étudié	Population (N)	Variable stratégique (u_i)	Attractivité (X_i)
Deux technologies concurrentes	Utilisateurs potentiels	Prix, performance, coût d'adoption ou effort de développement	Attractivité technologique : performance, compatibilité, écosystème, coût
Deux plateformes numériques	Utilisateurs actifs potentiels	Prix d'abonnement, effort d'acquisition, qualité de service	Attractivité de plateforme : prix, ergonomie, catalogue, effet réseau
Deux idées ou opinions concurrentes	Population exposée	Effort de communication, visibilité, intensité de campagne	Attractivité symbolique : crédibilité, émotion, cohérence, exposition
Deux outils dans une entreprise	Salariés ou équipes concernées	Effort de formation, accompagnement, coût de changement	Attractivité organisationnelle : facilité d'usage, soutien managérial, utilité perçue
Deux pratiques sociales	Population pouvant adopter une pratique	Coût d'usage, effort requis, contrainte sociale	Attractivité pratique : simplicité, norme sociale, bénéfice perçu
Deux moyens de transport	Usagers potentiels	Prix, temps de trajet, effort, contrainte	Attractivité modale : coût, rapidité, confort, accessibilité
Deux actifs financiers	Investisseurs ou capitaux disponibles	Rendement promis, risque accepté, frais, liquidité	Attractivité financière : rendement espéré, risque, réputation, liquidité
Deux territoires concurrents	Habitants, entreprises ou touristes	Coût d'installation, fiscalité, prix immobilier, effort d'accueil	Attractivité territoriale : emploi, services, qualité de vie, coût
Deux employeurs concurrents	Candidats potentiels	Salaire, avantages, conditions de travail, effort de recrutement	Attractivité employeur : rémunération, sens, réputation, télétravail, carrière
Deux espèces en compétition	Ressource écologique ou niche disponible	Dépense énergétique, effort reproductif, stratégie d'accès à la ressource	Fitness effective : survie, reproduction, captation de ressource
Deux variants épidémiques	Population susceptible	Transmissibilité, vitesse de propagation, échappement immunitaire	Avantage de propagation : contagiosité relative et durée infectieuse

Tableau 2 - Bénéfice, profit généralisé et constante de temps

Cas étudié	Bénéfice unitaire (g_i(u_i))	Bénéfice total (J_i)	Constante de temps
Deux magasins concurrents	Marge nette : ((1-_i)p_i-c_i)	Profit commercial : (J_i=N_i g_i)	Temps de conversion des clients et de rééquilibrage entre magasins
Deux technologies concurrentes	Valeur par utilisateur ou avantage stratégique	Revenu, domination de standard ou valeur d'écosystème	Temps d'adoption d'une innovation
Deux plateformes numériques	Revenu moyen par utilisateur	Profit plateforme : revenus utilisateurs moins coûts techniques et marketing	Temps de migration des utilisateurs
Deux idées ou opinions concurrentes	Gain d'influence par personne convaincue	Influence nette : population convaincue moins coût de communication	Temps de diffusion ou de conversion d'opinion
Deux outils dans une entreprise	Gain de productivité ou réduction de friction par utilisateur	Gain organisationnel net	Temps d'appropriation et inertie organisationnelle
Deux pratiques sociales	Utilité individuelle ou collective	Bénéfice social ou comportemental	Temps de changement d'habitude

Cas étudié	Bénéfice unitaire (g_i(u_i))	Bénéfice total (J_i)	Constante de temps
Deux moyens de transport	Gain d'usage : temps gagné, confort ou économie	Utilité collective moins coût d'infrastructure	Temps de transition des comportements
Deux actifs financiers	Rendement net ajusté du risque	Gain financier ou encours captés	Temps de réallocation des portefeuilles
Deux territoires concurrents	Valeur créée par habitant, entreprise ou visiteur	Bénéfice territorial moins coût public	Temps de migration ou d'implantation
Deux employeurs concurrents	Valeur productive nette d'un recruté	Gain RH : valeur des talents moins coûts salariaux et de recrutement	Temps de recrutement et de mobilité professionnelle
Deux espèces en compétition	Gain biologique net	Croissance nette de population	Temps écologique de croissance ou de remplacement
Deux variants épidémiques	Gain reproductif épidémique	Expansion du variant : nouveaux cas moins sorties	Temps de diffusion épidémique

Ce tableau montre que le modèle n'est pas une simple analogie verbale. Il fournit une grille structurée. Dans chaque domaine, il faut identifier la population disponible, la variable stratégique, l'attractivité, la population captée, la fonction de bénéfice et la constante de temps de diffusion.

8. Comment la littérature traite cette généralisation

La littérature ne parle pas toujours explicitement de concurrence entre attracteurs. Cette expression est plutôt une synthèse transdisciplinaire. Mais les différents morceaux du raisonnement existent dans plusieurs champs.

En marketing et en économie industrielle, les modèles de choix discret, en particulier le logit multinomial, formalisent le passage d'une utilité ou attractivité à une probabilité de choix. Ils permettent de relier prix, qualité, marque, disponibilité et part de marché. McFadden a donné les fondations économétriques des modèles de choix discret, tandis que la littérature récente sur la concurrence en prix sous demande logit étudie les équilibres de Nash de firmes concurrentes.

En diffusion d'innovation, le modèle de Bass décrit la propagation d'un produit dans une population en combinant influence externe et imitation interne. Les extensions du modèle de Bass introduisent la concurrence entre produits, les effets de réseau, les actions marketing et parfois des formulations stochastiques.

En écologie mathématique, les modèles de Lotka-Volterra décrivent la compétition de populations pour des ressources limitées. Transposés au marché, ils permettent de représenter des produits, technologies ou firmes qui se disputent une population de consommateurs. Plusieurs travaux combinent explicitement Bass et Lotka-Volterra pour modéliser la diffusion concurrentielle de produits.

En théorie des jeux évolutionnaires, les stratégies sont en compétition dans une population. Leur proportion évolue selon leur payoff relatif. La dynamique du réplicateur :

$$x_i^{\cdot} = x_i\left(f_i - f'\right)$$

est particulièrement proche de la généralisation proposée. Ici, (x_i) est la proportion de la population adoptant la stratégie (i), (f_i) est son payoff, et ({f}) est le payoff moyen. Une stratégie dont le payoff est supérieur à la moyenne gagne de la population ; une stratégie moins performante en perd.

En psychologie sociale dynamique, les opinions, identités, normes ou comportements peuvent être vus comme des attracteurs. Les travaux de Vallacher, Nowak et leurs collaborateurs montrent comment des systèmes sociaux peuvent présenter stabilité, transitions, polarisation, basculements ou auto-organisation.

Enfin, en simulation multi-agents, on peut construire des modèles où les individus sont explicitement représentés. Chaque agent possède des préférences, une mémoire, des interactions sociales et une exposition à l'information. Les attracteurs macroscopiques ne sont plus imposés par une équation moyenne ; ils émergent des interactions locales.

9. Le rôle de la physique de la complexité

La physique de la complexité intervient comme langage commun. Elle ne remplace pas l'économie, la sociologie, l'écologie ou le marketing. Elle propose une architecture conceptuelle : populations, flux, attractivités, variables d'ordre, transitoires, constantes de temps, équilibres asymptotiques, bifurcations et basculements.

Dans cette lecture, le modèle des deux magasins devient un exemple simple d'une classe plus vaste de systèmes : les systèmes où une population se répartit entre plusieurs attracteurs concurrents. Les variables (X_i) jouent le rôle de variables d'attractivité. Les parts (P_i) sont les grandeurs macroscopiques émergentes. Les populations (N_i(t)) décrivent le transitoire. Les fonctions (J_i) traduisent le bénéfice généralisé.

On peut résumer la structure par la chaîne suivante :

$$u_i \to X_i \to P_i \to N_i(t) \to J_i.$$

Cette chaîne est le coeur du modèle. Elle explique pourquoi une formule issue d'un problème commercial peut être transposée à des technologies, des idées, des plateformes, des territoires, des organisations ou des systèmes biologiques.

10. Limites et précautions

La généralisation doit toutefois être faite avec prudence. La formule :

$$X_i = \alpha_i u_i + B\left(u_j - u_i\right)$$

n'est pas universelle dans ses signes. Elle fonctionne bien lorsque (u_i) représente une grandeur ambivalente, comme un prix ou un coût : elle apporte un bénéfice interne, mais peut produire un désavantage relatif face au concurrent. Si (u_i) représente directement une qualité ou une performance, le signe du terme relatif doit être modifié.

De plus, la forme linéaire peut produire des attractivités négatives. Dans une version plus robuste, il est préférable d'utiliser une transformation logit :

$$P_i = \frac{e^{X_i}}{\sum_j e^{X_j}}.$$

Enfin, certains systèmes ont de la mémoire. Une réputation, un effet de réseau ou une habitude accumulée peuvent modifier l'attractivité. On peut alors écrire :

$$X_i = \alpha_i u_i + B\left(u_j - u_i\right) + kN_i + rR_i,$$

avec une dynamique de réputation :

$$\frac{dR_i}{dt} = aN_i - \mu R_i.$$

Cette extension fait apparaître des non-linéarités, des seuils, des hystérésis et parfois plusieurs attracteurs possibles. On passe alors d'une simple relaxation vers équilibre à une véritable dynamique complexe.

Conclusion

Le modèle pédagogique de deux magasins concurrents peut être généralisé en un modèle de concurrence entre attracteurs. Le prix devient une variable stratégique plus générale. La marge devient un bénéfice généralisé. La part de marché devient une fraction de population captée. Le profit devient une fonction d'utilité, de valeur, de fitness, d'influence ou de performance selon le domaine.

La littérature traite cette intuition sous plusieurs formes : modèles logit de choix discret, concurrence en prix, diffusion de Bass, modèles Lotka-Volterra, jeux évolutionnaires, dynamique d'opinion, psychologie sociale dynamique et simulation multi-agents. Votre formulation a l'intérêt de les relier dans une chaîne simple :

$$stratégie \rightarrow attractivité \rightarrow population\ captée \rightarrow transitoire \rightarrow bénéfice\ généralisé.$$

C'est précisément ce qui fait de ce modèle un outil pédagogique de physique de la complexité appliquée aux systèmes économiques et sociaux.

Bibliographie indicative

[1] Bass, F. M. (1969). *A New Product Growth Model for Consumer Durables*. Management Science, 15(5), 215-227.

[2] McFadden, D. (1974). *Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior*. In P. Zarembka (ed.), Frontiers in Econometrics. Academic Press.

[3] Luce, R. D. (1959). *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*. Wiley.

[4] Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins.

[5] Volterra, V. (1926). *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*. Nature, 118, 558-560.

[6] Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1998). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press.

[7] Hofbauer, J., & Sigmund, K. (2003). *Evolutionary Game Dynamics*. Bulletin of the American Mathematical Society, 40(4), 479-519.

[8] Rogers, E. M. (1962/2003). *Diffusion of Innovations*. Free Press.

[9] Aksoy-Pierson, M., Allon, G., & Federgruen, A. (2013). *Price Competition Under Mixed Multinomial Logit Demand Functions*. Management Science, 59(8), 1817-1835.

[10] Dalla Valle, L. (2017). *A New Competition Model Combining the Lotka-Volterra Model and the Bass Model*. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences.

[11] Hung, H. C., Wang, C. H., & Wang, S. (2014). *A modified Lotka-Volterra model for competition forecasting*. Technological Forecasting and Social Change.

[12] Vallacher, R. R., & Nowak, A. (eds.) (1994). *Dynamical Systems in Social Psychology*. Academic Press.

[13] Vallacher, R. R., & Nowak, A. (1997). *The Emergence of Dynamical Social Psychology*. Psychological Inquiry, 8(2), 73-99.

[14] Galam, S. (2012). *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena*. Springer.

[15] Galam, S. (2022). *Opinion dynamics and unifying principles*. Entropy / open-access reviews on opinion dynamics.

[16] Lee, H., Kim, S., Kim, J., & Park, Y. (2013). *A simulation-based analysis of diffusion of competing products*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation.