Mod��le p��dagogique de concurrence entre deux magasins

Prix, attractivité, parts de marché et dynamique de convergence

Introduction

On cherche à construire un modèle pédagogique de concurrence entre deux magasins qui vendent le même produit à une même population de consommateurs. L'objectif n'est pas de produire un modèle industriel complet, mais de mettre en évidence les mécanismes essentiels d'un système commercial concurrentiel : le prix, l'investissement marketing, l'attractivité relative, le partage de la demande, le calcul du prix optimal et la dynamique transitoire par laquelle les consommateurs convergent vers une répartition d'équilibre.

Le point de départ est simple. Deux magasins, notés magasin 1 et magasin 2, proposent un produit comparable. Chaque magasin choisit un prix de vente. Ce prix joue un double rôle. D'une part, il détermine la marge unitaire. D'autre part, il permet de financer un effort marketing proportionnel au prix. Mais le prix agit aussi négativement sur l'attractivité relative : si le magasin 1 devient plus cher que le magasin 2, son attractivité diminue relativement à celle de son concurrent.

Le modèle cherche donc à représenter un arbitrage très classique : augmenter le prix permet d'augmenter la marge et de financer plus de marketing, mais cela peut aussi faire perdre des clients au profit du concurrent. Ce compromis ouvre naturellement vers une lecture en théorie des jeux, car chaque magasin choisit son prix en tenant compte du prix de l'autre.

Le modèle comporte ensuite un second niveau. Une fois les prix optimaux déterminés, on obtient des parts de marché d'équilibre. Mais ces parts ne sont pas atteintes immédiatement. Les consommateurs doivent être informés, convaincus, déplacés ou convertis. Il existe donc un transitoire de propagation, analogue à une dynamique simplifiée de type SI, avec une population neutre puis une redistribution entre les deux magasins. Cette dynamique fait apparaître deux constantes de temps : la conquête des consommateurs neutres et la porosité concurrentielle du marché.

1. Hypothèses générales du modèle

On considère une population totale de consommateurs potentiels :

$$N$$

Cette population peut, dans la phase dynamique, être répartie entre trois compartiments :

$$N = N_0(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

où $N_0(t)$ désigne les consommateurs neutres, non encore captés par l'un des deux magasins, $N_1(t)$ désigne les consommateurs captés par le magasin 1, et $N_2(t)$ désigne les consommateurs captés par le magasin 2.

Dans la partie statique du modèle, on suppose que les deux magasins choisissent chacun un prix :

$$p_1 et p_2$$

Chaque magasin consacre une fraction de son prix à une action marketing. Pour le magasin i, cette fraction est notée :

$$\alpha_i$$

avec :

$$0 < \alpha_i < 1$$

L'investissement marketing unitaire du magasin i est donc proportionnel au prix :

$$M_i = \alpha_i p_i$$

On introduit deux coefficients positifs :

$$A > 0 et B > 0$$

Le coefficient A mesure l'efficacité de l'investissement marketing. Le coefficient B mesure la sensibilité concurrentielle à l'écart de prix entre les deux magasins. Plus B est élevé, plus les consommateurs réagissent fortement à la différence de prix entre les deux magasins.

2. Variable d'efficacité commerciale

L'idée centrale consiste à définir, pour chaque magasin, une variable d'efficacité ou d'attractivité commerciale. Cette variable agrège deux effets opposés.

Le premier effet est positif : plus le magasin investit en marketing, plus son attractivité augmente. Puisque l'investissement marketing est proportionnel à $\alpha_i p_i$, la contribution marketing est :

$$A\alpha_i p_i$$

Le second effet est concurrentiel. Si le magasin 1 est plus cher que le magasin 2, il perd en attractivité relative. Il faut donc que l'attractivité du magasin 1 augmente lorsque $p_2 - p_1$

augmente, c'est-à-dire lorsque le magasin 1 devient moins cher relativement au magasin 2. On écrit alors :

$$X_1 = A\alpha_1 p_1 + B\left(p_2 - p_1\right)$$

De manière symétrique, pour le magasin 2 :

$$X_2 = A\alpha_2 p_2 + B\left(p_1 - p_2\right)$$

Ces deux équations constituent le coeur du modèle. Elles disent qu'un magasin gagne en attractivité avec son effort marketing, mais qu'il perd de l'attractivité s'il devient plus cher que son concurrent.

On peut développer les deux expressions :

$$X_1 = \left(A\alpha_1 - B\right)p_1 + Bp_2$$

$$X_2 = Bp_1 + \left(A\alpha_2 - B\right)p_2$$

La somme des attractivités est particulièrement simple, car les termes concurrentiels s'annulent :

$$X_1 + X_2 = A\left(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2\right)$$

On note cette somme :

$$S = X_1 + X_2 = A\left(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2\right)$$

Cette annulation est importante. Elle signifie que le terme concurrentiel B ne crée pas de demande totale supplémentaire. Il redistribue seulement l'attractivité entre les deux magasins.

3. Passage de l'attractivité aux parts de marché

On suppose que la part de demande captée par chaque magasin est proportionnelle à son attractivité relative. On écrit donc :

$$P_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

$$P_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$$

Comme $S = X_1 + X_2$, on peut écrire :

$$P_1 = \frac{X_1}{S}$$

$$P_2 = \frac{X_2}{S}$$

On vérifie immédiatement que :

$$P_1 + P_2 = 1$$

Si la demande totale du marché est notée D, alors les ventes des deux magasins sont :

$$D_1 = DP_1$$

$$D_2 = DP_2$$

Ce modèle repose sur une hypothèse volontairement simple : le client se répartit entre les deux magasins selon une règle de proportionnalité. On pourrait utiliser une fonction plus sophistiquée, par exemple un modèle logit, mais la formulation proportionnelle est plus pédagogique.

4. Fonction de profit

Pour calculer les prix optimaux, il faut définir le profit de chaque magasin. On note c_i le coût unitaire d'achat ou de revient du produit vendu par le magasin i.

Comme une fraction α_i du prix est consacrée au marketing, la marge unitaire nette du magasin i est :

$$m_i = \left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i$$

Le profit du magasin 1 est donc :

$$\Pi_1 = DP_1[\left(1 - \alpha_1\right)p_1 - c_1)$$

ou encore :

$$\Pi_1 = D\frac{X_1}{X_1+X_2}[\left(1 - \alpha_1\right)p_1 - c_1)$$

De même, le profit du magasin 2 est :

$$\Pi_2 = DP_2[\left(1 - \alpha_2\right)p_2 - c_2)$$

ou :

$$\Pi_2 = D\frac{X_2}{X_1+X_2}[\left(1 - \alpha_2\right)p_2 - c_2)$$

Chaque magasin cherche à maximiser son profit par rapport à son propre prix, en prenant comme donné le prix de son concurrent. Le problème est donc un jeu de prix à deux acteurs.

5. Problème d'optimisation et équilibre de Nash

Le magasin 1 résout :

$$\max_{p_1} \ \Pi_1\left(p_1, p_2\right)$$

Le magasin 2 résout :

$$\max_{p_2} \ \Pi_2\left(p_1, p_2\right)$$

L'équilibre de Nash est le couple de prix :

$$\left(p_1^\star, p_2^\star\right)$$

tel que chaque magasin soit au mieux de son intérêt compte tenu du prix choisi par l'autre. Formellement :

$$p_1^\star = arg \ \max_{p_1} \ \Pi_1\left(p_1, p_2^\star\right)$$

$$p_2^\star = arg \ \max_{p_2} \ \Pi_2\left(p_1^\star, p_2\right)$$

Dans une situation régulière, cet équilibre est donné par les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0$$

Ces conditions expriment le fait qu'au voisinage du prix optimal, une petite augmentation ou diminution du prix ne doit plus améliorer le profit du magasin considéré.

6. Calcul de la condition d'optimalité du magasin 1

On rappelle :

$$X_1 = \left(A\alpha_1 - B\right)p_1 + Bp_2$$

$$S = A\left(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2\right)$$

et :

$$P_1 = \frac{X_1}{S}$$

La dérivée de P_1 par rapport à p_1 est :

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = \frac{\left(A\alpha_1 - B\right)S - A\alpha_1 X_1}{S^2}$$

Après simplification, on obtient :

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = -\frac{Ap_2[B\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) - A\alpha_1\alpha_2)}{S^2}$$

On introduit alors le coefficient :

$$H = B\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) - A\alpha_1\alpha_2$$

La dérivée devient :

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = -\frac{Ap_2 H}{S^2}$$

Si $H > 0$, alors une hausse de p_1 réduit la part de marché du magasin 1, ce qui correspond bien à l'intuition économique.

Le profit du magasin 1 est :

$$\Pi_1 = DP_1 m_1$$

avec :

$$m_1 = \left(1 - \alpha_1\right)p_1 - c_1$$

On dérive :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = D[\left(1 - \alpha_1\right)P_1 + m_1\frac{\partial P_1}{\partial p_1})$$

La condition d'optimalité devient donc :

$$\left(1 - \alpha_1\right)P_1 + m_1\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = 0$$

En remplaçant P_1 et sa dérivée, on obtient :

$$\left(1-\alpha_1\right)\frac{X_1}{S}-\left[\left(1-\alpha_1\right)p_1-c_1\right)\frac{Ap_2H}{S^2}=0$$

En multipliant par S^2, on obtient la condition compacte :

$$\left(1-\alpha_1\right)X_1S=\left[\left(1-\alpha_1\right)p_1-c_1\right)Ap_2H$$

7. Condition d'optimalité du magasin 2

Le calcul symétrique donne :

$$\frac{\partial P_2}{\partial p_2}=-\frac{Ap_1H}{S^2}$$

avec :

$$m_2=\left(1-\alpha_2\right)p_2-c_2$$

La condition d'optimalité du magasin 2 est :

$$\left(1-\alpha_2\right)P_2+m_2\frac{\partial P_2}{\partial p_2}=0$$

soit :

$$\left(1-\alpha_2\right)\frac{X_2}{S}-\left[\left(1-\alpha_2\right)p_2-c_2\right)\frac{Ap_1H}{S^2}=0$$

En multipliant par S^2, on obtient :

$$\left(1-\alpha_2\right)X_2S=\left[\left(1-\alpha_2\right)p_2-c_2\right)Ap_1H$$

Le couple de prix optimal est donc solution du système :

$$\left(1-\alpha_1\right)X_1S=\left[\left(1-\alpha_1\right)p_1-c_1\right)Ap_2H$$

$$\left(1-\alpha_2\right)X_2S=\left[\left(1-\alpha_2\right)p_2-c_2\right)Ap_1H$$

avec :

$$X_1=A\alpha_1p_1+B\left(p_2-p_1\right)$$

$$X_2=A\alpha_2p_2+B\left(p_1-p_2\right)$$

$$S=A\left(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2\right)$$

$$H=B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-A\alpha_1\alpha_2$$

8. Cas symétrique : résultat explicite

Pour rendre le modèle plus pédagogique, on peut étudier le cas symétrique. On suppose :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$c_1 = c_2 = c$$

On cherche un équilibre symétrique :

$$p_1^\star = p_2^\star = p^\star$$

Dans ce cas :

$$X_1 = X_2 = A\alpha p^\star$$

et :

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

Le coefficient H devient :

$$H = 2B\alpha - A\alpha^2 = \alpha(2B - A\alpha)$$

Le calcul conduit à :

$$p^\star = \frac{c(2B-A\alpha)}{(1-\alpha)(2B-3A\alpha)}$$

On obtient donc :

$$p_1^\star = p_2^\star = \frac{c(2B-A\alpha)}{(1-\alpha)(2B-3A\alpha)}$$

Pour que ce prix soit positif et fini, il faut notamment :

$$2B - 3A\alpha > 0$$

soit :

$$B > \frac{3}{2}A\alpha$$

Cette condition a un sens économique fort. Pour qu'un optimum apparaisse, la pénalité concurrentielle liée à l'écart de prix doit être suffisamment forte. Si B est trop faible, le prix augmente surtout la marge et le budget marketing, sans perdre assez de clients. Le modèle pousse alors vers des prix trop élevés. Si B est suffisamment élevé, la hausse de prix finit par coûter trop cher en part de marché, ce qui stabilise le prix optimal.

9. Équilibre de parts de marché

Une fois les prix optimaux déterminés, on calcule les attractivités d'équilibre :

$$X_1^\star = A\alpha_1 p_1^\star + B\left(p_2^\star - p_1^\star\right)$$

$$X_2^\star = A\alpha_2 p_2^\star + B\left(p_1^\star - p_2^\star\right)$$

Les parts de marché d'équilibre sont :

$$P_1^\star = \frac{X_1^\star}{X_1^\star + X_2^\star}$$

$$P_2^\star = \frac{X_2^\star}{X_1^\star + X_2^\star}$$

Si toute la population N finit par être captée par l'un des deux magasins, les populations d'équilibre sont :

$$N_1^\star = NP_1^\star$$

$$N_2^\star = NP_2^\star$$

Ces valeurs représentent l'état asymptotique du marché. Mais elles ne disent pas comment le marché y parvient. Pour cela, il faut introduire une dynamique transitoire.

10. Dynamique transitoire avec population neutre

On introduit une population neutre :

$$N_0(t)$$

Cette population représente les consommateurs non encore captés par le produit, non informés, non convaincus ou encore indifférents. Elle est progressivement convertie vers l'un ou l'autre des deux magasins.

On suppose que la population neutre décroît avec un taux λ_0 :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\lambda_0 N_0$$

La constante :

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

est la constante de temps de conquête du marché neutre. Plus λ_0 est élevé, plus l'information circule vite et plus les consommateurs neutres entrent rapidement dans le marché.

Une fois les consommateurs entrés dans le marché, ils se répartissent entre les deux magasins selon les parts d'équilibre $P_1^\star$ et $P_2^\star$. Mais cette répartition n'est pas instantanée. On introduit donc une seconde constante, λ, qui mesure la porosité concurrentielle du marché. Elle représente la facilité avec laquelle les clients changent de magasin, comparent les offres, réagissent aux prix et aux promotions.

La constante de temps associée est :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Le système dynamique est alors :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\lambda_0 N_0$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_0 P_1^\star N_0 + \lambda[P_1^\star(N_1 + N_2) - N_1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_0 P_2^\star N_0 + \lambda[P_2^\star(N_1 + N_2) - N_2)$$

avec :

$$N = N_0(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

11. Résolution du système dynamique

Pour alléger l'écriture, on note désormais :

$$P_1 = P_1^\star et P_2 = P_2^\star$$

avec :

$$P_1 + P_2 = 1$$

La première équation se résout immédiatement :

$$N_0(t) = N_0(0)e^{-\lambda_0 t}$$

On définit ensuite la population déjà captée par le marché :

$$M(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Comme la population totale est conservée, on a :

$$M(t) = N - N_0(t)$$

Donc :

$$M(t) = N - N_0(0)e^{-\lambda_0 t}$$

La cible instantanée du magasin 1, compte tenu de la taille du marché déjà capté, est :

$$P_1 M(t)$$

On définit l'écart du magasin 1 à cette cible :

$$E_1(t) = N_1(t) - P_1 M(t)$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{dE_1}{dt} = -\lambda E_1$$

Donc :

$$E_1(t) = E_1(0)e^{-\lambda t}$$

On obtient alors la solution explicite :

$$N_1(t) = P_1 M(t) + [N_1(0) - P_1 M(0))e^{-\lambda t}$$

En remplaçant $M(t)$:

$$N_1(t) = P_1[N - N_0(0)e^{-\lambda_0 t}) + [N_1(0) - P_1\left(N - N_0(0)\right))e^{-\lambda t}$$

De même :

$$N_2(t) = P_2 M(t) + [N_2(0) - P_2 M(0))e^{-\lambda t}$$

soit :

$$N_2(t) = P_2[N - N_0(0)e^{-\lambda_0 t}) + [N_2(0) - P_2\left(N - N_0(0)\right))e^{-\lambda t}$$

12. Courbes de convergence

Les solutions font apparaître deux exponentielles :

$$e^{-\lambda_0 t}$$

et :

$$e^{-\lambda t}$$

La première exponentielle décrit la disparition progressive de la population neutre. Elle correspond à une diffusion globale de l'information sur le produit ou sur l'existence des offres.

La seconde exponentielle décrit la correction de la répartition concurrentielle entre les deux magasins. Elle correspond à la porosité du marché, c'est-à-dire à la vitesse avec laquelle les consommateurs passent d'un magasin à l'autre lorsque l'équilibre d'attractivité n'est pas encore atteint.

À long terme, on a :

$$N_0(t) = 0$$

$$N_1(t) = NP_1$$

$$N_2(t) = NP_2$$

Les courbes convergent donc vers les populations d'équilibre déterminées par les prix optimaux :

$$N_1^\star = NP_1^\star$$

$$N_2^\star = NP_2^\star$$

13. Cas particulier : lancement à partir d'un marché totalement neutre

Si, au départ, aucun consommateur n'est capté par l'un des deux magasins, on a :

$$N_0(0) = N$$

$$N_1(0) = 0$$

$$N_2(0) = 0$$

Alors :

$$M(0) = 0$$

Les termes de déséquilibre initial disparaissent. Les solutions deviennent :

$$N_1(t) = NP_1\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)$$

$$N_2(t) = NP_2\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)$$

Dans ce cas, les deux magasins montent progressivement vers leur part finale avec la même constante de temps τ_0. La constante τ n'apparaît pas, car il n'y a pas encore de répartition initiale à corriger.

14. Cas avec avance initiale d'un magasin

Si le magasin 1 possède déjà une clientèle plus importante que sa part d'équilibre, on a :

$$N_1(0) > P_1 M(0)$$

Alors :

$$N_1(t) = P_1 M(t) + \left[N_1(0) - P_1 M(0)\right)e^{-\lambda t}$$

Le magasin 1 conserve temporairement son avantage, mais celui-ci décroît avec la constante de temps :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Le magasin 2, symétriquement, rattrape son retard. Ce cas est particulièrement utile pour représenter une situation réelle : un magasin installé dispose d'une clientèle historique, tandis qu'un nouveau concurrent entre sur le marché avec une meilleure attractivité ou un meilleur prix.

15. Lecture des constantes de temps

Le modèle distingue deux inerties.

La première inertie concerne la diffusion globale de l'information sur le produit ou sur le marché. Elle est représentée par :

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

Si τ_0 est faible, les consommateurs neutres sont rapidement informés et captés. Si τ_0 est élevé, la conquête du marché est lente.

La seconde inertie concerne les basculements entre magasins. Elle est représentée par :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Si τ est faible, le marché est très poreux : les clients comparent facilement et changent rapidement de magasin. Si τ est élevé, le marché est peu poreux : les habitudes, la distance, la fidélité ou le manque d'information ralentissent les déplacements de clientèle.

Après un temps égal à une constante de temps, l'écart à l'équilibre est réduit d'environ 63 %. Après trois constantes de temps, il ne reste qu'environ 5 % de l'écart initial. Après cinq constantes de temps, la convergence est pratiquement achevée.

16. Synthèse du modèle complet

Le modèle complet peut être résumé en trois blocs.

Le premier bloc calcule les attractivités à partir des prix :

$$X_1 = A\alpha_1 p_1 + B\left(p_2 - p_1\right)$$

$$X_2 = A\alpha_2 p_2 + B\left(p_1 - p_2\right)$$

Le deuxième bloc calcule les parts de marché :

$$P_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

$$P_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$$

Le troisième bloc calcule les profits :

$$\Pi_1 = DP_1[\left(1 - \alpha_1\right)p_1 - c_1)$$

$$\Pi_2 = DP_2[\left(1 - \alpha_2\right)p_2 - c_2)$$

Les prix optimaux sont obtenus par :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0$$

Puis les parts d'équilibre alimentent la dynamique transitoire :

$$N_0(t) = N_0(0)e^{-t/\tau_0}$$

$$M(t) = N - N_0(0)e^{-t/\tau_0}$$

$$N_1(t) = P_1^{\star} M(t) + [N_1(0) - P_1^{\star} M(0)) e^{-t/\tau}$$

$$N_2(t) = P_2^{\star} M(t) + [N_2(0) - P_2^{\star} M(0)) e^{-t/\tau}$$

17. Interprétation systémique

Ce modèle montre que la concurrence entre deux magasins peut être comprise comme un système dynamique à deux niveaux.

Au premier niveau, les prix définissent un équilibre d'attractivité. Chaque magasin cherche un compromis entre marge, budget marketing et perte potentielle de clients due à un prix relatif trop élevé. Cette partie relève d'un problème de théorie des jeux, car chaque magasin choisit son prix en fonction de celui de son concurrent.

Au second niveau, le marché ne rejoint pas immédiatement cet équilibre. Les consommateurs doivent être informés, convaincus, convertis ou réorientés. Cette partie relève d'une dynamique de propagation, proche d'un modèle SI simplifié. La population neutre diminue progressivement, tandis que les consommateurs déjà captés se redistribuent entre les deux magasins.

Le modèle sépare donc clairement deux questions :

$$O\grave{u}\ va\ le\ syst\grave{e}me\ ?$$

et :

$$\grave{A}\ quelle\ vitesse\ y\ va\ -\ t\ -\ il\ ?$$

Les prix optimaux répondent à la première question. Les constantes de temps τ_0 et τ répondent à la seconde.

Conclusion

Le modèle proposé est volontairement réduit, mais il possède une forte valeur pédagogique. Il relie la gestion commerciale, la théorie des jeux et les dynamiques de propagation.

Il montre d'abord qu'un prix n'est pas seulement un montant de vente. C'est une variable stratégique qui agit à la fois sur la marge, le financement du marketing et l'attractivité relative face au concurrent. Il montre ensuite que les parts de marché peuvent être représentées comme des proportions d'attractivité. Il montre enfin que l'équilibre commercial n'est pas atteint instantanément : il existe un transitoire, gouverné par des constantes de temps qui traduisent la porosité du marché.

Le schéma général est donc :

$$prix \rightarrow attractivité \rightarrow parts\ de\ marché \rightarrow profits \rightarrow prix\ optimaux$$

puis :

$$parts\ d'équilibre \rightarrow propagation \rightarrow populations\ captées \text{ à } long\ terme$$

Cette formulation ouvre vers des extensions naturelles : demande totale dépendant du prix moyen, bruit stochastique, saisonnalité, stock disponible, réputation dynamique, bouche-à-oreille non linéaire, ou encore simulation multi-agents. Mais même sous sa forme réduite, elle permet déjà de comprendre comment un marché concurrentiel peut être décrit comme un système dynamique couplé, avec équilibre, transitoire, stratégie et propagation.