Un modèle d'endommagement par fatigue pour chargements complexes

Du critère de Miner local à une dynamique d'activation dans les systèmes complexes

Introduction

Lorsqu'une structure est soumise à un chargement variable dans le temps, la question de l'endommagement par fatigue se pose d'abord dans des termes classiques. Il s'agit de comprendre comment une succession de sollicitations, parfois faibles, parfois fortes, parfois régulières, parfois irrégulières, finit par dégrader progressivement le matériau jusqu'à provoquer une rupture.

Dans les approches traditionnelles, ce problème est souvent traité par un comptage de cycles, puis par une loi de type Basquin ou Wöhler, enfin par une règle de cumul telle que le critère de Miner. Ce cadre fonctionne bien lorsque le signal de chargement peut être ramené à une succession relativement claire de cycles d'amplitude donnée. Mais dès que le chargement devient complexe, large bande, multi-échelles, intermittent ou turbulent, ce point de vue atteint ses limites. Il devient alors nécessaire d'introduire une description plus proche de la structure réelle du signal.

L'idée centrale du modèle proposé consiste à conserver l'esprit physique de la fatigue classique, tout en le reformulant dans un langage adapté aux signaux complexes. Le point de départ n'est plus seulement la succession globale des cycles, mais la distribution locale en temps et en fréquence de l'énergie du chargement. Autrement dit, au lieu de demander seulement combien de cycles le signal contient dans sa totalité, on cherche à savoir quelles composantes fréquentielles sont présentes à un instant donné, avec quelle amplitude, et quelle pression locale de dommage elles exercent sur le matériau.

Cette reformulation conduit naturellement à utiliser une analyse en ondelettes, puis à construire une forme locale du critère de Miner, qui devient le cœur du modèle.

1. Du chargement au plan temps-fréquence

Soit un chargement noté $x(t)$. Ce chargement peut être stationnaire au sens statistique global, mais présenter localement des variations complexes. Une transformée en ondelettes continue, par exemple avec une ondelette de Morlet, fournit une représentation du signal dans le plan temps-fréquence :

$$W(\omega, t)$$

Le module $|W(\omega, t))$ mesure l'importance locale, autour de l'instant t, de la composante fréquentielle ω. Le scalogramme :

$$|W(\omega, t))^2$$

représente alors une densité locale d'énergie ou de puissance.

Cette représentation est particulièrement utile lorsque le signal contient plusieurs échelles de temps. Elle permet de voir non seulement les fréquences présentes, mais aussi les moments où elles deviennent actives.

2. Rappel du critère classique de Miner

Dans la fatigue classique, on associe à une amplitude de cycle A_i un nombre de cycles à rupture N_i. Une forme simplifiée de loi de Basquin peut s'écrire :

$$N_i = CA_i^{-m}$$

où C est une constante d'échelle et m un exposant de fatigue.

Le critère de Miner additionne ensuite les fractions de dommage produites par les différents niveaux de sollicitation :

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

En remplaçant N_i par son expression, on obtient :

$$D = \frac{1}{C}\sum_i n_i A_i^m$$

Cette formule exprime une idée simple : plus les cycles sont nombreux et plus leur amplitude est élevée, plus le dommage accumulé augmente.

3. Construction d'un Miner local dans le plan temps-fréquence

Dans le modèle proposé, cette logique est transposée localement dans le plan temps-fréquence. À une fréquence ω, le nombre de cycles par unité de temps est proportionnel à ω, tandis que l'amplitude locale associée à cette bande fréquentielle est lue à travers $|W(\omega, t))$.

On introduit alors une grandeur $\Lambda(t)$ destinée à représenter la pression instantanée de dommage :

$$\Lambda(t) = K_M \int \omega |W(\omega, t))^m d\omega$$

Sous forme discrète, cette expression devient :

$$\Lambda(t) = K_M \sum_i \omega_i |W\left(\omega_i, t\right))^m \Delta\omega_i$$

Cette formule signifie qu'à l'instant t, chaque bande fréquentielle agit comme une source locale de cyclage. La fréquence compte le nombre de cycles par unité de temps, tandis que $|W(\omega, t))^m$ mesure la sévérité de ces cycles du point de vue de la fatigue.

Le coefficient K_M règle l'échelle du Miner local. L'exposant m reprend l'idée de la loi de Basquin : il contrôle la sensibilité du dommage à l'amplitude locale du signal.

4. De la pression de dommage au taux d'activation

La pression instantanée de dommage $\Lambda(t)$ ne produit pas nécessairement un dommage significatif dès qu'elle est non nulle. Un matériau peut tolérer une partie des sollicitations sans que les mécanismes de dégradation deviennent réellement actifs.

On introduit donc un seuil d'activation S et un taux d'activation $K(t)$:

$$K(t) = K_0 \langle \Lambda(t) - S \rangle^p$$

Dans cette expression, $\langle x \rangle$ désigne la partie positive de x :

$$\langle x \rangle = max(x, 0)$$

Cette notation signifie que si $\Lambda(t)$ reste inférieure au seuil S, alors l'activation est nulle ou très faible. En revanche, lorsque $\Lambda(t)$ dépasse S, le dommage devient actif et croît selon une loi de puissance contrôlée par l'exposant p.

Les paramètres ont donc une signification claire : K_0 règle l'échelle du taux d'activation, S représente le seuil de tolérance du matériau, et p décrit la brutalité de l'activation lorsque ce seuil est franchi.

5. Dynamique logistique de l'endommagement

La seconde étape consiste à introduire une variable d'endommagement scalaire $D(t)$, comprise entre 0 et 1. Cette variable représente l'état macroscopique de dégradation du matériau.

L'évolution du dommage est décrite par une dynamique logistique :

$$\frac{dD}{dt} = K(t)\left(D + D_0\right)(1 - D)$$

où D_0 est un petit paramètre représentant une sensibilité initiale du matériau ou la présence de micro-hétérogénéités.

Cette équation possède une interprétation simple. Lorsque le dommage est très faible, le terme D_0 évite que le système reste bloqué à zéro. Lorsque le dommage commence à croître, le terme $\left(D + D_0\right)$ traduit une forme d'auto-amplification : des zones déjà fragilisées favorisent l'apparition de nouveaux défauts. Enfin, le terme $(1 - D)$ impose une saturation, puisque le dommage ne peut pas dépasser l'état totalement dégradé.

Cette forme est donc topologiquement adaptée au phénomène : croissance lente au début, accélération lorsque les mécanismes s'enclenchent, puis approche d'un état critique ou saturé.

6. Chaîne complète du modèle

Le modèle complet peut être résumé par la chaîne suivante :

$$x(t) \to W(\omega, t) \to \Lambda(t) \to K(t) \to D(t)$$

avec :

$$\Lambda(t) = K_M \int \omega |W(\omega, t))^m d\omega$$

$$K(t) = K_0 \langle \Lambda(t) - S \rangle^p$$

$$\frac{dD}{dt} = K(t)\left(D + D_0\right)(1 - D)$$

Cette architecture relie trois niveaux : le signal de chargement, la pression locale de dommage et la dynamique globale d'endommagement.

Elle permet de conserver l'intuition de la fatigue classique tout en l'adaptant à des signaux complexes, multi-échelles et intermittents.

7. Interprétation comme modèle de système complexe

Cette architecture possède un sens conceptuel fort, car elle relie plusieurs idées centrales de la théorie des systèmes complexes. La variable $D(t)$ joue le rôle de variable d'ordre décrivant l'état macroscopique d'endommagement du système.

Une analogie instructive peut être faite avec les modèles épidémiques. Dans ces modèles, la fraction d'individus infectés $I(t)$ suit souvent une dynamique de type logistique :

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(1 - I)$$

Cette forme traduit un mécanisme d'auto-amplification limité par la population restante saine. De manière analogue, l'endommagement se propage parce que les zones déjà dégradées facilitent l'apparition de nouveaux défauts, mais cette croissance est limitée par la fraction de matériau encore intacte.

8. Extension spatiale : modèle réaction-diffusion

Si l'on généralise le modèle à l'espace, on obtient une équation réaction-diffusion :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = K(x,t)\left(D + D_0\right)(1 - D) + \kappa\nabla^2 D$$

Le premier terme représente la réaction locale, c'est-à-dire la création de dommage sous l'effet du chargement. Le second terme représente la propagation spatiale du dommage. Le coefficient κ règle la diffusion ou la propagation spatiale des défauts.

Cette extension permet de passer d'un modèle global du dommage à un modèle localisé, dans lequel certaines zones du matériau peuvent devenir critiques avant d'autres.

9. Extension stochastique : équation de Langevin et Fokker-Planck

Si l'on introduit des fluctuations, on peut écrire une équation de Langevin :

$$dD = f(D,t)dt + g(D,t)dW_t$$

avec :

$$f(D,t) = K(t)\left(D + D_0\right)(1 - D)$$

La fonction $g(D,t)$ représente l'intensité des fluctuations. Elle peut traduire l'incertitude sur le matériau, les variations locales de microstructure ou l'imprécision du chargement.

La densité de probabilité $p(D,t)$ satisfait alors l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial D}(f(D,t)p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial D^2}(g^2(D,t)p)$$

Cette reformulation permet d'étudier la distribution statistique des états de dommage et des durées de vie. Elle ne fournit plus seulement une trajectoire moyenne, mais une description probabiliste du risque de rupture.

10. Analogies avec la percolation et le modèle d'Ising

Le modèle peut également être interprété à travers la percolation. Lorsque la fraction de zones endommagées devient suffisante, un réseau connecté de défauts peut apparaître. Cette connectivité critique peut conduire à une rupture macroscopique.

L'analogie avec le modèle d'Ising apparaît lorsque l'on considère que chaque élément du matériau peut être dans un état local sain ou endommagé. Les interactions entre éléments produisent alors un comportement collectif macroscopique. Dans cette lecture, la rupture n'est plus seulement une somme de dommages indépendants ; elle devient une transition collective.

Ces analogies montrent que l'endommagement par fatigue peut être pensé comme un phénomène de système complexe : accumulation locale, propagation, seuil, auto-amplification et transition critique.

11. Un modèle générique et topologiquement correct

On n'obtient pas d'abord un modèle microscopique exhaustif de la métallurgie intime du matériau. On obtient plutôt un modèle générique d'endommagement, c'est-à-dire une architecture de dynamique qui respecte les grandes propriétés qualitatives attendues physiquement.

L'expression « topologiquement correct » signifie que le modèle possède la bonne forme globale de comportement. Il part d'un état faiblement endommagé, introduit un seuil ou une zone d'activation, permet une croissance accélérée lorsque les mécanismes de dégradation se renforcent mutuellement, et conduit finalement vers un état critique ou saturé.

Cette démarche est fréquente dans la physique des systèmes complexes. On ne commence pas par tout décrire dans le détail microscopique. On cherche d'abord le bon squelette dynamique. Ensuite, on identifie les paramètres, les fonctions de transfert et les seuils à partir de l'observation.

Dans ce modèle, ce squelette dynamique est formé de trois briques :

1. la transformation du signal de chargement en une pression instantanée de dommage $\Lambda(t)$;
2. la conversion de cette pression en taux d'activation $K(t)$;
3. la dynamique non linéaire de l'endommagement $D(t)$.

12. Calibration par les données

Dire que le modèle est générique signifie qu'il peut s'appliquer à plusieurs familles de chargements et à plusieurs classes de matériaux, à condition de recalibrer ses paramètres. Ce n'est donc pas un modèle universel au sens où les paramètres seraient identiques

partout. C'est un modèle universel au sens où la forme des mécanismes reste la même, alors que les constantes changent.

La calibration par les données devient alors une étape scientifique essentielle. Elle doit porter sur plusieurs niveaux.

Il faut d'abord calibrer la partie qui transforme le signal en $\Lambda(t)$, c'est-à-dire vérifier que la pondération spectrale choisie reflète correctement l'agressivité réelle du chargement.

Il faut ensuite calibrer la loi $K(t)$, donc le seuil S, l'exposant p et les constantes d'échelle.

Enfin, il faut calibrer la dynamique de $D(t)$, notamment le germe initial D_0 et la manière dont on définit expérimentalement le niveau critique correspondant à la rupture.

Le modèle n'est donc pas seulement un outil de prédiction. C'est aussi un modèle d'organisation des observables. Il indique quelles grandeurs observer dans les données : structure temps-fréquence locale, intermittence, épisodes agressifs, seuils d'activation et dynamique cumulative.

13. Topologie et métrique

Il existe une distinction fondamentale entre deux niveaux.

Le premier niveau est celui de la justesse topologique. Le modèle doit posséder la bonne forme qualitative : seuil, activation, auto-amplification, saturation et éventuellement fluctuations.

Le second niveau est celui de la justesse métrique. À ce niveau, les données sont indispensables pour déterminer les bonnes échelles, les bons exposants et les fonctions effectives.

Sans calibration, le modèle reste un schéma physiquement suggestif. Avec calibration, il peut devenir un outil prédictif ou comparatif.

La formulation synthétique est la suivante :

> Le modèle proposé ne prétend pas reproduire directement toute la microphysique du matériau ; il constitue plutôt une loi d'évolution générique, topologiquement correcte, qui capture la structure qualitative de l'endommagement sous chargement complexe et dont les paramètres effectifs doivent ensuite être calibrés sur les données.

14. Valeur pédagogique du modèle

Au-delà de son intérêt scientifique, ce modèle possède une qualité pédagogique importante : il permet d'expliquer un phénomène complexe avec peu de paramètres, chacun ayant un sens physique clair, et avec une structure logique facile à suivre.

Dans beaucoup de domaines techniques, les modèles deviennent rapidement difficiles à enseigner parce qu'ils accumulent des corrections empiriques et des paramètres sans interprétation claire. L'approche proposée suit au contraire une progression naturelle, presque narrative, qui relie directement l'observation du signal au mécanisme d'endommagement.

La première idée est que le matériau ne subit pas seulement une amplitude instantanée de contrainte ou de déformation ; il subit un signal dynamique $x(t)$ qui contient des cycles de différentes échelles.

La deuxième idée consiste à transformer cette structure spectrale en une pression instantanée de dommage $\Lambda(t)$.

La troisième idée est que cette pression n'agit vraiment qu'au-delà d'un seuil d'activation.

La quatrième idée est que l'endommagement possède une dynamique collective, lente au début, accélérée ensuite, puis saturée ou critique.

15. Sens des paramètres

Chaque paramètre possède une interprétation simple :

Paramètre	Interprétation
K_M	Échelle de la contribution spectrale dans le calcul de $\Lambda(t)$
m	Exposant de fatigue de type Basquin
S	Niveau minimal d'agression à partir duquel le dommage devient actif
p	Rapidité ou brutalité de l'activation
D_0	Présence initiale de micro-hétérogénéités dans le matériau
κ	Coefficient de propagation spatiale du dommage
$g(D,t)$	Intensité des fluctuations dans la version stochastique

Cette interprétation claire transforme le modèle en un outil pédagogique structurant. Les apprenants peuvent explorer l'effet des paramètres et observer comment la dynamique change lorsque ces paramètres varient.

16. Intérêt pour la data science

Les modèles comme celui-ci, avec peu de paramètres et une structure physique claire, sont particulièrement utiles en data science. Ils relèvent de ce que l'on appelle la modélisation structurée ou le modèle inductif guidé par la physique.

Le premier intérêt est la réduction de la complexité du problème. Un signal $x(t)$ complexe est transformé en grandeurs synthétiques :

$$\Lambda(t), K(t), D(t)$$

Ces grandeurs concentrent l'information pertinente pour le phénomène étudié. En data science, cette étape correspond à la construction de variables explicatives, ou feature engineering.

Le deuxième intérêt est l'interprétabilité. Les paramètres comme m, S ou K_M possèdent un sens physique clair. Lorsque ces paramètres sont ajustés sur les données, l'utilisateur ne se contente pas d'obtenir une prédiction ; il comprend aussi comment le système réagit aux sollicitations.

Le troisième intérêt est la capacité d'apprentissage avec peu de données. Le modèle introduit déjà une structure correcte du phénomène. L'algorithme d'apprentissage n'a donc pas besoin de découvrir toute la structure à partir de zéro.

17. Modélisation guidée par la physique

Cette approche s'inscrit dans la data science guidée par la physique. Dans ce cadre, les données et les lois physiques ne sont pas opposées ; elles se complètent.

Les équations fournissent la structure qualitative correcte, tandis que les données servent à ajuster les paramètres et éventuellement à corriger certaines approximations. Cette logique est proche des méthodes modernes comme les Physics-Informed Neural Networks, dans lesquelles les réseaux neuronaux apprennent une fonction tout en respectant des contraintes physiques.

Un modèle physique simple peut aussi servir de base à un modèle hybride. Par exemple, on peut écrire :

$$D_{pred}(t) = D_{modele}(t) + \Delta_{ML}(t)$$

où $\Delta_{ML}(t)$ est une correction apprise à partir des données.

Cette stratégie est souvent plus efficace que d'entraîner un modèle entièrement statistique à partir de zéro. Le modèle physique fournit une approximation initiale raisonnable, et l'apprentissage affine ensuite cette approximation.

18. Robustesse et contraintes physiques

Un autre intérêt important est la robustesse. Les modèles purement statistiques peuvent être sensibles au bruit, aux changements de distribution ou aux situations non observées pendant l'apprentissage. Les modèles structurés par la physique sont souvent plus robustes, parce qu'ils respectent des contraintes fondamentales.

Dans le modèle d'endommagement, la dynamique impose naturellement :

$$0 \leq D(t) \leq 1$$

Cette contrainte empêche l'apparition de résultats physiquement impossibles. En data science, ce type de contrainte agit comme une régularisation naturelle qui stabilise l'apprentissage.

Conclusion générale

Le modèle proposé constitue un pont entre la mécanique classique de la fatigue et la physique des systèmes complexes. Il conserve l'intuition des approches traditionnelles tout en intégrant la structure multi-échelles des signaux modernes et la dynamique collective de la dégradation.

Sa force tient à sa simplicité structurée. Il repose sur trois briques principales : une lecture temps-fréquence du chargement, un Miner local dans le plan temps-fréquence et une dynamique logistique d'endommagement.

Il permet de comparer différents chargements complexes via la pression instantanée de dommage $\Lambda(t)$, d'identifier les épisodes localement agressifs et d'estimer non seulement l'endommagement moyen, mais aussi la distribution des durées de vie lorsque l'on adopte une description probabiliste.

En résumé, ce modèle ne prétend pas tout décrire au niveau microscopique. Il propose une loi d'évolution générique, interprétable, calibrable et pédagogiquement claire. C'est précisément ce type de modèle, simple dans sa structure mais riche dans ses interprétations, qui peut servir de pont entre la modélisation physique, l'analyse des signaux complexes et la data science moderne.