Modèle généralisé de concurrence entre attracteurs

Introduction

Le modèle construit à partir de deux magasins concurrents peut être lu comme un modèle réduit de physique de la complexité. Son intérêt ne tient pas seulement au commerce. Il tient au fait qu'il décrit une situation beaucoup plus générale : une population se répartit entre deux attracteurs concurrents, chacun cherchant à capter une part de cette population à partir d'une stratégie propre.

Dans le cas commercial, les deux attracteurs sont deux magasins qui vendent le même produit. Dans d'autres cas, ils peuvent être deux technologies, deux plateformes numériques, deux idées, deux pratiques sociales, deux territoires, deux employeurs, deux actifs financiers ou même deux espèces en compétition. Dans tous ces cas, le problème comporte les mêmes briques : une population disponible, deux options concurrentes, une variable stratégique, une attractivité relative, une population captée, un bénéfice généralisé et un temps de convergence.

L'objectif de ce texte est de présenter ce raisonnement de manière pédagogique, en montrant comment le modèle initial peut être généralisé. Les mots « prix », « marge » et « profit » seront donc progressivement remplacés par des notions plus larges : variable stratégique, bénéfice unitaire et fonction d'utilité.

1. Le modèle commercial de départ

On part de deux magasins, notés 1 et 2, qui vendent le même produit à une population totale de consommateurs potentiels. Les deux magasins choisissent respectivement un prix de vente :

$$p_1 et p_2$$

Le prix joue ici un double rôle. D'un côté, un prix plus élevé augmente la marge unitaire et permet de financer une action marketing proportionnelle au prix. D'un autre côté, un prix plus élevé rend le magasin moins compétitif par rapport à l'autre magasin.

On suppose que le magasin i investit une fraction positive α_i de son prix dans l'efficacité commerciale ou marketing :

$$0 < \alpha_i < 1$$

L'efficacité commerciale du magasin 1 peut alors être écrite :

$$X_1 = A\alpha_1 p_1 + B\left(p_2 - p_1\right)$$

et celle du magasin 2 :

$$X_2 = A\alpha_2 p_2 + B\left(p_1 - p_2\right)$$

Le premier terme, $A\alpha_i p_i$, représente l'effet propre du prix quand il finance l'effort marketing. Le second terme représente l'effet concurrentiel. Si le magasin 1 devient plus cher que le magasin 2, alors $p_2 - p_1$ devient négatif et l'attractivité relative du magasin 1 diminue. Le coefficient B mesure donc la sensibilité concurrentielle au différentiel de prix.

Les parts de marché d'équilibre sont calculées par normalisation des attractivités :

$$P_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

$$P_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$$

avec :

$$P_1 + P_2 = 1$$

Si la population totale est N, les populations captées à l'équilibre sont :

$$N_1^* = NP_1$$

$$N_2^* = NP_2$$

Ce premier niveau décrit l'état asymptotique : il dit vers quelle répartition tend le marché lorsque les prix et les attractivités sont fixés.

2. La marge et la fonction de profit dans le cas des magasins

Dans le cas commercial, la marge unitaire nette du magasin i peut s'écrire :

$$m_i = \left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i$$

où c_i représente le coût d'achat ou le coût de revient unitaire. Le terme $\left(1 - \alpha_i\right)p_i$ rappelle qu'une fraction du prix est consommée par l'investissement marketing. Ce qui reste contribue à la marge, après déduction du coût de revient.

Le profit du magasin i est alors :

$$\Pi_i = N_i^* m_i$$

ou, plus explicitement :

$$\Pi_i = NP_i[\left(1 - \alpha_i\right)p_i - c_i)$$

Le problème de prix optimal consiste donc à chercher les prix p_1 et p_2 qui maximisent les profits respectifs des deux magasins. On obtient un jeu de prix :

$$p_1^* = arg \max_{p_1} \Pi_1\left(p_1, p_2^*\right)$$

$$p_2^* = arg \max_{p_2} \Pi_2\left(p_1^*, p_2\right)$$

L'équilibre recherché est un équilibre de Nash : aucun magasin n'a intérêt à modifier seul son prix si l'autre conserve le sien.

Ce modèle est volontairement simple. Il montre cependant déjà une structure très générale : une stratégie modifie une attractivité, l'attractivité modifie une population captée, et la population captée produit un bénéfice.

3. Le transitoire : de l'équilibre théorique à la dynamique réelle

L'état donné par P_1 et P_2 est un état asymptotique. Dans la réalité, le marché n'y arrive pas instantanément. Les consommateurs doivent être informés, convaincus, puis éventuellement transférés d'un magasin vers l'autre. Il existe donc une dynamique transitoire.

On introduit une population neutre :

$$N_0(t)$$

Elle représente les consommateurs non encore captés, indifférents ou non informés. La population totale s'écrit :

$$N = N_0(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

On introduit ensuite deux constantes de temps. La première est associée à la conquête des consommateurs neutres :

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

La seconde est associée au rééquilibrage entre les deux magasins :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Le système dynamique s'écrit :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\lambda_0 N_0$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_0 P_1 N_0 + \lambda[P_1(N_1 + N_2) - N_1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_0 P_2 N_0 + \lambda[P_2(N_1 + N_2) - N_2)$$

Le premier terme de dN_1/dt décrit la captation des consommateurs neutres par le magasin 1. Le second terme décrit le rééquilibrage concurrentiel : si le magasin 1 a moins de clients que sa part naturelle d'équilibre, il en gagne ; s'il en a trop, il en perd progressivement.

La solution explicite est :

$$N_0(t) = N_0(0)e^{-t/\tau_0}$$

On pose :

$$M(t) = N - N_0(0)e^{-t/\tau_0}$$

où $M(t)$ est la population déjà captée par l'un ou l'autre magasin. Alors :

$$N_1(t) = P_1 M(t) + [N_1(0) - P_1 M(0))e^{-t/\tau}$$

$$N_2(t) = P_2 M(t) + [N_2(0) - P_2 M(0))e^{-t/\tau}$$

Ces formules sont pédagogiquement importantes. Elles montrent que les prix et les attractivités déterminent la cible finale, tandis que la porosité du marché détermine la vitesse de convergence. Si le marché est très fluide, τ est petit. Si les habitudes sont fortes, τ est grand.

4. Généralisation : remplacer le prix par une variable stratégique

La question essentielle est de savoir si la formule peut être généralisée à d'autres cas. La réponse est oui, à condition de remplacer le prix p_i par une variable stratégique plus générale, notée u_i.

On écrit alors :

$$X_1 = \alpha_1 u_1 + B(u_2 - u_1)$$

$$X_2 = \alpha_2 u_2 + B(u_1 - u_2)$$

Dans cette formulation, u_i peut désigner un prix, un effort de communication, un investissement de qualité, un effort de formation, un niveau de service, un coût d'adoption, une dépense énergétique, un rendement promis ou une contrainte supportée.

La formule n'est pas universelle au sens où elle serait valable sans adaptation. Elle est plutôt une fermeture linéaire pédagogique. Elle suppose que la variable u_i possède deux effets opposés. Elle produit un effet propre positif, mesuré par $\alpha_i u_i$, mais elle peut aussi produire un handicap relatif si elle est plus élevée que celle du concurrent.

Dans le commerce, c'est naturel : augmenter le prix peut financer le marketing et augmenter la marge, mais cela rend aussi le magasin moins compétitif. Dans d'autres domaines, il faut donc vérifier le sens de u_i. Si u_i représente une qualité ou une performance, le signe du terme relatif peut devoir être inversé.

5. Généralisation de la marge

Dans le modèle commercial, la marge est :

$$m_i = (1 - \alpha_i)p_i - c_i$$

Mais dans un modèle général, on remplace cette marge par un bénéfice unitaire généralisé :

$$g_i(u_i)$$

Cette fonction représente ce que l'acteur obtient par individu capté, utilisateur acquis, client convaincu, salarié converti, habitant attiré, investisseur gagné ou ressource mobilisée.

Le bénéfice total devient alors :

$$J_i = N_i^* g_i(u_i) - C_i(u_i)$$

où $C_i(u_i)$ représente le coût de la stratégie. Dans certains cas, g_i est une marge financière. Dans d'autres cas, c'est une utilité sociale, un gain d'influence, une valeur stratégique, une réduction de risque ou un gain organisationnel.

En dynamique, on peut écrire :

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}[N_i(t) g_i(u_i) - C_i(u_i))dt$$

Cette formulation élargit le modèle : on ne cherche plus seulement à maximiser un profit commercial, mais une fonction d'utilité adaptée au système étudié.

6. Tableau de généralisation du modèle

Le tableau suivant reprend les grands cas de généralisation. Il montre comment les éléments du modèle commercial — prix, marge, profit, clients, temps de conversion — peuvent être traduits dans d'autres systèmes.

Tableau 1 — Commerce, technologies, plateformes et organisation

Cas étudié	Population N	Équivalent du prix u_i	Attractivité X_i	Équivalent de la marge $g_i(u_i)$	Bénéfice ou profit J_i	Constante de temps
Deux magasins concurrents	Clients potentiels	Prix de vente p_i	Attractivité commerciale : marketing financé par le prix et avantage de prix relatif	Marge unitaire nette : $(1 - \alpha_i)p_i - c_i$	Profit commercial : $J_i = N_i[(1 - \alpha_i)p_i -$	Temps de conversion des clients et de rééquilibrage entre magasins
Deux technologies concurrentes	Utilisateurs potentiels	Prix, effort de développement, performance ou coût d'adoption	Attractivité technologique : performance, coût, compatibilité, écosystème	Valeur par utilisateur : abonnement, licence, avantage stratégique	Revenu ou domination technologique : $J_i = N_i g_i(u_i) - C_i(u_i)$	Temps d'adoption d'une innovation

Cas étudié	Population N	Équivalent du prix u_i	Attractivité X_i	Équivalent de la marge $g_i(u_i)$	Bénéfice ou profit J_i	Constante de temps
Deux plateformes numériques	Utilisateurs actifs potentiels	Prix d'abonnement, effort d'acquisition, qualité de service	Attractivité de plateforme : prix, ergonomie, catalogue, effet réseau	Revenu moyen par utilisateur	Profit plateforme : utilisateurs multipliés par revenu moyen, moins coûts techniques et marketing	Temps de migration des utilisateurs
Deux outils dans une entreprise	Salariés ou équipes concernées	Effort de formation, accompagnement, coût de changement	Attractivité organisationnelle : facilité d'usage, soutien managérial, utilité perçue	Gain de productivité ou réduction de friction par utilisateur	Gain organisationnel net : productivité gagnée moins coût de transformation	Temps d'appropriation ou inertie organisationnelle

Tableau 2 — Idées, pratiques sociales, finance, territoires et vivant

Cas étudié	Population N	Équivalent du prix u_i	Attractivité X_i	Équivalent de la marge $g_i(u_i)$	Bénéfice ou profit J_i	Constante de temps
Deux idées ou opinions concurrentes	Population exposée au débat	Effort de communication, visibilité médiatique, intensité de campagne	Attractivité symbolique : crédibilité, émotion, cohérence, exposition	Gain d'influence par personne convaincue	Influence nette : $J_i = N_i g_i - C_i$	Temps de diffusion ou de conversion d'opinion
Deux pratiques sociales	Population pouvant adopter une pratique	Coût d'usage, effort requis, contrainte sociale	Attractivité pratique : coût, simplicité, norme sociale, bénéfice perçu	Utilité individuelle ou collective par pratiquant	Bénéfice social ou comportemental : adoption multipliée par utilité, moins coût	Temps de changement d'habitude
Deux moyens de transport	Usagers potentiels	Prix, temps de trajet, effort, contrainte	Attractivité modale : coût, rapidité, confort, accessibilité	Gain d'usage : temps gagné, confort, économie	Utilité collective ou économique : usagers multipliés par gain, moins coût d'infrastructure	Temps de transition des comportements
Deux actifs financiers	Investisseurs ou capitaux disponibles	Rendement promis, risque accepté, frais, liquidité	Attractivité financière : rendement espéré, risque, réputation, liquidité	Rendement net ajusté du risque	Gain financier : capitaux captés multipliés par rendement net, moins risque et coûts	Temps de réallocation des portefeuilles
Deux territoires concurrents	Habitants, entreprises ou touristes	Coût d'installation, fiscalité, prix immobilier, effort d'accueil	Attractivité territoriale : emploi, qualité de vie, services, coût	Valeur par habitant, entreprise ou visiteur	Bénéfice territorial : population attirée multipliée par valeur créée, moins coût public	Temps de migration ou d'implantation
Deux employeurs concurrents	Candidats potentiels	Salaire, avantages, effort de recrutement, conditions de travail	Attractivité employeur : rémunération, sens, réputation, télétravail, carrière	Valeur productive nette d'un recruté	Gain RH : talents captés multipliés par valeur, moins coût salarial et recrutement	Temps de recrutement et de mobilité professionnelle
Deux espèces en compétition	Ressource écologique ou niche disponible	Dépense énergétique, effort reproductif, stratégie d'accès à la ressource	Fitness effective : capacité à survivre, se reproduire, capter la ressource	Gain biologique net : reproduction moins dépense énergétique	Croissance nette de population	Temps écologique de croissance ou de remplacement
Deux variants épidémiques	Population susceptible	Transmissibilité, vitesse de propagation, échappement immunitaire	Avantage de propagation : contagiosité relative, durée infectieuse	Gain de reproduction épidémique : $R_t - 1$	Expansion du variant : nouveaux cas moins guérisons ou extinctions	Temps de diffusion épidémique

Ce tableau doit être lu comme une carte de correspondances, et non comme une table de substitution mécanique. Dans chaque domaine, il faut recalibrer les variables et vérifier les signes. Le prix d'un magasin n'a pas le même sens que l'effort de formation dans une entreprise ou que la transmissibilité d'un variant. Pourtant, dans tous les cas, on retrouve une même architecture : une variable stratégique modifie une attractivité, qui modifie une population captée, qui modifie un bénéfice.

7. Commentaire du tableau

La première colonne montre que le modèle n'est pas limité au commerce. Il s'applique chaque fois que deux options concurrentes cherchent à capter une même population. La population peut être constituée de clients, d'utilisateurs, d'électeurs, de salariés, d'investisseurs, d'habitants, de candidats ou même d'individus biologiques.

La deuxième colonne identifie le réservoir commun. C'est une idée essentielle de la physique de la complexité : les acteurs ne sont pas isolés, ils se disputent une ressource ou une population limitée. La compétition vient précisément du fait que cette population ne peut pas être totalement captée par tous les acteurs à la fois.

La troisième colonne généralise le prix. Dans le commerce, le prix est évident. Mais dans les autres systèmes, le prix devient une variable de stratégie. Il peut s'agir d'un effort, d'un coût, d'une contrainte, d'un investissement, d'un niveau de service ou d'un rendement promis. Le modèle suppose que cette variable est pilotable par l'acteur.

La quatrième colonne correspond à l'attractivité. C'est le coeur du modèle. Chaque acteur possède une capacité à attirer une fraction de la population. Cette attractivité peut dépendre du prix, de la qualité, du service, de la réputation, du réseau, de la communication ou de la performance. Dans une approche plus avancée, on pourrait écrire :

$$X_i = effet\ propre + effet\ relatif + mémoire + effet\ réseau$$

La cinquième colonne généralise la marge. Ce point est fondamental. La marge n'est pas toujours monétaire. Elle peut être une valeur stratégique, une utilité sociale, un gain de productivité, un avantage de réputation, un rendement ajusté du risque ou une fitness biologique.

La sixième colonne généralise le profit. Dans un magasin, le profit est financier. Dans une entreprise, le bénéfice peut être une productivité accrue. Dans une opinion, il peut être une influence gagnée. Dans un territoire, il peut être une valeur économique ou sociale créée. Dans une espèce, il peut être une croissance de population.

La dernière colonne rappelle que tout système réel possède un transitoire. Il ne suffit pas de connaître l'équilibre final. Il faut savoir à quelle vitesse la population migre, adopte, change, se convertit ou se réorganise. Cette vitesse est représentée par les constantes de temps τ_0 et τ.

8. Le véritable invariant du modèle

La formule précise peut changer d'un domaine à l'autre, mais la chaîne logique reste stable :

$$u_i \to X_i \to P_i \to N_i \to J_i$$

Cela signifie :

- la stratégie u_i produit une attractivité X_i ;
- l'attractivité produit une part d'équilibre P_i ;
- la part d'équilibre produit une population captée N_i ;
- la population captée produit un bénéfice généralisé J_i.

Cette chaîne est l'invariant du raisonnement. Elle permet de passer d'un cas particulier à une famille de systèmes comparables.

9. Lien avec la physique de la complexité

Ce modèle appartient à la physique de la complexité parce qu'il met en relation des éléments typiques des systèmes complexes : population, flux, attractivité, compétition, rétroaction, transitoire et équilibre.

La variable X_i joue le rôle d'une variable réduite d'attractivité. Elle condense plusieurs facteurs microscopiques dans une grandeur macroscopique utile. Les parts P_i décrivent la répartition émergente de la population. Les constantes

de temps décrivent la dynamique d'adaptation. Enfin, la fonction J_i permet d'introduire une stratégie et une optimisation.

Le modèle de deux magasins devient donc un prototype de compétition entre attracteurs. Un magasin, une technologie, une plateforme, une idée ou un territoire peut être vu comme un attracteur qui cherche à capter une fraction d'une population disponible.

Dans une version plus avancée, l'attractivité pourrait dépendre de la population déjà captée :

$$X_i = X_i^0 + kN_i$$

On introduirait alors des effets de réputation, de réseau ou de mimétisme. La dynamique pourrait devenir non linéaire, avec des seuils, des basculements, des dominations irréversibles ou des effets d'hystérésis.

Conclusion

Le modèle issu de la concurrence entre deux magasins peut être généralisé à de nombreux systèmes, à condition de ne pas rigidifier les mots « prix », « marge » et « profit ». Le prix devient une variable stratégique, la marge devient un bénéfice unitaire généralisé, et le profit devient une fonction d'utilité adaptée au domaine.

La structure générale est :

$$X_i = \alpha_i u_i + B\left(u_j - u_i\right)$$

$$P_i = \frac{X_i}{\sum_j X_j}$$

$$N_i^* = NP_i$$

$$J_i = N_i^* g_i\left(u_i\right) - C_i\left(u_i\right)$$

Le transitoire est donné par :

$$N_i(t) = P_i M(t) + \left[N_i(0) - P_i M(0)\right)e^{-t/\tau}$$

avec :

$$M(t) = N - N_0(0)e^{-t/\tau_0}$$

Ce schéma propose une lecture simple mais puissante : les systèmes sociaux, économiques, organisationnels ou biologiques peuvent être compris comme des dynamiques de population entre attracteurs concurrents. C'est précisément en cela que ce raisonnement relève de la physique de la complexité.