Unification de trois modèles de compétition par leurs attracteurs

Magasins concurrents, Lotka-Volterra et théorie des jeux évolutionnaires

Introduction

L'objectif de ce texte est de mettre en évidence une unification possible entre trois familles de modèles de compétition : un modèle pédagogique de magasins concurrents, un modèle de Lotka-Volterra compétitif, et une dynamique issue de la théorie des jeux évolutionnaires, en particulier la dynamique du réplicateur.

Ces trois modèles ne décrivent pas exactement le même niveau de réalité. Le modèle des magasins est volontairement construit comme un modèle réduit : on calcule d'abord un attracteur à partir des données du problème, puis on décrit un transitoire linéaire vers cet attracteur. Le modèle de Lotka-Volterra part au contraire d'équations différentielles non linéaires ; l'attracteur n'est pas donné au départ, il doit être trouvé en résolvant les équations d'équilibre. La théorie des jeux évolutionnaires, quant à elle, décrit la compétition entre stratégies par des payoffs relatifs : l'attracteur est alors une distribution de stratégies dans laquelle les stratégies présentes ont des gains compatibles ou égaux.

L'unification ne doit donc pas être cherchée dans l'identité des équations. Elle doit être cherchée dans leur comportement asymptotique. La bonne question devient : peut-on faire correspondre l'attracteur explicite du modèle de magasins avec l'équilibre stable d'un système de Lotka-Volterra et avec un équilibre stable d'une dynamique de jeu évolutionnaire ?

Autrement dit, on cherche une identification du type :

$$attracteur\ magasins\ =\ attracteur\ Lotka\ -\ Volterra\ =\ attracteur\ réplicateur.$$

Cette idée permet de construire une lecture transversale des modèles de compétition. Les magasins deviennent des attracteurs économiques, les espèces de Lotka-Volterra deviennent des populations concurrentes, et les stratégies de la théorie des jeux deviennent des comportements capables de capter une fraction d'une population.

Le modèle pédagogique des magasins : un attracteur prescrit

Dans le modèle de magasins, on considère une population totale de consommateurs :

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^{M} N_i.$$

La population N_0 représente les consommateurs neutres, non encore captés, tandis que N_i représente la population de consommateurs captée par le magasin i.

Chaque magasin possède une attractivité X_i. Dans une version simple du modèle, cette attractivité peut dépendre du prix, de l'efficacité marketing et de l'écart de prix avec les concurrents. Pour éviter toute confusion entre le coefficient marketing et la matrice de Lotka-Volterra, on note ici le coefficient d'efficacité marketing K_m. Une forme possible est :

$$X_i = K_m \alpha_i p_i + B\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} p_j - p_i\right).$$

Le terme $K_m \alpha_i p_i$ représente l'effet propre du prix : une fraction du prix finance le marketing, la visibilité, la qualité de présentation ou l'efficacité commerciale. Le terme $B\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} p_j - p_i\right)$ représente l'effet concurrentiel : le magasin i gagne en attractivité si son prix est inférieur au prix concurrent pondéré, et perd en attractivité s'il est plus cher.

À partir des attractivités, on définit directement les parts d'équilibre. Dans une version pédagogique, on peut écrire :

$$P_i^\star = \frac{X_i}{\sum_{k=1}^{M} X_k}.$$

Dans une version plus robuste, surtout si certains X_i peuvent devenir négatifs, on utilise une forme logit :

$$P_i^\star = \frac{e^{X_i}}{\sum_{k=1}^{M} e^{X_k}}.$$

La population d'équilibre du magasin i est alors :

$$N_i^\star = N P_i^\star.$$

Le point essentiel est que l'attracteur est ici donné explicitement par les données du problème. On ne cherche pas l'attracteur en résolvant une dynamique non linéaire ; on le calcule directement à partir des attractivités relatives.

Ensuite seulement, on introduit un transitoire. Si le marché déjà capté est :

$$M_c(t) = N - N_0(t),$$

et si la population neutre décroît selon :

$$N_0(t) = N_0(0)e^{-\lambda_0 t},$$

alors une dynamique linéaire de retour vers la part d'équilibre s'écrit :

$$\frac{dN_i}{dt} = \lambda_0 P_i^{\star} N_0 + \lambda\left(P_i^{\star} \sum_{k=1}^{M} N_k - N_i\right).$$

La solution explicite est :

$$N_i(t) = P_i^{\star} M_c(t) + [N_i(0) - P_i^{\star} M_c(0))e^{-\lambda t}.$$

Quand $t \to \infty$, on obtient :

$$N_i(t) \to NP_i^{\star}.$$

Le modèle est donc un modèle à attracteur prescrit. Il sépare très clairement le calcul de l'équilibre et la vitesse de convergence. Les prix, la stratégie et la concurrence déterminent l'attracteur ; les constantes λ_0 et λ déterminent la vitesse d'accès à cet attracteur.

Le modèle Lotka-Volterra : un attracteur émergent

Dans un système de Lotka-Volterra compétitif, les populations ne sont pas ramenées vers un attracteur prescrit. Elles obéissent à une dynamique non linéaire :

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(R_i - \sum_{j=1}^{M} a_{ij} N_j\right).$$

Ici, R_i représente le potentiel propre de croissance de l'acteur i, et a_{ij} représente l'effet de la population j sur la croissance de i. Dans une lecture économique, a_{ij} mesure la pression concurrentielle exercée par le magasin j sur le magasin i.

En notation matricielle, si $A = \left(a_{ij}\right)$, l'équilibre intérieur vérifie :

$$AN^{\star} = R.$$

Si A est inversible, alors :

$$N^{\star} = A^{-1}R.$$

Contrairement au modèle des magasins, l'attracteur n'est pas donné au départ. Il émerge de la relation entre les croissances propres et les interactions concurrentielles.

Pour que cet équilibre soit admissible, il faut :

$$N_i^\star > 0 pour\ tout i.$$

Pour que cet équilibre soit localement asymptotiquement stable, on linéarise le système autour de $N^\star$. Le Jacobien est :

$$J = - DA,$$

avec :

$$D = diag\left(N_1^\star, N_2^\star, ..., N_M^\star\right).$$

Si A est symétrique définie positive, alors DA est semblable à la matrice symétrique définie positive :

$$D^{1/2} A D^{1/2}.$$

Les valeurs propres de DA sont donc réelles et positives, et les valeurs propres de :

$$J = - DA$$

sont réelles et négatives. Le point fixe est alors un attracteur local. Le transitoire près de l'équilibre s'écrit :

$$\delta N(t) = e^{Jt} \delta N(0),$$

ou, si l'on décompose en modes propres :

$$\delta N(t) = \sum_{k=1}^{M} c_k v_k e^{-\mu_k t},$$

avec :

$$\mu_k > 0.$$

Le modèle Lotka-Volterra stable conduit donc à un retour multi-exponentiel vers l'équilibre. Le modèle des magasins peut être vu comme une réduction de ce retour multi-exponentiel, dans laquelle on garde un attracteur donné et un temps de relaxation global.

Identification entre l'attracteur des magasins et l'équilibre Lotka-Volterra

Le point clé de l'unification est l'identification des attracteurs.

Le modèle des magasins donne :

$$P^\star = \left(P_1^\star, P_2^\star, ..., P_M^\star\right).$$

La population d'équilibre associée est :

$$N^{\star} = NP^{\star}.$$

Le modèle Lotka-Volterra donne :

$$AN^{\star} = R.$$

Pour que le système de Lotka-Volterra possède exactement le même attracteur que le modèle des magasins, il suffit donc d'imposer :

$$R = NAP^{\star}.$$

Composante par composante :

$$R_i = N \sum_{j=1}^{M} a_{ij} P_j^{\star}.$$

Cette formule a une interprétation simple : à l'équilibre, le potentiel propre R_i du magasin i est exactement compensé par la pression concurrentielle totale exercée par l'ensemble du marché dans la configuration $P^{\star}$.

Inversement, si un système Lotka-Volterra est déjà donné par A et R, alors son équilibre est :

$$N^{\star} = A^{-1}R.$$

Les parts de marché associées sont :

$$P^{LV} = \frac{A^{-1}R}{1^T A^{-1}R}.$$

L'équivalence avec le modèle des magasins est obtenue si :

$$P^{LV} = P^{\star}.$$

On peut donc identifier les deux modèles dans les deux sens. Soit on part de l'attracteur commercial $P^{\star}$ et on construit un système Lotka-Volterra compatible ; soit on part d'un système Lotka-Volterra donné et on compare son attracteur aux parts prédites par le modèle commercial.

La théorie des jeux évolutionnaires : attracteur par égalisation des payoffs

Dans la théorie des jeux évolutionnaires, on ne raisonne plus directement sur des populations absolues, mais sur des fréquences ou parts :

$$x_i = \frac{N_i}{\sum_k N_k}.$$

Chaque stratégie i possède un payoff effectif :

$$f_i(x) = (Gx)_i,$$

ou, plus généralement :

$$f_i(x) = b_i + \sum_j G_{ij} x_j.$$

La dynamique du réplicateur s'écrit :

$$\dot{x_i} = x_i\left(f_i(x) - f'(x)\right),$$

avec :

$$f'(x) = \sum_k x_k f_k(x).$$

La règle est simple : une stratégie augmente en fréquence si son payoff est supérieur au payoff moyen de la population, et diminue si son payoff est inférieur.

L'équilibre intérieur du réplicateur vérifie, pour toutes les stratégies présentes :

$$f_i\left(x^\star\right) = f'\left(x^\star\right).$$

Autrement dit, toutes les stratégies actives ont le même payoff à l'équilibre. L'attracteur de la dynamique du réplicateur est donc obtenu par égalisation des payoffs, et non par un calcul direct de type $P_i^\star = X_i / \sum_k X_k$.

Pour identifier la dynamique du réplicateur avec le modèle des magasins, on impose :

$$x^\star = P^\star.$$

Il faut alors que la matrice de payoff G et le vecteur d'avantages propres b vérifient :

$$b_i + \sum_j G_{ij} P_j^\star = f'\left(P^\star\right)$$

pour tous les i actifs. Cette relation est l'équivalent, en théorie des jeux, de la condition Lotka-Volterra :

$$ANP^\star = R.$$

Les deux conditions expriment la même idée : l'attracteur commun est atteint lorsque les forces de croissance, de payoff ou d'attractivité sont équilibrées.

Le lien entre Lotka-Volterra et théorie des jeux

Le lien entre Lotka-Volterra et théorie des jeux se fait par l'interprétation des coefficients d'interaction comme des payoffs.

Dans Lotka-Volterra, le taux de croissance effectif est :

$$f_i(N) = R_i - \sum_j a_{ij} N_j.$$

On peut l'écrire sous forme de payoff :

$$f_i(N) = R_i + \sum_j G_{ij} N_j,$$

avec :

$$G_{ij} = - a_{ij}.$$

Dans un système compétitif pur, la matrice de payoff d'interaction est donc l'opposé de la matrice de compétition :

$$G = - A.$$

Si A est symétrique définie positive, alors G est symétrique définie négative. Cette situation correspond à un jeu compétitif dissipatif. Les interactions sont réciproques, et la compétition croisée ne crée pas de cycle auto-entretenu ; elle ramène le système vers un point fixe stable.

Il faut donc être attentif au signe. Dire que la matrice de compétition A est définie positive signifie que les pressions concurrentielles forment un champ stabilisant. Si l'on traduit cette matrice en payoff par $G = - A$, alors le jeu stabilisant possède une matrice de payoff d'interaction définie négative.

Comparaison des trois attracteurs

Le tableau suivant résume le coeur de l'unification.

Modèle	Variable dynamique	Forme de la dynamique	Détermination de l'attracteur	Transitoire près de l'attracteur
Modèle de magasins	$N_i(t)$ ou $x_i(t)$	Relaxation vers $P_i^\star$	$P_i^\star = X_i / \sum_k X_k$ ou logit	Exponentielle imposée, souvent mono-exponentielle
Lotka-Volterra	$N_i(t)$	$\dot{N}_i = N_i\left(R_i - (A\right.$	$N^\star = A^{-1}R$	Multi-exponentiel si A est stable
Réplicateur	$x_i(t)$	$\dot{x}_i = x_i\left(f_i - f'\right)$	$f_i\left(x^\star\right) = f'\left(x^\star\right)$ pour les stratégies actives	Modes issus de la linéarisation du réplicateur
Unification	$P^\star$	Identification des équilibres	$NP^\star = A^{-1}R$ et $x^\star = P^\star$	Les transitoires peuvent être réduits à des modes de relaxation

Ce tableau montre que les trois modèles ne sont pas identiques, mais qu'ils peuvent être alignés autour du même attracteur asymptotique.

Une lecture par comportement asymptotique

La stratégie d'unification consiste donc à ne pas chercher une égalité terme à terme entre les équations. On cherche plutôt une égalité des limites :

$$x_i^{magasins}(t) = x_i^{LV}(t) = x_i^{rep}(t) = P_i^\star.$$

Dans le modèle des magasins, cette limite est imposée par construction :

$$x_i(t) \to P_i^\star.$$

Dans Lotka-Volterra, elle est obtenue si :

$$\frac{A^{-1}R}{1^T A^{-1}R} = P^\star.$$

Dans la dynamique du réplicateur, elle est obtenue si :

$$f_i\left(P^\star\right) = f'\left(P^\star\right)$$

pour toutes les stratégies actives, avec une stabilité locale de cet équilibre.

Cette formulation donne une lecture très claire : le modèle des magasins fournit l'attracteur réduit, tandis que Lotka-Volterra et le réplicateur sont des modèles plus fondamentaux capables, sous certaines conditions, de produire le même attracteur par dynamique interne.

Une lecture par identification

L'identification peut se faire en trois étapes.

Premièrement, on calcule l'attracteur de magasins :

$$X_i \to P_i^{\star}.$$

Deuxièmement, on impose cet attracteur comme équilibre d'un système Lotka-Volterra :

$$N^{\star} = NP^{\star}.$$

La condition d'identification est :

$$R = NAP^{\star}.$$

Troisièmement, on interprète la matrice Lotka-Volterra comme une matrice de jeu :

$$G = -A.$$

Le payoff effectif devient :

$$f_i(N) = R_i + \sum_j G_{ij} N_j.$$

À l'équilibre :

$$f_i\left(N^{\star}\right) = 0.$$

En parts normalisées, on retrouve l'idée d'un équilibre de jeu où les stratégies présentes ont des payoffs compatibles.

Cette identification permet de passer du modèle réduit aux modèles non linéaires :

$$X_i \to P_i^{\star} \to N^{\star} = NP^{\star} \to R = NAP^{\star} \to G = -A.$$

Sens physique de l'unification

Dans le langage de la physique de la complexité, cette unification peut être formulée ainsi : un système concurrentiel possède plusieurs attracteurs potentiels. Chaque attracteur capte une fraction d'une population. Le modèle réduit calcule directement la répartition

asymptotique entre ces attracteurs. Les modèles Lotka-Volterra et réplicateur décrivent des mécanismes non linéaires qui peuvent faire émerger la même répartition.

Le modèle des magasins est donc une fermeture macroscopique. Il remplace la dynamique détaillée des interactions par deux objets : une loi d'attractivité et une loi de relaxation.

La loi d'attractivité est :

$$X_i \to P_i^{\star}.$$

La loi de relaxation est :

$$\dot{N}_i = \lambda\left(P_i^{\star} M_c - N_i\right).$$

Lotka-Volterra, de son côté, garde la dynamique d'interaction :

$$\dot{N}_i = N_i\left(R_i - (AN)_i\right).$$

Le réplicateur garde la dynamique de comparaison relative :

$$\dot{x}_i = x_i\left(f_i - f'\right).$$

L'unification consiste à dire que ces trois niveaux peuvent avoir le même comportement asymptotique, même si leurs trajectoires sont différentes.

Différence entre attracteur imposé et attracteur émergent

Cette distinction est centrale.

Dans le modèle des magasins, l'attracteur est imposé par construction :

$$P^{\star} = F\left(X_1, \ldots, X_M\right).$$

Dans Lotka-Volterra, l'attracteur est émergent :

$$N^{\star} = A^{-1}R.$$

Dans le réplicateur, l'attracteur est un équilibre de payoffs :

$$f_i\left(x^{\star}\right) = f'\left(x^{\star}\right).$$

On peut donc dire que le modèle des magasins part de la fin, c'est-à-dire de la répartition asymptotique attendue, puis construit le transitoire le plus simple. Lotka-Volterra et le réplicateur partent de règles locales et font émerger la répartition finale.

Le modèle des magasins est donc plus pédagogique et plus directement pilotable. Les modèles Lotka-Volterra et réplicateur sont plus fondamentaux pour étudier la stabilité, les bifurcations, les exclusions, les cycles ou les basculements.

Conditions de cohérence de l'unification

Pour que l'unification soit rigoureuse, il faut plusieurs conditions.

Premièrement, les parts calculées par le modèle de magasins doivent être positives :

$$P_i^\star > 0.$$

Deuxièmement, la somme des parts doit valoir un :

$$\sum_i P_i^\star = 1.$$

Troisièmement, le système Lotka-Volterra associé doit admettre l'équilibre :

$$N^\star = NP^\star.$$

Cela impose :

$$R = NAP^\star.$$

Quatrièmement, cet équilibre doit être stable. Une condition suffisante simple est :

$$A = A^T et A définie\ positive.$$

Cinquièmement, le jeu évolutionnaire associé doit avoir $P^\star$ comme équilibre de payoffs. Cela impose :

$$f_i(P^\star) = f'(P^\star)$$

pour tous les i actifs.

Si ces conditions sont réunies, les trois modèles décrivent le même attracteur, mais avec des niveaux de détail différents.

Conclusion

L'unification des modèles de compétition par le comportement asymptotique permet de relier trois traditions qui paraissent différentes.

Le modèle des magasins définit un attracteur explicite à partir d'une fonction d'attractivité. Il est simple, pédagogique et directement exploitable. Son transitoire est linéaire et converge vers l'attracteur imposé.

Le modèle de Lotka-Volterra définit une dynamique non linéaire de compétition entre populations. Son attracteur est déterminé par l'équilibre entre croissances propres et interactions concurrentielles. Si la matrice d'interactions est symétrique définie positive, alors le point fixe intérieur est stable et le transitoire est une combinaison d'exponentielles décroissantes.

La théorie des jeux évolutionnaires définit une dynamique de fréquences fondée sur les payoffs relatifs. L'attracteur est une distribution de stratégies où les stratégies présentes ont des payoffs compatibles ou égaux.

L'unification consiste à identifier les attracteurs :

$$P^{\star}_{magasins} = P^{\star}_{LV} = P^{\star}_{jeux}.$$

La formule centrale est :

$$R = NAP^{\star}.$$

Elle permet de construire un système Lotka-Volterra stable ayant pour attracteur le point défini par le modèle des magasins. Et si l'on pose :

$$G = -A,$$

on obtient une lecture en théorie des jeux, où la matrice d'interactions devient une matrice de payoffs compétitifs.

On peut donc conclure que le modèle des magasins est une forme réduite à attracteur prescrit ; Lotka-Volterra est une dynamique non linéaire à attracteur émergent ; et la théorie des jeux évolutionnaires est une dynamique de stratégies à attracteur de payoff. Leur point commun est le comportement asymptotique : la répartition finale d'une population entre plusieurs attracteurs concurrents.

Bibliographie indicative

Bass, F. M. (1969). A new product growth model for consumer durables. *Management Science*, 15(5), 215-227.

Bomze, I. M. (1983). Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification. *Biological Cybernetics*, 48, 201-211.

Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1998). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press.

May, R. M. (1973). *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press.

McFadden, D. (1974). Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In P. Zarembka (Ed.), *Frontiers in Econometrics*. Academic Press.

Sandholm, W. H. (2010). *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press.

Sigmund, K. (2010). *The Calculus of Selfishness*. Princeton University Press.

Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary Game Theory*. MIT Press.