De la dynamique vectorielle à l'EDO sur variable d'ordre

Potentiel effectif, composante tangentielle et apparition de mémoire

Alain Chautard

27 mai 2026

Introduction

L'objectif de ce texte est de donner une justification mathématique et conceptuelle à une équation différentielle stochastique réduite portant sur une variable d'ordre scalaire. L'idée centrale est la suivante : un système complexe réel évolue généralement dans un espace de grande dimension. Cet état complet sera noté Z_t. Il peut représenter un ensemble de grandeurs physiques, économiques, organisationnelles ou sociales. Pourtant, dans l'analyse pratique, on ne suit souvent qu'une grandeur collective, appelée variable d'ordre, notée X_t.

Cette variable d'ordre n'est pas nécessairement une coordonnée élémentaire du système. Elle peut être une fonction de l'état complet :

$$X_t = G(Z_t).$$

La question est alors de comprendre quelle équation effective gouverne X_t lorsque Z_t vérifie une équation différentielle stochastique vectorielle. Nous voulons en particulier montrer pourquoi une équation de la forme

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(t)dW_t + sdB_t$$

n'est pas simplement une hypothèse empirique, mais peut être comprise comme une forme canonique de modèle réduit. Le potentiel V représente la géographie des régimes observables de la variable d'ordre. Le bruit rapide sdB_t représente les fluctuations résiduelles à courte échelle. Le terme $\sigma(t)dW_t$, éventuellement à mémoire longue, représente la trace effective des degrés de liberté cachés qui ne sont pas explicitement observés dans X_t.

Le point le plus subtil concerne la partie tangentielle ou rotationnelle de la dynamique complète. Une composante du mouvement de Z_t peut être tangentielle aux surfaces $G(Z) = X$. Dans ce cas, elle ne modifie pas immédiatement la valeur de X. Elle disparaît donc de la dérive instantanée de la variable d'ordre. Mais elle ne disparaît pas du système réel. Elle déplace l'état Z_t dans les directions cachées, à valeur de X constante. Or cette position cachée conditionne l'évolution future de X. C'est ainsi qu'une dynamique

tangentielle invisible instantanément peut réapparaître sous forme de mémoire, de bruit coloré, de volatilité effective ou de paramètres lents.

Hypothèses générales

On considère un système complet dont l'état est donné par un vecteur

$$Z_t \in \mathbb{R}^n.$$

La dynamique de Z_t est supposée markovienne à l'échelle complète. Elle est décrite par une équation différentielle stochastique :

$$dZ_t = F(Z_t, t)dt + \Sigma(Z_t, t)dW_t.$$

Dans cette écriture, $F(Z, t)$ est le champ de dérive déterministe, $\Sigma(Z, t)$ est la matrice de diffusion, et W_t est un mouvement brownien vectoriel. L'hypothèse de base est que le système complet peut être décrit localement par une dynamique à dérive et diffusion, même si cette dynamique peut être non linéaire, non stationnaire ou dépendante de l'état.

On suppose ensuite que le champ de dérive F peut être décomposé, au moins formellement, en deux composantes : une partie gradientielle et une partie non conservative. On écrit :

$$F(Z, t) = -\nabla U(Z, t) + R(Z, t).$$

Le terme $-\nabla U$ correspond à une force dérivant d'un potentiel U. Il décrit la tendance du système à se rapprocher de certaines régions préférentielles de l'espace d'état. Le terme R représente la partie non potentielle du champ : circulation, rotation, boucle de rétroaction, cycle, transport interne, flux hors équilibre. Dans un langage inspiré de Helmholtz, on peut voir $-\nabla U$ comme la partie irrotationnelle et R comme la partie solénoïdale ou rotationnelle, sous réserve des conditions usuelles sur le domaine et les conditions aux limites.

La variable d'ordre observée est une fonction scalaire de l'état complet :

$$X_t = G(Z_t).$$

La fonction G réalise la réduction du système. Elle peut représenter une projection physique, une composante principale, un indicateur de performance, une amplitude modale, une variable collective, ou une grandeur empirique extraite des données.

Géométrie de la projection

Pour une valeur donnée x, l'ensemble des états complets qui donnent la même variable d'ordre est :

$$M_x = \{Z \in \mathbb{R}^n : G(Z) = x\}.$$

Cet ensemble est une surface de dimension $n - 1$ lorsque G est régulière et lorsque $\nabla G \neq 0$. On peut l'appeler fibre de la projection. Tous les points de M_x sont indistinguables si l'on observe uniquement $X = x$.

La direction normale à cette surface est donnée par le gradient :

$$\nabla G(Z).$$

Un champ vectoriel $A(Z)$ contribue instantanément à la variation de $X = G(Z)$ selon :

$$\frac{dX}{dt} = \nabla G(Z) \cdot A(Z).$$

Si $A(Z)$ est tangent à la surface $M_{x'}$ alors il vérifie :

$$\nabla G(Z) \cdot A(Z) = 0.$$

Dans ce cas, le mouvement produit par A déplace le point Z à l'intérieur de la surface $G(Z) = x$, mais il ne modifie pas la valeur de X. C'est un résultat purement géométrique. La variable réduite X ne voit que la composante du mouvement de Z située dans la direction normale aux surfaces $G(Z) = x$.

Cette remarque est fondamentale. Elle signifie qu'une dynamique importante peut se dérouler dans l'espace complet sans être immédiatement visible dans la variable d'ordre. L'observation réduite ne supprime pas cette dynamique ; elle la rend seulement cachée.

Projection stochastique par la formule d'Ito

Pour obtenir l'équation de $X_t = G(Z_t)$, on applique la formule d'Ito. Si

$$dZ_t = F(Z_t, t)dt + \Sigma(Z_t, t)dW_t,$$

alors :

$$dG(Z_t) = \nabla G(Z_t) \cdot dZ_t + \frac{1}{2} Tr\left(\Sigma\Sigma^T \nabla^2 G(Z_t)\right)dt.$$

On obtient donc :

$$dX_t = [\nabla G(Z_t) \cdot F(Z_t, t) + \frac{1}{2} Tr\left(\Sigma\Sigma^T \nabla^2 G(Z_t)\right))dt + \nabla G(Z_t)\Sigma(Z_t, t)dW_t.$$

En introduisant la décomposition

$$F(Z, t) = -\nabla U(Z, t) + R(Z, t),$$

il vient :

$$dX_t = [-\nabla G(Z_t)\cdot \nabla U(Z_t,t) + \nabla G(Z_t)\cdot R(Z_t,t) + \tfrac{1}{2}Tr\left(\Sigma\Sigma^T\nabla^2 G(Z_t)\right))dt + \nabla G(Z_t)\Sigma(Z_t,t)dW_t.$$

Cette formule contient déjà toute la structure du modèle réduit. La dérive effective de X reçoit une contribution de la partie potentielle, une contribution de la partie rotationnelle projetée, et une correction d'Ito liée à la courbure de la fonction G. Le bruit de Z est lui aussi projeté sur X par le facteur $\nabla G\Sigma$.

Fermeture sur la variable d'ordre

L'équation précédente n'est pas encore une équation fermée sur X, car le membre de droite dépend encore de Z_t. Pour obtenir une EDO effective, on doit moyenner sur les états cachés compatibles avec une même valeur de la variable d'ordre.

On introduit la dérive projetée :

$$A_X(Z,t) = -\nabla G(Z)\cdot \nabla U(Z,t) + \nabla G(Z)\cdot R(Z,t) + \tfrac{1}{2}Tr\left(\Sigma\Sigma^T\nabla^2 G(Z)\right).$$

Une fermeture markovienne naturelle consiste à poser :

$$a(x,t) = E[A_X(Z,t)|G(Z) = x).$$

De même, la diffusion effective est :

$$\sigma_X^2(x,t) = E[\nabla G(Z)\Sigma\Sigma^T\nabla G(Z)^T|G(Z) = x).$$

On obtient alors une approximation du type :

$$dX_t = a(X_t,t)dt + \sigma_X(X_t,t)dB_t.$$

Cette équation est l'approximation la plus simple : elle suppose que connaître X_t suffit à prédire statistiquement l'évolution future de X_t. Mais cette hypothèse est souvent trop forte. En général, la variable X_t seule n'est pas markovienne, même si Z_t l'est.

Décomposition de la dérive effective

La dérive effective peut être séparée en trois termes :

$$a(x,t) = a_{pot}(x,t) + a_{rot}(x,t) + a_{Ito}(x,t).$$

La contribution potentielle est :

$$a_{pot}(x,t) = -E[\nabla G(Z)\cdot \nabla U(Z,t)|G(Z) = x).$$

La contribution rotationnelle projetée est :

$$a_{rot}(x,t) = E[\nabla G(Z) \cdot R(Z,t) | G(Z) = x).$$

La correction d'Ito est :

$$a_{Ito}(x,t) = \frac{1}{2} E[Tr\left(\Sigma\Sigma^T \nabla^2 G(Z)\right) | G(Z) = x).$$

Cette séparation permet d'interpréter précisément ce que l'on observe dans la variable d'ordre. Le terme potentiel correspond au rappel vers les régimes préférentiels. Le terme rotationnel projeté correspond à la partie des circulations internes qui change directement la valeur de X. Le terme d'Ito traduit le fait que la projection G peut être non linéaire : même un bruit centré dans Z peut produire une dérive effective dans X si la fonction d'observation est courbe.

Le potentiel effectif

Lorsque la dynamique de X est stationnaire, on peut estimer un potentiel effectif à partir de la densité empirique de X. Si $p_X(x)$ est la densité stationnaire de X, on pose :

$$V_{eff}(x) = - \log p_X(x).$$

Ce potentiel effectif n'est pas simplement le potentiel complet U évalué sur une inverse de G . En effet, plusieurs états Z peuvent donner la même valeur de X. Le potentiel réduit résulte donc d'une intégration sur les fibres $G(Z) = x$. Il est plus proche d'une énergie libre que d'une énergie microscopique.

Dans une approximation gradientielle, on écrit alors :

$$a_{pot}(x) \approx - V_{eff}'(x).$$

Le modèle réduit devient :

$$dX_t = - V_{eff}'\left(X_t\right) dt + termes\ résiduels.$$

Cette étape justifie le rôle central du potentiel dans votre EDO. Le potentiel ne prétend pas décrire toutes les forces du système complet ; il décrit la géométrie statistique visible des régimes de la variable d'ordre.

La partie tangentielle : disparition instantanée

Considérons maintenant la partie rotationnelle $R(Z,t)$. Elle peut être décomposée relativement aux surfaces $G(Z) = x$ en une composante normale et une composante tangentielle :

$$R(Z,t) = R_{\perp}(Z,t) + R_{\parallel}(Z,t).$$

La composante tangentielle vérifie :

$$\nabla G(Z) \cdot R_{\parallel}(Z,t) = 0.$$

Elle ne contribue donc pas directement à dX_t. En effet, la contribution rotationnelle instantanée est :

$$\nabla G\left(Z_t\right) \cdot R\left(Z_t, t\right).$$

Si $R = R_{\parallel}$, alors cette contribution est nulle :

$$\nabla G\left(Z_t\right) \cdot R_{\parallel}\left(Z_t, t\right) = 0.$$

On peut donc dire rigoureusement : une composante du champ complet, tangentielle aux fibres $G(Z) = x$ est invisible dans la dérive instantanée de la variable d'ordre. Elle ne modifie pas immédiatement la valeur de X_t.

Mais cette invisibilité est seulement instantanée. Elle ne signifie pas absence d'effet dynamique.

Pourquoi la partie tangentielle réapparaît comme mémoire

La clé est la suivante : même si $R_{\parallel}$ ne modifie pas X_t à l'instant présent, elle modifie la position de Z_t à l'intérieur de la fibre $G(Z) = X_t$.

Deux états Z_a et Z_b peuvent vérifier :

$$G\left(Z_a\right) = G\left(Z_b\right) = x,$$

mais avoir des dérives futures différentes :

$$\nabla G\left(Z_a\right) \cdot F\left(Z_a\right) \neq \nabla G\left(Z_b\right) \cdot F\left(Z_b\right).$$

Donc, connaître seulement $X_t = x$ ne suffit pas toujours à connaître la dérive future de X. Il faudrait aussi connaître où se trouve Z_t dans la surface M_x.

La partie tangentielle agit précisément dans cette direction cachée. Elle déplace le système à X constant, mais elle prépare les conditions de la prochaine variation de X. Elle ne change pas X maintenant, mais elle modifie la probabilité que X augmente ou diminue plus tard.

Le système complet Z_t peut être markovien, mais la variable réduite $X_t = G\left(Z_t\right)$ ne l'est pas nécessairement. En effet :

$$P\left(X_{t+\Delta t}|X_t\right)$$

peut dépendre de la distribution cachée de Z_t sur la fibre $G(Z) = X_t$. Or cette distribution dépend de l'histoire passée. On devrait donc écrire plus justement :

$$P\left(X_{t+\Delta t}|X_t, X_{t-\Delta t}, X_{t-2\Delta t}, \ldots\right).$$

C'est l'apparition de la mémoire. La mémoire n'est pas ajoutée artificiellement ; elle vient de l'élimination des coordonnées cachées.

Une écriture effective possible est :

$$dX_t = a\left(X_t\right)dt + \left[\int_0^t K\left(t - s, X_s\right)ds\right)dt + \eta(t)dt + sdB_t.$$

Le noyau K représente l'effet retardé des variables éliminées. Le terme $\eta(t)$ représente une force fluctuante issue des degrés cachés. Si cette force garde des corrélations temporelles, elle devient un bruit coloré.

Exemple élémentaire : position et vitesse

L'exemple le plus simple est celui d'un système mécanique décrit par une position q et une vitesse p. On pose :

$$Z = (q, p).$$

Si l'on choisit comme variable d'ordre :

$$X = G(Z) = q,$$

alors les surfaces $G(Z) = x$ sont les droites $q = x$. La variable p est cachée dans la fibre. Elle peut varier alors que q reste instantanément fixé.

Pourtant, p détermine l'évolution future de q, puisque :

$$\dot{q} = p.$$

Si l'on observe seulement q, on perd l'information sur p. La dynamique complète en (q, p) est locale et markovienne, mais la dynamique réduite en q seul devient une dynamique avec mémoire ou avec inertie. Cette analogie montre clairement le mécanisme général : une variable cachée tangentielle peut ne pas changer la variable observée immédiatement tout en déterminant fortement son évolution future.

Bruit coloré et volatilité effective

Dans l'équation projetée, le bruit instantané de X vaut :

$$\nabla G\left(Z_t\right)\Sigma\left(Z_t, t\right)dW_t.$$

Sa variance conditionnelle dépend de Z_t :

$$\sigma_X^2\left(Z_t, t\right) = \nabla G\left(Z_t\right)\Sigma\left(Z_t, t\right)\Sigma\left(Z_t, t\right)^T\nabla G\left(Z_t\right)^T.$$

Si l'on ne connaît que $X_t = x$, on moyenne cette quantité sur la fibre :

$$\sigma_X^2(x, t) = E[\sigma_X^2(Z, t)|G(Z) = x).$$

Mais si la distribution de Z_t sur cette fibre évolue lentement, alors la variance effective de X évolue elle aussi lentement. On obtient une volatilité dynamique :

$$\sigma_X(t).$$

Cette volatilité n'est pas forcément un simple écart-type empirique. Elle peut représenter l'état interne caché du système. Lorsque les variables tangentielles gardent une corrélation temporelle, la force résiduelle produite par leur élimination n'est pas blanche. Elle possède une autocorrélation :

$$E[\eta(t)\eta(s)) = C(t - s).$$

Si $C(\tau)$ décroît lentement, on obtient une mémoire longue. Une représentation réduite pratique consiste alors à écrire :

$$dX_t = -V'\left(X_t\right)dt + \sigma(t)dW_t + sdB_t.$$

Dans cette équation, sdB_t représente le bruit rapide, approximé comme blanc, tandis que $\sigma(t)dW_t$ représente une agitation lente et corrélée, issue des degrés de liberté cachés.

Dynamique lente des paramètres

Une autre manière de formuler le même phénomène consiste à introduire des variables cachées Y_t qui paramètrent la position de Z_t sur la fibre. On écrit localement :

$$Z_t = \left(X_t, Y_t\right).$$

La dynamique peut alors prendre la forme :

$$dX_t = f\left(X_t, Y_t\right)dt + \sigma\left(X_t, Y_t\right)dW_t,$$

$$dY_t = b\left(X_t, Y_t\right)dt + \Gamma\left(X_t, Y_t\right)dB_t.$$

Si Y_t évolue lentement ou possède une mémoire longue, les coefficients de l'équation de X_t deviennent eux-mêmes variables dans le temps. On peut alors écrire :

$$dX_t = -V'(X_t; \theta_t)dt + \sigma(\theta_t)dW_t + sdB_t,$$

où θ_t représente un paramètre latent associé aux variables cachées. Dans votre formulation, on simplifie souvent en gardant un potentiel moyen $V(X)$ et en reportant l'effet lent des variables cachées sur la volatilité $\sigma(t)$.

Lecture par le formalisme de Mori-Zwanzig

Le formalisme de Mori-Zwanzig donne une formulation générale de ce phénomène. Lorsqu'on projette une dynamique complète sur un ensemble réduit d'observables, l'équation exacte des variables retenues contient trois types de termes : un terme markovien, un terme mémoire et un bruit orthogonal.

Sous forme schématique :

$$\frac{dX}{dt} = terme\ markovien + \int_0^t K(t-s)X(s)ds + bruit\ orthogonal.$$

Le terme markovien correspond à ce que l'on obtient par moyenne conditionnelle immédiate. Le terme mémoire représente le retour différé des variables éliminées. Le bruit orthogonal représente les fluctuations dans les directions non observées.

Dans notre cadre, la partie tangentielle du champ vit précisément dans les directions éliminées par la projection. Elle ne change pas l'observable instantanément, mais elle évolue dans le sous-espace caché et revient influencer la variable d'ordre à travers les termes de mémoire et de bruit effectif.

Universalité de structure de l'EDO

Le raisonnement précédent permet de comprendre en quel sens votre EDO possède un caractère universel. Elle n'est pas universelle au sens où elle décrirait exactement tous les systèmes. Elle est universelle au sens des modèles réduits : elle constitue une forme canonique obtenue lorsqu'un système complexe de grande dimension est observé à travers une variable d'ordre scalaire.

La structure générique est :

$$système\ complet Z_t \rightarrow variable\ d'ordre X_t = G(Z_t) \rightarrow potentiel\ effectif V(X) \rightarrow bruit\ rapide + mémoi$$

Le potentiel $V(X)$ décrit la géographie visible des régimes. Il peut être estimé à partir de la densité empirique de la variable d'ordre :

$$V(X) = -\ log p_X(X).$$

Le bruit rapide représente les fluctuations locales non structurées. La volatilité lente ou corrélée représente la trace des variables cachées et des circulations tangentielles.

L'équation :

$$dX_t = -\ V'(X_t)dt\ +\ \sigma(t)dW_t\ +\ sdB_t$$

peut donc être interprétée comme une fermeture minimale de la dynamique projetée. Elle conserve trois ingrédients essentiels : les régimes, les fluctuations rapides, et la mémoire effective des degrés de liberté non observés.

Commentaires d'interprétation

Le potentiel ne doit pas être compris comme un potentiel microscopique complet. Il est un potentiel effectif, construit dans l'espace réduit de la variable d'ordre. Il résume les attracteurs, les bassins, les barrières et les régimes observables.

La composante tangentielle ne doit pas être confondue avec une absence d'action. Elle n'agit pas directement sur X à l'instant où elle est tangentielle, mais elle modifie l'état caché du système. C'est précisément parce qu'elle agit sans être vue qu'elle devient source de mémoire.

La mémoire n'est donc pas une complication ajoutée après coup. Elle est la conséquence normale d'une réduction. Lorsqu'on élimine des variables qui influencent l'avenir, leur effet réapparaît sous forme non locale dans le temps.

La volatilité $\sigma(t)$ peut alors être interprétée comme un indicateur de l'état interne caché du système. Dans un marché financier, elle traduit l'agitation collective non observée. Dans le fouillis de mer, elle traduit les fluctuations multi-échelles de la surface et des vitesses. Dans un projet industriel, elle traduit les tensions organisationnelles, les retards, les décisions non visibles et les boucles de correction. Dans un système social, elle traduit les tensions lentes, les cycles de confiance, les effets générationnels ou institutionnels.

Conclusion

À partir d'une dynamique vectorielle complète :

$$dZ_t = [-\ \nabla U(Z_t, t) + R(Z_t, t))dt\ +\ \Sigma(Z_t, t)dW_t,$$

et d'une variable d'ordre :

$$X_t = G(Z_t),$$

la formule d'Ito montre que la dynamique instantanée de X_t est obtenue par projection du champ complet sur le gradient ∇G. Les composantes du champ tangentielles aux surfaces $G(Z) = x$ ne contribuent pas directement à la dérive instantanée de X_t, car leur produit scalaire avec ∇G est nul.

Cependant, ces composantes tangentielles modifient la position cachée du système dans les fibres $G(Z) = x$. Comme la dérive et la diffusion futures de X_t dépendent de cette position cachée, l'élimination de ces variables produit une dynamique réduite non markovienne. Cette non-markovianité se manifeste sous forme de mémoire, de bruit coloré, de volatilité effective ou de paramètres lents.

Votre EDO :

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(t)dW_t + sdB_t$$

apparaît ainsi comme une forme canonique de fermeture stochastique pour une variable d'ordre scalaire. Elle exprime une idée simple et puissante : le potentiel décrit la géographie des régimes visibles, tandis que la volatilité à mémoire décrit la trace dynamique des degrés de liberté cachés.