Structures dissipatives, énergie libre et interfaces fractales

Vers une physique des processus : flux, forme, branchement, interface

Une forme dissipative n'est pas une chose immobile : elle est un régime stable de circulation, de transformation et de dissipation des flux.

Plan du chapitre

1. L'énergie libre comme paysage effectif des formes.
2. Le passage de la descente de gradient à l'équation de réaction-diffusion.
3. Le rôle de l'activité locale A(u), des sources S et des conditions aux limites.
4. Le passage des structures dissipatives aux réseaux de branchement.
5. L'interface fractale comme enveloppe du processus de ramification.
6. Applications : arbre, poumon, turbulence, galaxie, atome, organisme, ville, évolution.

1. La structure dissipative comme forme traversée par des flux

Une structure dissipative apparaît lorsqu'un système ouvert, maintenu loin de l'équilibre, reçoit des flux d'énergie, de matière ou d'information, les transforme, puis les dissipe. Elle n'est pas stable parce que rien ne bouge ; elle est stable parce que le mouvement s'organise autour d'un régime récurrent.

La flamme danse, mais reste flamme. Le vortex tourne, mais reste vortex. La cellule renouvelle ses molécules, mais conserve son organisation. Une société change d'individus, mais maintient parfois ses institutions. Dans tous ces cas, la forme est une stabilité dynamique.

On peut alors adopter une grammaire commune : chercher ce qui circule, ce qui est conservé, ce qui se transforme, ce qui se dissipe, et ce qui fait interface avec l'environnement.

$$flux \rightarrow transformation \rightarrow dissipation \rightarrow forme \rightarrow interface$$

Chaîne conceptuelle : la forme est comprise comme le résultat dynamique d'un traitement organisé des flux.

Élément	Question physique	Rôle dans la forme
Flux	Qu'est-ce qui circule ?	Matière, énergie, information, probabilité, quantité de mouvement.
Gradient	Qu'est-ce qui pousse le flux ?	Différence de potentiel, concentration, température, pression, courbure.
Dissipation	Qu'est-ce qui se dégrade ou se transforme irréversiblement ?	Conversion en chaleur, diffusion, viscosité, frottement, production d'entropie.
Interface	Où le système échange-t-il avec son milieu ?	Surface, frontière active, réseau terminal, enveloppe fractale.
Attracteur	Quel régime persiste malgré les fluctuations ?	Forme globale stable, cycle, état stationnaire hors équilibre.

Tableau 1 — Les éléments minimaux d'une lecture processuelle des structures dissipatives.

2. L'énergie libre : un paysage effectif pour les formes

Le concept d'énergie libre est utile parce qu'il mesure, au sens large, l'énergie encore disponible pour produire du travail, une transformation ou une organisation. Dans les systèmes complexes, il est rarement possible de calculer exactement l'énergie libre thermodynamique complète, car l'énergie interne et l'entropie sont difficiles à évaluer. On construit alors une énergie libre effective.

$$F = U - TS$$

Cette écriture thermodynamique de Helmholtz signifie que l'énergie libre est l'énergie interne moins la part liée à l'agitation entropique. Elle est très profonde, mais rarement directement exploitable dans les systèmes complexes réels.

$$G = H - TS = U + pV - TS$$

L'énergie libre de Gibbs est adaptée aux situations à température et pression constantes, notamment en chimie et en biologie. Là encore, dans une modélisation de formes, on remplace souvent cette grandeur par une fonctionnelle effective.

> *Hypothèse de travail — Dans ce chapitre, F ou F[u] ne désigne pas forcément l'énergie libre thermodynamique exacte. Elle désigne une fonctionnelle effective, construite pour représenter les tendances passives du système : lissage, cohésion, préférence locale, coût d'interface et contraintes.*

$$F[u] = \int_{\Omega} L(u, \nabla u, x)\, dx$$

La fonctionnelle associe un coût global à une configuration entière du champ u(x,t). Le champ u peut représenter une concentration, une densité, une aimantation locale, une activité biologique, une température, une vorticité ou toute variable d'ordre pertinente.

$$F[u] = \int \Omega \, [\, (\kappa/2)(\nabla u \cdot \nabla u) + V(u) \,] \, dx$$

Cette forme est fondamentale car elle sépare deux contributions : un coût spatial et un coût local. Le terme de gradient pénalise les variations brutales ; le potentiel local V(u) indique les états préférés du système.

Terme	Sens mathématique	Sens physique	Effet sur la forme
$(\kappa/2)\|\nabla u\|^2$	Coût des gradients spatiaux	Cohésion, tension d'interface, coût de rugosité, résistance aux discontinuités	Lisse la forme, limite les interfaces abruptes, favorise la continuité.
V(u)	Potentiel local	Préférence pour certains états locaux ; minima = états stables	Crée des phases, des attracteurs locaux, des seuils et des bifurcations possibles.
κ	Coefficient positif	Rigidité spatiale ou coût d'interface	Plus κ est grand, plus les variations spatiales sont coûteuses.
Ω	Domaine spatial	Milieu dans lequel la forme se déploie	Détermine les contraintes géométriques et les conditions aux limites.

Tableau 2 — Lecture physique de la fonctionnelle d'énergie libre effective.

3. De la descente de gradient à l'équation de réaction-diffusion

La descente de gradient exprime l'idée qu'un système passif évolue dans la direction qui diminue son énergie libre. Si M est une mobilité positive, on écrit :

$$\partial u/\partial t = - M \, \delta F/\delta u$$

La dérivée variationnelle de la fonctionnelle précédente est :

$$\delta F/\delta u = - \kappa \, \Delta u + V'(u)$$

En remplaçant dans la descente de gradient, on obtient :

$$\partial u/\partial t = M \, \kappa \, \Delta u - M \, V'(u)$$

En posant D = Mκ et f(u) = -M V′(u), on retrouve une équation de réaction-diffusion :

$$\partial u/\partial t = D \, \Delta u + f(u)$$

Conclusion mathématique — Toute descente de gradient associée à une fonctionnelle du type ∫[(κ/2)|∇u|² + V(u)]dx produit une équation de réaction-diffusion scalaire. L'inverse est vrai dans beaucoup de cas scalaires si f(u) peut être intégré en un potentiel V(u). En revanche, pour plusieurs variables, toutes les réactions ne dérivent pas d'un potentiel commun.

Écriture	Terme obtenu	Interprétation
$(\kappa/2)\|\nabla u\|^2$	DΔu	Diffusion, lissage, réduction des gradients spatiaux.
V(u)	f(u) = -M V′(u)	Réaction locale dérivée d'un potentiel ; tendance vers les minima de V.
M	Mobilité	Vitesse avec laquelle le système répond à la force thermodynamique.
D = Mκ	Coefficient de diffusion	Capacité globale de lissage spatial.

Tableau 3 — Passage de l'énergie libre effective à la réaction-diffusion.

4. L'activité A(u) : ce qui empêche la simple chute vers l'équilibre

Une structure dissipative n'est pas seulement un système qui descend son énergie libre. Si elle descendait seulement son gradient, elle finirait dans un minimum passif. Or une flamme, une cellule, un vortex entretenu ou un organisme restent loin de l'équilibre. Il faut donc ajouter une activité locale et des sources.

$$\partial u/\partial t \;=\; -\,M\,\delta F/\delta u \;+\; A(u) \;+\; S(x,t)$$

Le terme A(u) représente la partie locale active : réaction, autocatalyse, métabolisme, amplification, saturation, pompe interne, étirement de vortex, croissance. Il peut freiner la descente de gradient, la compenser, ou créer un attracteur non trivial.

$$dF/dt \;=\; -\,Q_diss \;+\; Q_act \;+\; source$$

Le premier terme est négatif : il représente la dissipation passive. Le second peut être positif ou négatif : il représente l'effet de l'activité locale et des sources. Une structure dissipative apparaît lorsque ces termes maintiennent un régime hors équilibre sans détruire la cohérence de la forme.

Terme	Origine	Rôle
-M δF/δu	Interne passive	Descente d'énergie libre, relaxation, diffusion, retour vers un minimum.
A(u)	Interne active	Réaction locale non-gradient, amplification, saturation, auto-entretien.
S(x,t)	Externe ou imposée	Source volumique, forçage, alimentation, contrainte temporelle.
Conditions aux limites	Frontière ∂Ω	Flux imposés, échange avec l'environnement, interface active.

Tableau 4 — Différence entre relaxation, activité locale et sources.

$$-\,D\,\nabla u \cdot n \;=\; q(x,t)\;sur\;\partial\Omega$$

Cette condition de Neumann impose un flux au bord : elle signifie que l'environnement alimente ou extrait une quantité à travers l'interface. Une condition de Robin, par exemple -D∇u·n = h(u-u_ext), modélise un échange proportionnel à l'écart entre le système et le milieu extérieur.

5. Partie gradient et partie rotationnelle : le théorème derrière l'intuition

Votre intuition rejoint un résultat classique : un champ dynamique peut souvent être décomposé en une partie gradient et une partie rotationnelle, ou plus généralement en une partie dissipative et une partie conservative. Dans l'esprit de la décomposition de Helmholtz-Hodge, un champ de vecteurs peut se séparer en une composante de gradient, une composante solénoïdale et parfois une composante harmonique dépendant des conditions aux limites.

$$b(X) \;=\; -\,M(X)\,\nabla F(X) \;+\; A_rot(X)$$

La partie gradient descend le potentiel F. La partie rotationnelle ne dérive pas d'un potentiel : elle produit une circulation dans l'espace des états. Dans une structure dissipative, cette partie non-gradient est essentielle, car elle permet les cycles, oscillations, vortex, cascades et régimes entretenus.

$$\partial X/\partial t \;=\; J(X)\,\delta F/\delta X \;-\; G(X)\,\delta F/\delta X \;+\; A(X) \;+\; S(X,t)$$

Ici, J représente la partie conservative ou réversible, G la partie dissipative irréversible, A l'activité non-gradient, et S les sources ou contraintes imposées. Cette formule généralise le couple réaction-diffusion à des systèmes plus riches.

6. De la structure dissipative au réseau de branchement

Une structure dissipative doit capter, distribuer et dissiper des flux. Dès que ces flux doivent atteindre de nombreux points ou provenir de nombreux points, une géométrie ramifiée devient avantageuse. C'est le rôle du transport ramifié.

$$C\alpha(G) \;=\; \Sigma e \in G\, m_e^{\alpha}\, \ell_e, \quad 0 \;<\; \alpha \;<\; 1$$

Le réseau G est constitué de branches e. Chaque branche transporte un flux m_e sur une longueur ℓ_e. L'exposant α introduit une économie d'échelle : transporter ensemble coûte moins cher que transporter séparément.

$$(m_1 \;+\; m_2)^{\alpha} \;<\; m_1{}^{\alpha} \;+\; m_2{}^{\alpha} \quad si\, 0 \;<\; \alpha \;<\; 1$$

Cette inégalité est le cœur du raisonnement. Elle signifie que le regroupement des flux est rentable. Mais comme regrouper impose parfois des détours, l'optimum devient un compromis : partager un tronc commun, puis se séparer en branches secondaires.

$$G_opt \;=\; argmin{-}G\; of\; \Sigma e\, m_e^{\alpha}\, \ell_e$$

$$\nabla \cdot J \;=\; \mu_source \;-\; \mu_puits$$

La contrainte de divergence exprime la conservation des flux : ce qui sort des sources doit arriver aux puits. La géométrie optimale du réseau est alors celle qui respecte cette conservation au coût minimal.

Paramètre	Signification simple	Effet sur la forme
G	Réseau de transport	Architecture des troncs, branches, sous-branches.
m_e	Flux porté par la branche e	Plus m_e est grand, plus la branche est importante.
ℓ_e	Longueur de la branche	Les détours augmentent le coût.
α	Économie d'échelle	Plus α est petit, plus le regroupement des flux est avantageux.
μ_source, μ_puits	Distributions d'origine et de destination	Fixent ce qui doit être transporté et où.

Tableau 5 — Paramètres du transport ramifié.

7. Le nœud de branchement : calcul local des angles

Au voisinage d'un point de branchement P, le coût local peut s'écrire :

$$C(P) \;=\; m_0{}^{\alpha}\, d(P, X_0) \;+\; m_1{}^{\alpha}\, d(P, X_1) \;+\; m_2{}^{\alpha}\, d(P, X_2)$$

La condition d'optimalité est obtenue en annulant le gradient par rapport à P. En posant t_i comme les vecteurs unitaires sortant du nœud, on obtient :

$$m_0{}^{\alpha}\, t_0 \;+\; m_1{}^{\alpha}\, t_1 \;+\; m_2{}^{\alpha}\, t_2 \;=\; 0$$

Les branches s'organisent comme trois forces en équilibre, avec des tensions proportionnelles à m_i^α. Les angles sont donc déterminés par les flux.

$$cos(\theta_{i}) = (m_{2}^{2\alpha} - m_{i}^{2\alpha} - m_{2}^{2\alpha}) / (2\, m_{i}^{\alpha}\, m_{2}^{\alpha})$$

Dans le cas simple d'un tronc de flux 2 qui se divise en deux branches de flux 1 et 1, on a :

$$cos(\theta_{12}) = 2^{2\alpha-1} - 1$$

$$cos(\theta_{01}) = cos(\theta_{02}) = -2^{\alpha-1}$$

Pour α = 1/2, les branches aval s'ouvrent à 90 degrés et chacune fait 135 degrés avec le tronc amont. Lorsque α tend vers 0, on retrouve une géométrie proche des angles de Steiner à 120 degrés. Lorsque α tend vers 1, l'économie d'échelle disparaît et le branchement devient moins favorable.

Valeur de α	Angle entre branches aval θ_{12}	Interprétation
α → 0	120°	Économie d'échelle forte ; géométrie proche de Steiner.
α = 1/2	90°	Compromis clair entre tronc commun et ouverture des branches.
α → 1	0°	Économie d'échelle faible ; le branchement perd son intérêt.

Tableau 6 — Influence de α sur les angles de branchement dans le cas symétrique.

8. Progression géométrique et lien avec Nottale

Si le branchement optimal se répète à plusieurs niveaux, les flux et les longueurs peuvent suivre des progressions géométriques moyennes. Pour un arbre binaire, chaque niveau double le nombre de branches mais divise le flux par deux.

$$m_{n} = m_{0} \cdot 2^{-n}$$

$$\ell_{n} = \ell_{0}\, r^{n}$$

$$C_{n} = C_{0}\, (2^{1-\alpha}\, r)^{n}$$

Le coût par niveau reste contrôlé si les longueurs diminuent assez vite :

$$2^{1-\alpha}\, r < 1,\ donc\ r < 2^{\alpha-1}$$

On retrouve une logique de rapports d'échelle constants. C'est le point de contact avec les modèles de Nottale : dans les arbres de l'évolution, les intervalles temporels entre bifurcations peuvent suivre une progression géométrique ; dans les réseaux de flux, ce sont les longueurs, masses et coûts qui suivent une progression géométrique moyenne.

$$\Delta T_{n} = \Delta T_{0}\, g^{-n}$$

La structure ramifiée spatiale et l'arbre évolutif temporel partagent une même logique d'autosimilarité discrète.

9. L'interface fractale comme enveloppe du branchement

Le réseau ramifié organise le transport interne. Mais ce réseau possède une enveloppe active : l'ensemble des zones terminales, surfaces de contact, frontières de captation et lieux de dissipation. C'est cette enveloppe qui devient l'interface fractale avec l'environnement.

$$\Gamma_opt = \Gamma(G_opt)$$

Ici, G* est le réseau optimal de flux, et Γ(G*) son enveloppe active. Dans un arbre, cette enveloppe est la couronne et le chevelu racinaire. Dans un poumon, elle est la surface alvéolaire. Dans une turbulence, elle est l'enveloppe des filaments de vorticité. Dans une galaxie, elle est la hiérarchie des interfaces entre halo, disque, gaz, nuages et fronts de choc.

$$D_f \;=\; ln(b) \,/\, ln(1/r)$$

Cette formule donne une estimation idéale de la dimension fractale d'une structure autosimilaire : b est le nombre moyen de branches filles et r le rapport moyen des longueurs. Dans la réalité, les structures sont plutôt quasi fractales ou multifractales, car les rapports varient et les contraintes physiques imposent des coupures aux petites et grandes échelles.

> *Formule centrale — La structure fractale de l'interface est l'enveloppe géométrique du processus de ramification arborescente.*

10. Applications : lecture par flux, arborescence et interface

La même grammaire peut être appliquée à des systèmes très différents. Il ne s'agit pas de dire qu'un atome est un arbre, ou qu'une galaxie est un poumon, mais de repérer dans chaque cas ce qui circule, comment le flux se distribue, et où se situe l'interface d'échange.

Arbre végétal — L'arbre combine deux interfaces fractales : la couronne, qui échange avec l'air et la lumière, et le réseau racinaire, qui échange avec le sol. Le tronc et les branches assurent le transport de la sève, tandis que les feuilles et radicelles réalisent l'échange terminal.

Poumon — Le poumon internalise son interface avec l'air. Les bronches et bronchioles ne sont pas seulement des conduits : elles construisent une surface d'échange distribuée, l'ensemble alvéolaire.

Turbulence — La turbulence transforme l'énergie injectée à grande échelle en filaments, tourbillons et feuillets de dissipation à petite échelle. Le branchement est ici une cascade d'échelles plutôt qu'un arbre matériel.

Galaxie — La galaxie capte du gaz, le condense en étoiles, puis réinjecte énergie et matière par les vents, supernovae et rayonnements. Son arborescence est gravitationnelle et gazeuse : filaments cosmiques, bras spiraux, nuages moléculaires, cœurs denses.

Atome — L'atome isolé n'est pas une structure dissipative classique. Mais l'atome ouvert, en interaction avec un champ, possède une structure de flux quantiques : absorption, émission, transitions, relaxation. Le branchement devient spectral plutôt que matériel.

11. Tableau final de synthèse

Le tableau suivant reprend les applications principales en appliquant systématiquement la grille : structure, flux, arborescence, interface et explication.

Structure	Flux	Arborescence / réseau	Interface	Explication
Arbre végétal	Lumière, CO_2, eau, minéraux, sève	Tronc, branches, rameaux, nervures, racines, radicelles	Feuillage et chevelu racinaire	La ramification maximise les surfaces d'échange avec l'air et le sol tout en distribuant la sève.
Poumon	Air, O_2, CO_2	Trachée, bronches, bronchioles, alvéoles	Surface alvéolaire	L'interface avec l'air est internalisée dans un volume limité.
Système vasculaire	Sang, oxygène, nutriments, chaleur, déchets	Artères, artérioles, capillaires, veines	Capillaires au contact des tissus	Le réseau réduit les distances de diffusion et distribue les ressources.
Racines	Eau, sels minéraux, signaux chimiques	Racine principale, secondaires, radicelles, poils absorbants	Chevelu racinaire	Le système explore un sol hétérogène et augmente la surface de captation.
Mycélium	Nutriments, eau, signaux chimiques	Hyphes, filaments, ramifications	Surfaces des hyphes	Le réseau filamenteux explore le substrat et capte les ressources dispersées.
Fleuve	Eau, sédiments, énergie gravitaire	Ruisseaux, affluents, rivière principale, fleuve	Bassin versant, berges, zones de drainage	Le réseau collecte l'eau sur un territoire et l'achemine vers une sortie.
Ville	Personnes, biens, énergie, eau, déchets, information, argent	Routes, rues, réseaux techniques, transports, données	Gares, ports, périphéries, plateformes, réseaux	La ville importe, transforme, dissipe et redistribue des flux sociaux et matériels.
Flamme	Combustible, oxygène, chaleur, gaz brûlés	Langues de flamme, fronts plissés, structures turbulentes	Front entre gaz frais et gaz brûlés	Le front se plisse pour augmenter le contact réactif et la dissipation.
Turbulence	Énergie cinétique, vorticité, enstrophie	Cascade d'échelles, vortex, filaments, feuillets	Enveloppe des zones de forte vorticité	La cascade transfère l'énergie vers les petites échelles où elle se dissipe.
Galaxie	Gaz, étoiles, moment angulaire, rayonnement, métaux	Filaments cosmiques, bras spiraux, nuages, cœurs denses	Halo, disque-halo, fronts de choc, nuages	La galaxie est un attracteur gravito-dissipatif de condensation et rétroaction.
Atome isolé	Flux de probabilité, champ électromagnétique interne	Niveaux quantiques, orbitales, modes propres	Surfaces de densité électronique	Structure stationnaire de modes quantiques plutôt que structure dissipative classique.
Atome ouvert	Photons, excitation, relaxation, décohérence	Réseau des niveaux et transitions	Zone de couplage électromagnétique	Le branchement est spectral : transitions et cascades d'émission.
Réseau neuronal	Signaux électriques, neurotransmetteurs, énergie, information	Axones, dendrites, synapses, réseaux	Synapses et interfaces sensorielles	Les dendrites maximisent la réception ; les axones transmettent à distance.
Organisme vivant	Nutriments, O_2, chaleur, déchets, signaux	Réseaux sanguin, nerveux, lymphatique, digestif, respiratoire	Peau, poumons, intestin, capillaires	Le vivant maintient son non-équilibre par des interfaces internalisées.
Évolution biologique	Flux génétiques, pressions sélectives, innovations	Arbre phylogénétique, bifurcations, lignées	Niches écologiques, interfaces organisme-milieu	L'arborescence est temporelle et généalogique ; chez Nottale, elle peut suivre des lois d'échelle.
Irrigation / agriculture	Eau, nutriments, énergie de pompage	Canaux principaux, secondaires, goutte-à-goutte, racines cultivées	Sol, rhizosphère, surface cultivée	Le réseau distribue une ressource rare en minimisant le coût de transport.

Tableau 7 — Grille comparative : structure, flux, arborescence, interface et explication.

12. Conclusion : vers une physique des processus

Le chemin suivi dans ce chapitre part d'une idée simple : une forme dissipative n'est pas d'abord un objet, mais un régime de flux. Pour comprendre cette forme, il faut donc identifier l'énergie libre disponible, la descente de gradient, les réactions locales, les sources et les interfaces.

La fonctionnelle d'énergie libre effective permet de relier la géométrie à la dynamique. Son terme de gradient produit la diffusion ; son potentiel local produit la réaction. Mais les structures dissipatives exigent davantage : l'activité A(u) et les sources S maintiennent le système loin de l'équilibre et peuvent engendrer des attracteurs non triviaux.

Lorsque les flux doivent être distribués ou captés dans un domaine, la géométrie optimale devient ramifiée. Le transport ramifié explique pourquoi des troncs communs et des branches apparaissent : la concavité du coût m^α favorise le regroupement des flux. Si ce mécanisme se répète à plusieurs échelles, les longueurs, masses et coûts suivent des progressions géométriques, ouvrant un lien naturel avec les lois d'échelle et les arbres de bifurcation de Nottale.

L'interface fractale apparaît alors comme l'enveloppe du réseau de branchement. Elle n'est pas une irrégularité accidentelle ; elle est la géométrie active par laquelle une structure dissipative entre en relation avec son environnement.

$$forme\ dissipative\ =\ attracteur\ de\ flux\ sous\ contraintes$$

$$interface\ fractale\ =\ enveloppe\ active\ du\ réseau\ de\ branchement$$

$$flux\ \rightarrow\ branchement\ \rightarrow\ interface\ \rightarrow\ fractalité\ \rightarrow\ stabilité\ dynamique$$

Phrase finale — Une structure dissipative construit des réseaux ramifiés pour capter, distribuer et dissiper les flux qui la maintiennent hors équilibre ; son interface fractale est la peau développée de cet arbre de flux.