Constante de Planck généralisée, structures dissipatives et équation de Schrödinger d'échelle

Document de travail
Juillet 2026
Table of Contents

1 Introduction

La question qui traverse ce document est simple à formuler, mais profonde par ses conséquences : peut-on associer à une structure organisée une constante d'action propre, analogue à la constante de Planck, mais adaptée à son échelle ?

La constante de Planck réduite, notée , caractérise le monde quantique. Elle mesure une unité élémentaire d'action. Dans la mécanique quantique ordinaire, elle intervient dans l'équation de Schrödinger :

Mais dans la relativité d'échelle de Laurent Nottale, l'idée est plus générale : si l'espace-temps est non différentiable, fractal, alors les trajectoires elles-mêmes deviennent fractales. La dynamique peut alors conduire à des équations de type Schrödinger, non seulement à l'échelle microscopique, mais aussi à des échelles macroscopiques. La constante apparaît alors comme un cas particulier d'une constante d'action d'échelle.

Ce texte suit ce fil : partir de Nottale et Nelson, définir une constante de Planck généralisée pour une structure dissipative, l'appliquer à plusieurs systèmes - électron de l'atome d'hydrogène, tourbillon turbulent, système képlérien, galaxie, filament cosmique, Univers observable - puis montrer comment cette construction peut se raccorder à une équation de réaction-diffusion et à une équation de Schrödinger généralisée.

Le document doit être lu comme une proposition de modélisation. Les calculs numériques sont des ordres de grandeur. Les résultats n'ont pas le statut de constantes physiques établies, mais ils éclairent une hypothèse : une structure organisée pourrait être caractérisée par une action propre, liée à sa masse effective, sa taille et son temps dynamique interne.

2 1. Le point de départ : Nottale, Nelson et la constante d'action généralisée
2.1 1.1. L'hypothèse de Nottale : un espace-temps fractal

La relativité d'échelle propose que l'espace-temps, lorsqu'il est observé à des résolutions de plus en plus fines, ne soit pas nécessairement différentiable. Les géodésiques deviennent alors fractales. La trajectoire n'est plus une courbe lisse, mais un faisceau de chemins possibles, dépendant de l'échelle de résolution.

Dans ce cadre, la non-différentiabilité impose une structure nouvelle au calcul différentiel. Le champ de vitesse se dédouble, puis se combine en une vitesse complexe. Lorsque l'on applique un principe géodésique à cette structure non différentiable, on obtient une équation de type Schrödinger. Ce passage est l'un des résultats caractéristiques de la relativité d'échelle.

La forme générale peut s'écrire :

Ici, est un coefficient de diffusion fractale, de dimension :

Dans le cas quantique ordinaire, on retrouve la relation :

Mais chez Nottale, peut être une constante propre à l'échelle ou au système considéré. On définit alors une constante d'action généralisée :

Dans le monde microscopique :

Mais dans un système macroscopique organisé, peut être très différent de .

2.2 1.2. Le lien avec Nelson

La mécanique stochastique de Nelson part d'une idée voisine, mais formulée autrement. Une particule de masse est décrite comme soumise à un processus brownien dont le coefficient de diffusion vaut :

On retrouve donc :

Si un processus diffusif vérifie :

alors :

Donc :

Cette relation donne une lecture très simple : la constante de Planck est proportionnelle à une masse multipliée par une variance de bruit par unité de temps. C'est cette structure que l'on généralisera ensuite aux structures dissipatives.

3 2. La constante de Planck généralisée d'une structure dissipative

3.1 2.1. Les grandeurs caractéristiques

Considérons une structure dissipative. Par structure dissipative, on entend une forme qui se maintient loin de l'équilibre grâce à des flux : flux de matière, d'énergie, d'impulsion, d'information ou de chaleur. Un tourbillon turbulent, une cellule convective, une galaxie, un filament cosmique, ou même une structure atomique peuvent être considérés comme des organisations dynamiques traversées par des flux.

On introduit les grandeurs suivantes :

Symbole	Signification
	taille caractéristique de la structure
	vitesse caractéristique de traversée, rotation ou circulation des flux
	temps caractéristique de traversée
	dimension effective ou fractale de la structure
	densité moyenne généralisée sur une structure de dimension
	masse effective de la structure

Le temps caractéristique est :

La masse effective est :

Si , est simplement une masse volumique ordinaire. Si est fractal, doit être compris comme une densité généralisée, de dimension .

3.2 2.2. Le coefficient de diffusion fractal

Dans l'esprit de Nelson et Nottale, on cherche un coefficient de diffusion ayant l'unité . À partir de et de , la grandeur naturelle est :

Pour rester cohérent avec la convention brownienne :

on pose :

Alors, si , on retrouve :

Cette convention est importante : elle permet de raccorder directement la construction aux formules de Nelson et de Nottale.

3.3 2.3. La constante d'action généralisée

On définit alors :

En remplaçant par , on obtient :

Donc :

Ou encore :

Avec la masse fractale :

Donc :

ou :

Cette grandeur a bien l'unité d'une action :

Elle peut être lue comme l'action propre de la structure : masse organisée multipliée par diffusion interne, ou encore masse organisée multipliée par longueur et vitesse.

4 3. Cas test : l'électron de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est le cas test décisif, car il permet de vérifier que la formule redonne la constante de Planck réduite.

Dans le modèle de Bohr, la force coulombienne fournit la force centripète :

La vitesse de l'électron sur la première orbite vaut :

La constante d'action de la structure est :

Or, dans l'atome de Bohr :

Donc :

Cette égalité est très importante : la formule générale appliquée à l'électron de l'hydrogène redonne exactement la constante de Planck réduite. Si l'on considère l'action sur un tour complet, on obtient :

La formule correspond donc à une action angulaire, c'est-à-dire à la constante réduite ; l'action sur un cycle complet correspond à .

Le temps caractéristique de traversée est :

Numériquement :

La période orbitale complète vaut :

Sous l’hypothèse d’équilibre réaction-diffusion, le temps de réaction est du même ordre que le temps de diffusion :

Le taux réactionnel correspondant est :

L’énergie associée vaut :

Cette valeur est l’énergie de Hartree. L’énergie de liaison de l’hydrogène vaut la moitié :

Le facteur deux vient de la relation virielle dans le potentiel coulombien.

5 4. Application aux structures dissipatives de différentes échelles

Le tableau suivant rassemble les ordres de grandeur utilisés dans la discussion. La constante d’action réduite généralisée est calculée par :

Le coefficient de diffusion fractal associé est :

Les valeurs astrophysiques sont représentatives. Elles ne définissent pas des constantes universelles ; elles donnent des actions caractéristiques d’échelle.

Tableau 1 - Grandeurs dynamiques de base

Structure	(kg)	(m)	(m/s)	(s)
Électron hydrogène				
Tourbillon métrique				
Soleil-Terre				
Galaxie type Voie lactée				
Filament cosmique				
Univers observable				

Tableau 2 - Diffusion fractale et action généralisée

Structure	(m^2/s)	(J.s)	
Électron hydrogène			
Tourbillon métrique			
Soleil-Terre			
Galaxie type Voie lactée			

Filament cosmique			
Univers observable			

Ce tableau montre une montée vertigineuse de l'action d'échelle. L'électron de l'hydrogène donne . Le tourbillon métrique donne déjà une action environ fois plus grande que . L'Univers observable donne un rapport de l'ordre de .

6 5. Le cas de l'Univers : pourquoi le rapport est remarquable

Pour l'Univers observable, l'action caractéristique est :

Le rapport avec la constante de Planck réduite est :

Prenons une densité moyenne proche de la densité critique :

Si l'on prend comme rayon caractéristique le rayon de Hubble :

la masse contenue dans un volume d'ordre est :

Donc :

Ainsi :

En remplaçant :

Divisons par :

Or la longueur de Planck vérifie :

Donc :

Ainsi :

C'est le résultat essentiel :

Le rapport obtenu est donc du même ordre que le nombre d'aires de Planck contenues dans l'aire d'un horizon cosmologique.

Comme :

on obtient :

Ce nombre apparaît aussi dans le problème de la constante cosmologique et dans l'entropie d'horizon. Ici, il apparaît comme le rapport entre l'action globale de l'Univers observable et le quantum élémentaire d'action.

La conclusion prudente est la suivante : le calcul ne prouve pas une théorie de la constante cosmologique, mais il montre que la formule retrouve un grand nombre cosmologique profond, lié au rapport entre l'aire cosmologique et l'aire de Planck.

7 6. Système képlérien de Nottale comme cas particulier

Dans le système képlérien de Nottale, le coefficient de diffusion fractal est :

La constante d’action généralisée est :

Donc :

Le rayon de Bohr gravitationnel est :

Donc :

En remplaçant :

Donc :

Si l’on pose :

alors :

C’est exactement la forme générale :

Le système képlérien de Nottale est donc un cas particulier de la formule des structures dissipatives, avec :

Structure dissipative générale	Système képlérien de Nottale
	masse test

8 7. Équation de réaction-diffusion : temps de diffusion et temps de réaction

Une structure dissipative peut être décrite, de manière macroscopique, par une équation de réaction-diffusion :

Le terme décrit le transport, l’étalement ou le brassage. Le terme décrit la transformation interne : production, destruction, saturation, auto-amplification ou dissipation.
Le temps de diffusion à l’échelle est :

Avec :

on obtient :

Le terme de réaction peut être caractérisé par un temps propre :

Le rapport entre diffusion et réaction est donné par le nombre de Damköhler :

L’hypothèse d’équilibre dynamique d’une structure stable est :

Donc :

Cette condition signifie que la structure se transforme au même rythme qu'elle est traversée ou diffusée. Si la réaction est trop lente, la structure se dissout. Si elle est trop rapide, elle devient instable, explosive ou fortement non linéaire. Lorsque , transport et transformation sont accordés.

9 8. Sens physique de la non-linéarité du terme de réaction

Le terme de réaction peut être linéaire :

Mais dans une vraie structure dissipative, il est souvent non linéaire. On peut écrire :

Si , la réaction est auto-amplificatrice : plus est grand, plus la réaction augmente rapidement. Ce cas correspond à des mécanismes d'autocatalyse, d'instabilité, d'avalanche, de combustion, de croissance ou de cascade.

Si , la réaction croît de façon sous-linéaire. Cela traduit une limitation, une saturation progressive ou un rendement décroissant.

Une forme plus réaliste associe production et saturation :

Le premier terme amplifie, le second limite. L'amplitude stationnaire non nulle vérifie :

Donc :

Dans la turbulence, un terme cubique apparaît naturellement. Si est la vitesse d'un tourbillon de taille , son temps de retournement est :

Le taux de transfert d'énergie est :

Donc :

La non-linéarité cubique traduit alors la cascade turbulente : plus la vitesse du tourbillon augmente, plus le transfert d'énergie vers les petites échelles devient intense.

10 9. De la réaction-diffusion à l'équation de Schrödinger généralisée

La relation centrale est :

Donc :

L'équation de Schrödinger généralisée s'écrit :

En utilisant , on retrouve la forme de Nottale :

La relation entre et est :

Ou :

La variable réelle est la densité observable : densité de matière, d'énergie, de vorticité, d'activité ou de concentration. La fonction est une amplitude complexe qui contient à la fois l'intensité de la structure et sa phase dynamique.

La phase porte l'organisation du flux. Si :

alors :

Le champ de vitesse peut être lu comme :

Donc :

Comme , on obtient :

Ainsi, la phase de décrit l'organisation directionnelle du flux.

10.1 9.1. Réaction linéaire : potentiel effectif

Si :

alors le terme de réaction peut être lu comme un potentiel effectif. Une relation dimensionnellement naturelle est :

Comme a l'unité , a l'unité d'une énergie.

Si , alors :

Sous l'hypothèse d'équilibre :

Donc :

Le terme réactionnel représente alors une énergie du même ordre que l'énergie dynamique de la structure.

10.2 9.2. Réaction non linéaire : Schrödinger non linéaire

Si le terme de réaction est non linéaire :

alors l'équivalent est une équation de Schrödinger non linéaire généralisée :

Cette forme décrit une structure qui possède à la fois une propagation, une cohérence de phase, une auto-amplification et une saturation.

11 10. Relation entre dimension, taille et temps de réaction

À partir de l'hypothèse d'équilibre :

on a rassemblé plusieurs structures d'échelles très différentes : électron de l'hydrogène, tourbillon métrique, système Soleil-Terre, galaxie, filament cosmique et Univers observable.

Le graphique suivant représente en fonction de en échelle log-log.

Régression log-log de en fonction de

La régression effectuée sur ces six points donne :

Donc :

Le coefficient de détermination est :

La dispersion moyenne des résidus en échelle logarithmique correspond à un facteur multiplicatif

d’environ :

Cette dispersion est importante, mais elle est faible relativement à l’immense plage d’échelles couverte, depuis m jusqu’à m.
La pente proche de suggère :

Une pente correspondrait à un temps de traversée :

avec une vitesse caractéristique variant peu à l’échelle logarithmique. Une loi purement diffusive avec diffusivité constante donnerait plutôt :

Mais dans notre modèle, la diffusivité effective croît avec l’échelle :

Donc :

Le résultat est donc cohérent avec une logique de transport ou de flux, plutôt qu’avec une diffusion à coefficient constant.
12 11. Sens physique de la loi
La loi obtenue peut se lire comme une loi de temps propre des structures. Chaque structure possède une taille , une vitesse interne , un temps de traversée et, si elle est stable, un temps de réaction du même ordre.
Dans ce cadre :

signifie que la structure se maintient parce que ce qui la transforme agit au même rythme que ce qui la traverse.
La loi :

est une loi d’échelle dynamique. En physique statistique, on rencontre souvent des lois de la forme :

où est une longueur de corrélation et un exposant dynamique. Dans les systèmes critiques, les grands domaines mettent plus longtemps à se réorganiser que les petits. Dans la turbulence, le temps de retournement d’un tourbillon est :

Dans les processus de transport, le temps de réalisation d’un phénomène est donc naturellement lié à la taille du système.
Votre résultat s’inscrit dans cette famille : il suggère qu’une structure dissipative possède un temps propre de réalisation, qui croît avec son extension spatiale.
13 12. Synthèse générale
Le raisonnement peut se résumer en une chaîne simple.
D’abord, Nottale et Nelson donnent la relation fondamentale :

Ensuite, pour une structure dissipative de taille , traversée par un flux de vitesse , on définit :

Donc :

Si la masse effective est fractale :

alors :

Cette formule redonne pour l'électron de l'atome d'hydrogène. Elle redonne la formule képlérienne de Nottale pour un système gravitationnel. Elle donne des actions d'échelle macroscopiques pour les tourbillons, galaxies, filaments et l'Univers observable.
Pour l'Univers, le rapport est de l'ordre de :

ce qui correspond, à des facteurs numériques près, à :

C'est le nombre d'aires de Planck contenues dans une aire cosmologique.
Enfin, l'équation de réaction-diffusion :

peut être mise en correspondance formelle avec une équation de Schrödinger généralisée si l'on pose :

La diffusion devient le terme cinétique. La réaction devient un potentiel effectif ou une non-linéarité. La constante devient la constante de Planck généralisée de la structure.
La conclusion philosophique est forte : une structure dissipative peut être vue comme une forme qui possède son action propre, son temps propre, sa masse effective et sa phase. Dans cette perspective, l'équation de Schrödinger n'est plus seulement l'équation du monde microscopique ; elle devient le langage mathématique d'une organisation dynamique à une échelle donnée.

14 Références indicatives

- Edward Nelson, "Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics", *Physical Review*, 1966. Référence fondatrice de la mécanique stochastique et de la relation .
- Edward Nelson, *Quantum Fluctuations*, Princeton University Press, 1985.
- Laurent Nottale, *Scale Relativity and Fractal Space-Time*, Imperial College Press, 2011.
- Laurent Nottale, "Scale Relativity and Fractal Space-Time", article de synthèse, 2009.
- Marie-Noëlle Célérier et Laurent Nottale, "Generalized macroscopic Schrödinger equation in scale relativity", 2005.
- Erwin Madelung, "Quantentheorie in hydrodynamischer Form", 1926.
- Richard Feynman et Mark Kac, travaux sur le lien entre diffusion, potentiel et opérateur de Schrödinger.
- Cross et Hohenberg, "Pattern formation outside of equilibrium", *Reviews of Modern Physics*, 1993.
- Aranson et Kramer, "The world of the complex Ginzburg-Landau equation", *Reviews of Modern Physics*, 2002.
- Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters", 2018.
- NIST CODATA, constantes physiques : rayon de Bohr, constante de structure fine, constante de Planck.