Histoire des fonctions spéciales et problème aux valeurs propres

Quand les formes du réel obligent les mathématiques à inventer de nouvelles fonctions

Document de travail

22 juin 2026

Introduction - Les fonctions spéciales comme mémoire des formes physiques

Les fonctions spéciales ne sont pas seulement des curiosités mathématiques. Elles sont souvent nées d'une question très concrète : comment une forme peut-elle exister dans un domaine donné, sous une loi donnée, avec des conditions aux limites données ?

Cette question est exactement celle du problème aux valeurs propres. On définit un système physique, un domaine Ω, une frontière $\partial\Omega$, des variables d'état $q(x, t)$, une loi d'évolution et des conditions initiales ou aux limites. Puis on demande : quelles formes ce système peut-il naturellement produire ?

Dans sa forme la plus simple, le problème s'écrit :

$$A\phi = \lambda\phi$$

avec des conditions aux limites :

$$B(\phi, \nabla\phi) = 0 sur \partial\Omega.$$

La fonction ϕ est un mode propre. La valeur λ est une valeur propre. Physiquement, cela signifie que la forme ϕ est transformée par l'opérateur A sans changer de nature : elle est seulement amplifiée, amortie, mise en oscillation ou rendue stationnaire.

C'est là qu'apparaissent les fonctions spéciales. Chaque fois qu'un opérateur rencontre une géométrie particulière, une frontière particulière ou un potentiel particulier, les solutions élémentaires classiques ne suffisent plus. Les sinus apparaissent pour les cordes et les intervalles. Les Bessel apparaissent pour les disques et les cylindres. Les Legendre et les harmoniques sphériques apparaissent pour les sphères. Les Hermite et les Laguerre apparaissent dans les problèmes quantiques de confinement. Les hypergéométriques apparaissent comme une forme générale lorsque le problème possède plusieurs points singuliers ou plusieurs frontières structurelles.

On peut donc dire :

Les fonctions spéciales sont les formes propres historiques des grands opérateurs de la physique.

Elles sont la mémoire analytique des problèmes que la nature a posés aux mathématiciens : chaleur, vibration, gravitation, électromagnétisme, mécanique céleste, optique, mécanique quantique.

1. Le problème aux valeurs propres comme matrice des fonctions spéciales

Un problème physique commence rarement par une fonction spéciale. Il commence par une situation : une corde tendue, une membrane circulaire, une sphère conductrice, un atome, une cavité, une onde, une barre chauffée, un fluide ou un champ.

Le physicien identifie d'abord le domaine Ω, puis la frontière $\partial\Omega$, puis les variables d'état. Ensuite il écrit la loi. Lorsqu'il cherche les formes naturelles du système, il sépare souvent le temps et l'espace. Il arrive alors à une équation spectrale :

$$A\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

La fonction ϕ_n donne la forme spatiale. La valeur propre λ_n donne le destin temporel de cette forme. Dans une équation de diffusion, une valeur propre négative donne un amortissement. Dans une équation d'onde, elle conduit à une fréquence propre. Dans une équation quantique, elle devient une énergie. Dans un problème d'instabilité, une valeur propre positive devient le germe d'une forme émergente.

La frontière joue un rôle décisif. Une onde libre dans l'espace peut se propager avec une infinité continue de longueurs d'onde. Mais une corde fixée aux deux extrémités, une membrane circulaire ou une cavité sphérique ne peuvent accepter que certaines formes. La frontière sélectionne. Elle transforme un espace continu de possibles en spectre discret de formes admissibles.

On peut résumer :

$$opérateur + géométrie + conditions\ aux\ limites \rightarrow modes\ propres.$$

Et lorsque les modes propres ne sont pas des fonctions élémentaires, ils deviennent des fonctions spéciales.

2. Le premier grand archétype : sinus, cosinus et cordes vibrantes

Les fonctions trigonométriques sont si familières qu'on oublie leur statut profond. Elles sont les fonctions propres élémentaires de l'oscillation, de la rotation et de la propagation.

Pour un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

les solutions sont :

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Pour une corde fixée sur l'intervalle $[0, L)$, les modes spatiaux satisfont :

$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0,$$

avec :

$$\phi(0) = \phi(L) = 0.$$

Les solutions admissibles sont :

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La condition de frontière impose :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Le sinus est donc une forme propre sélectionnée par la frontière. C'est la forme que la corde accepte naturellement.

Le XVIIIe siècle, avec d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange, voit se développer la controverse des cordes vibrantes : peut-on représenter une forme initiale quelconque comme somme de modes trigonométriques ? Cette question ouvre la voie à Fourier. Elle annonce une idée majeure : **comprendre une forme complexe, c'est la décomposer en formes simples.**

3. Fourier : la chaleur comme naissance moderne de la décomposition modale

Fourier donne à cette intuition sa puissance moderne. Dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, publiée en 1822, il montre que la conduction thermique peut être étudiée à l'aide de séries trigonométriques. L'idée est révolutionnaire : une distribution de température arbitraire peut être décomposée en une somme de modes simples.

Pour l'équation de la chaleur dans une barre :

$$\partial_t T = D\partial_{xx} T,$$

avec des conditions nulles aux extrémités, on écrit :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) e^{-D(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Chaque mode est amorti selon sa valeur propre :

$$\lambda_n = -D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Les modes de grande fréquence spatiale, c'est-à-dire les détails fins, disparaissent plus vite. Les grandes structures persistent davantage. La chaleur ne fait donc pas seulement évoluer une température ; elle trie les formes selon leur échelle.

Fourier introduit une manière nouvelle de comprendre les phénomènes : l'évolution d'une forme peut être lue comme l'évolution des amplitudes de ses modes.

4. Legendre et la sphère : les modes angulaires du potentiel

À la fin du XVIIIe siècle, les problèmes de gravitation, d'électrostatique et de mécanique céleste conduisent à l'étude des potentiels autour de corps sphériques. Les fonctions de Legendre apparaissent dans ce contexte, autour des années 1780, dans le sillage de Laplace et Legendre.

Le problème typique est l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0.$$

En coordonnées sphériques, la séparation des variables conduit à une équation angulaire. Pour les situations à symétrie axiale, on obtient les polynômes de Legendre :

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\right) + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0.$$

Ici, $x = cos\theta$. La valeur propre est :

$$\lambda_\ell = \ell(\ell + 1).$$

Les polynômes de Legendre sont donc les formes propres angulaires de la sphère lorsque le problème possède une symétrie de rotation autour d'un axe.

Lorsque la dépendance en azimut est ajoutée, les fonctions associées de Legendre et les harmoniques sphériques apparaissent :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

Elles sont les modes naturels sur la sphère. Elles décrivent les multipôles gravitationnels, les champs électrostatiques, les orbitales atomiques, le rayonnement et aujourd'hui encore les données sur la sphère, comme les cartes du fond diffus cosmologique.

La phrase essentielle est :

Les fonctions de Legendre et les harmoniques sphériques sont les sinus et cosinus de la sphère.

5. Bessel : les sinus du disque et du cylindre

Les fonctions de Bessel apparaissent lorsque la géométrie devient cylindrique ou circulaire. On les rencontre dans les vibrations d'une membrane circulaire, la chaleur dans un disque, les ondes dans un tube, l'optique, l'électromagnétisme, les fibres et les problèmes radiaux bidimensionnels.

Des formes proches apparaissent dès le XVIIIe siècle chez Bernoulli, Euler, Lagrange ou Laplace. Friedrich Wilhelm Bessel les étudie systématiquement au début du XIXe siècle, notamment dans ses travaux astronomiques. Son nom reste attaché à cette famille de fonctions.

Le problème typique est le Laplacien en coordonnées cylindriques. Pour une fonction radiale, on obtient une équation du type :

$$r^2R'' + rR' + \left(k^2r^2 - m^2\right)R = 0.$$

En posant $z = kr$, on obtient l'équation de Bessel :

$$z^2y'' + zy' + \left(z^2 - m^2\right)y = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de Bessel :

$$J_m(z), Y_m(z).$$

Dans une membrane circulaire, les conditions au bord imposent par exemple :

$$J_m(kR) = 0.$$

Les valeurs propres sont alors déterminées par les zéros des fonctions de Bessel.

Cela est fondamental : la valeur propre n'est plus simplement un entier ou une fréquence régulière ; elle devient un zéro d'une fonction spéciale. La frontière circulaire oblige la nature à parler le langage de Bessel.

On peut dire :

Les fonctions de Bessel sont les modes propres de la circularité.

6. Les fonctions elliptiques : quand l'oscillation cesse d'être simple

Les fonctions elliptiques naissent d'une autre difficulté : certains problèmes physiques donnent des intégrales impossibles à ramener aux fonctions élémentaires. Le pendule réel en est un exemple classique.

Pour de petites oscillations, le pendule est approximé par :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

On retrouve sinus et cosinus. Mais pour de grandes amplitudes, l'équation exacte est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} sin\theta = 0.$$

La période dépend de l'amplitude et s'exprime au moyen d'intégrales elliptiques. Legendre les systématise à la fin du XVIIIe et au début du XIXe siècle. Abel et Jacobi, dans les années 1820, transforment profondément la théorie en introduisant les fonctions elliptiques, liées à l'inversion des intégrales elliptiques.

Le sens physique est clair : quand l'oscillation linéaire devient non linéaire, les sinus ne suffisent plus. La forme temporelle du mouvement exige une fonction plus riche.

Les fonctions elliptiques sont les formes analytiques de l'oscillation non linéaire.

7. Sturm-Liouville : la grande formalisation des modes propres

Au XIXe siècle, Charles-François Sturm et Joseph Liouville donnent une forme générale à une vaste classe de problèmes aux valeurs propres. Autour de 1836-1837, ils étudient des équations différentielles du second ordre de la forme :

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda w(x)y.$$

avec des conditions aux limites. Cette formulation est capitale parce qu'elle donne un cadre général aux fonctions propres orthogonales.

Dans un problème de Sturm-Liouville, les modes propres vérifient souvent des propriétés très utiles : valeurs propres réelles, orthogonalité des modes, développement d'une fonction arbitraire sur une base de fonctions propres.

Cela donne un fondement mathématique à l'intuition de Fourier : une forme peut être décomposée sur les formes naturelles d'un opérateur.

Dans votre langage, Sturm-Liouville formalise la phrase :

$$(\Omega, \partial\Omega, A) \rightarrow \{\phi_n, \lambda_n\}.$$

C'est une étape décisive dans l'histoire des fonctions spéciales, car beaucoup d'entre elles sont des fonctions propres d'opérateurs de type Sturm-Liouville.

8. Hermite : le confinement harmonique et la gaussienne

Les polynômes de Hermite apparaissent au XIXe siècle, notamment dans les travaux de Charles Hermite. Ils deviendront essentiels en physique au XXe siècle avec l'oscillateur harmonique quantique.

Le problème physique est celui d'une particule dans un potentiel quadratique :

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

L'équation de Schrödinger stationnaire est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi.$$

Ses solutions sont de la forme :

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

Les H_n sont les polynômes de Hermite. Ils apparaissent parce que la fonction d'onde doit être à la fois oscillante près du centre, décroissante à l'infini et normalisable.

Le problème aux valeurs propres impose une quantification :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, les Hermite ne sont pas seulement des polynômes. Ils sont les formes propres du confinement harmonique.

9. Laguerre : le potentiel coulombien et l'atome d'hydrogène

Les polynômes de Laguerre, introduits au XIXe siècle par Edmond Laguerre, deviennent centraux en mécanique quantique avec l'atome d'hydrogène.

Le problème physique est la particule dans un potentiel coulombien :

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

L'équation de Schrödinger stationnaire est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(r)\psi = E\psi.$$

En coordonnées sphériques, on sépare :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi).$$

La partie angulaire donne les harmoniques sphériques. La partie radiale conduit, après changement de variable, à des fonctions hypergéométriques confluentes. Lorsque les conditions physiques de régularité et de normalisation sont imposées, la série se termine et donne des polynômes de Laguerre associés.

On obtient ainsi une chaîne remarquable :

$$Schrödinger\ radial \rightarrow hypergéométrique\ confluente \rightarrow Laguerre \rightarrow niveaux\ d'énergie.$$

La quantification de l'énergie vient du fait que seules certaines formes sont admissibles entre l'origine et l'infini.

Les Laguerre sont les formes propres radiales du problème coulombien quantifié.

10. Hypergéométriques : la grande famille de raccordement

La fonction hypergéométrique de Gauss est systématisée par Gauss dans un mémoire de 1812. Elle joue un rôle exceptionnel parce qu'elle contient, comme cas particuliers ou limites, beaucoup d'autres fonctions spéciales.

L'équation hypergéométrique classique est :

$$z(1 - z)y'' + [c - (a + b + 1)z)y' - aby = 0.$$

Ses solutions s'écrivent habituellement sous la notation hypergéométrique de Gauss : 2F1(a,b;c;z).

Cette équation possède trois points singuliers réguliers :

$$z = 0, z = 1, z = \infty.$$

C'est ce qui lui donne son importance physique. Beaucoup de problèmes séparés en coordonnées adaptées produisent une équation différentielle du second ordre avec plusieurs points singuliers : une origine, une frontière, un infini, un horizon, un point de retournement, une singularité de potentiel.

La fonction hypergéométrique sert alors de fonction de raccordement : elle relie les comportements locaux autour de plusieurs régions critiques du système.

La version confluente apparaît quand deux singularités se rejoignent. Elle vérifie l'équation de Kummer :

$$zy'' + (b - z)y' - ay = 0.$$

Elle intervient notamment dans l'atome d'hydrogène et dans de nombreux potentiels exactement solubles.

Dans une physique des processus, on peut dire :

Les fonctions hypergéométriques sont les grandes fonctions de raccordement de la physique mathématique : elles relient l'origine, la frontière et l'infini dans une même forme admissible.

11. Tableau chronologique commenté

Période / date	Fonctions ou cadre	Problèmes associés	Commentaire physique
Antiquité - XVIIe siècle	Sinus, cosinus	cercle, astronomie, oscillations, rotations	Premières formes de périodicité et de mouvement cyclique.
XVIIIe siècle	Cordes vibrantes	d'Alembert, Euler, Bernoulli, Lagrange	Naissance de l'idée qu'une forme initiale peut être décomposée en modes.
Vers 1780	Legendre / fonctions dites parfois de Laplace	potentiel, gravitation, sphère	Les champs autour d'une sphère exigent des modes angulaires.
1812	Hypergéométrique de Gauss	EDO du second ordre, singularités régulières	La famille-mère de nombreuses fonctions spéciales est systématisée.
1822	Fourier	chaleur, séries trigonométriques	La forme thermique devient somme de modes amortis.
Début XIXe siècle, notamment 1820s	Bessel	membranes, cylindres, astronomie, ondes	La géométrie circulaire impose des fonctions radiales nouvelles.
1820s	Fonctions elliptiques, Abel et Jacobi	pendule non linéaire, intégrales elliptiques	L'oscillation non linéaire dépasse les sinus.
1836-1837	Sturm-Liouville	opérateurs du second ordre, conditions aux limites	Formalisation générale du problème aux valeurs propres.
Milieu-fin XIXe siècle	Hermite, Laguerre, familles orthogonales	probabilités, EDO, puis physique quantique	Ces polynômes deviendront les modes propres de potentiels quantiques.
1926	Schrödinger	atome, oscillateur, valeurs propres d'énergie	Les fonctions spéciales deviennent les

Période / date	Fonctions ou cadre	Problèmes associés	Commentaire physique
			formes propres de la matière quantique.
XXe-XXIe siècles	Tables, calcul numérique, DLMF	physique mathématique, ingénierie, simulation	Les fonctions spéciales deviennent un langage commun entre analyse, calcul et modélisation.

Ce tableau montre une progression : les fonctions spéciales émergent lorsque les problèmes physiques deviennent plus structurés. À chaque nouvelle géométrie, à chaque nouveau potentiel, à chaque nouvelle frontière, une famille de fonctions apparaît ou se précise.

12. Tableau des fonctions, problèmes et opérateurs

Fonction spéciale	Problème aux valeurs propres typique	Opérateur / géométrie	Sens physique
Sinus, cosinus	corde, onde, chaleur sur intervalle	dérivée seconde sur $[0, L)$	modes élémentaires de l'oscillation et de la diffusion.
Fourier	chaleur, signaux, vibrations	décomposition sur modes trigonométriques	lecture d'une forme comme somme de fréquences ou d'échelles.
Legendre	potentiel sphérique axial	Laplacien sphérique	modes angulaires de la sphère.
Harmoniques sphériques	champs autour d'une sphère, orbitales	Laplacien sur la sphère	modes propres complets de la surface sphérique.
Bessel	disque, cylindre, membrane circulaire	Laplacien radial cylindrique	modes naturels de la circularité.
Elliptiques	pendule réel, trajectoires non linéaires	intégrales non élémentaires	passage de l'oscillation idéale à l'oscillation réelle.
Hermite	oscillateur harmonique quantique	Schrödinger avec potentiel quadratique	modes du confinement harmonique.

Fonction spéciale	Problème aux valeurs propres typique	Opérateur / géométrie	Sens physique
Laguerre	atome d'hydrogène	Schrödinger radial coulombien	modes radiaux quantifiés.
Hypergéométriques	EDO du second ordre avec singularités	opérateurs avec plusieurs points critiques	fonctions générales de raccordement entre frontières et régimes.

Le tableau permet de voir le principe commun : la fonction spéciale n'est pas choisie librement. Elle est imposée par le triplet : opérateur, géométrie, frontière.

13. Tableau de lecture par géométrie

Géométrie ou contrainte	Fonction naturelle	Pourquoi ?
Intervalle	sinus, cosinus	La frontière fixe impose des noeuds et quantifie les longueurs d'onde.
Cercle / cylindre	Bessel	Le Laplacien radial introduit un terme en $1/r$ qui modifie les sinus.
Sphère	Legendre, harmoniques sphériques	Les angles sphériques imposent une structure multipolaire.
Potentiel quadratique	Hermite	La gaussienne de confinement se combine à des polynômes.
Potentiel coulombien	Laguerre, hypergéométriques confluentes	L'origine et l'infini imposent régularité et normalisation.
Plusieurs singularités régulières	hypergéométriques	La solution doit raccorder plusieurs comportements locaux.
Non-linéarité oscillante	fonctions elliptiques	La période dépend de l'amplitude et ne se réduit plus aux sinus.

Ce tableau est très utile pour votre physique des processus : il montre que la forme propre dépend de la manière dont la loi rencontre la frontière. La géométrie n'est pas un décor. Elle est un opérateur de sélection.

14. De la fonction spéciale à la variable d'ordre

Dans les systèmes complexes, il n'est pas toujours possible de conserver toutes les fonctions propres. Mais on peut chercher les modes dominants. Si l'on écrit :

$$q(x,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x),$$

alors les amplitudes $a_n(t)$ deviennent les grandeurs importantes. Souvent, près d'un seuil, un seul mode domine. Son amplitude peut être notée :

$$X(t) = a_1(t).$$

Cette amplitude devient une variable d'ordre.

Si le mode ϕ_1 est associé à la valeur propre la plus grande, ou plus précisément à la partie réelle la plus grande, alors il est celui qui structure le plus fortement le devenir du système. Dans un problème dissipatif, c'est le mode qui disparaît le plus lentement. Dans un problème instable, c'est le mode qui croît le plus vite. Dans un problème de bifurcation, c'est le mode critique.

On peut alors écrire une équation réduite :

$$\dot{X} = \mu X - \beta X^3.$$

Cette équation ne décrit plus tous les détails du champ $q(x,t)$. Elle décrit l'évolution de la forme dominante. Elle donne une compréhension.

La fonction spéciale, dans cette lecture, n'est pas seulement une solution analytique. Elle est la forme spatiale du mode. La variable d'ordre en est l'amplitude temporelle.

Ainsi :

$$fonction\ spéciale = forme\ propre,$$

et :

$$variable\ d'ordre = amplitude\ du\ mode\ dominant.$$

15. Conclusion - Les fonctions spéciales comme archétypes analytiques

L'histoire des fonctions spéciales est donc une histoire très concrète. Elle raconte comment les mathématiques ont répondu à des problèmes de forme.

Une corde impose des sinus. Une barre chauffée impose des séries de Fourier. Une sphère impose Legendre et les harmoniques sphériques. Un cylindre impose Bessel. Un pendule

réel impose les fonctions elliptiques. Un oscillateur quantique impose Hermite. Un atome impose Laguerre et les hypergéométriques confluentes. Un opérateur général du second ordre avec plusieurs singularités impose les hypergéométriques.

Chaque fois, la même structure apparaît :

$$loi + géométrie + frontière \rightarrow fonction\ propre.$$

La fonction spéciale est donc une forme de mémoire. Elle garde la trace d'un problème physique devenu calculable.

On peut conclure par cette phrase :

Les fonctions spéciales sont les fossiles vivants de la physique mathématique : chacune garde la mémoire d'un problème de forme, de frontière et de transformation que les mathématiciens et les physiciens ont appris à résoudre.

Elles ne sont pas des accidents du calcul. Elles sont les archétypes analytiques des formes que les systèmes peuvent naturellement devenir.

Bibliographie indicative

- NIST Digital Library of Mathematical Functions, chapitres sur les fonctions de Bessel, Legendre, hypergéométriques, polynômes orthogonaux et intégrales elliptiques.
- Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822.
- Carl Friedrich Gauss, mémoire de 1812 sur la série hypergéométrique.
- Charles-François Sturm et Joseph Liouville, travaux de 1836-1837 sur les problèmes aux valeurs propres.
- Stephen Wolfram, "The History and Future of Special Functions", synthèse historique sur l'émergence des fonctions spéciales.
- George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999.
- E. T. Whittaker et G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1902 et éditions ultérieures.
- M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 1964.