Du signal local d'une structure dissipative aux visages de la volatilité

Spectre, ondelettes et équation stochastique d'une variable d'ordre

Introduction générale

Une structure dissipative n'est pas une forme immobile. Elle est une forme qui tient parce qu'elle est traversée par des flux. Elle reçoit, transporte, transforme, dissipe et réorganise de la matière, de l'énergie ou de l'information. Un arbre, un poumon, une flamme, une turbulence, une cellule, un réseau biologique ou une ville ne sont pas seulement des objets : ce sont des régimes dynamiques maintenus loin de l'équilibre.

Si l'on place un capteur en un point A d'une telle structure, on ne voit plus directement l'architecture spatiale complète. On observe un signal temporel :

$$S(t) = u(A, t).$$

Ce signal local est pourtant une fenêtre sur l'organisation profonde du système. Il porte les traces des fronts, des branches, des retards, des cascades, des oscillations, des intermittences et des relaxations. La question centrale devient alors : comment lire, dans la forme temporelle d'un signal, l'architecture multi-échelle de la structure dissipative qui l'a produit ?

Le fil directeur de ce document est le suivant :

$$structure\ dissipative \rightarrow signal\ local \rightarrow spectre \rightarrow ondelettes \rightarrow équation\ stochastique \rightarrow volatilité.$$

La volatilité apparaîtra comme le concept-pont. Mathématiquement, elle mesure la variance locale des fluctuations. Physiquement, elle représente l'intensité actuelle de l'activité multi-échelle de la structure. Philosophiquement, elle peut être comprise comme la mémoire du désordre traversant, sculpté par la forme.

1. Le signal local comme projection d'une structure dissipative

1.1 La structure dissipative comme champ dynamique

On peut représenter une structure dissipative par un champ $u(x, t)$, défini sur un domaine spatial Ω. Ce champ peut désigner une température, une concentration chimique, une vitesse, une vorticité, une densité, une activité locale ou toute autre grandeur d'état.

Un modèle très général est donné par une équation de type énergie libre avec activité et sources :

$$\partial_t u = -M\frac{\delta F}{\delta u} + A(u) + S_{ext} + \xi.$$

Dans cette équation, la descente de gradient $-M\delta F/\delta u$ tend à ramener le système vers un état plus stable ou plus homogène ; le terme $A(u)$ représente l'activité locale, les réactions, les amplifications ou les rétroactions ; S_{ext} représente les flux imposés par l'ouverture du système ; et ξ représente les fluctuations.

Une autre écriture, plus proche de la diffusion-réaction, est :

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u) + S_{ext} + \xi.$$

Le terme $D\Delta u$ lisse les différences locales. Le terme $f(u)$ produit des transformations internes. La structure dissipative apparaît lorsque ces termes ne conduisent pas à une homogénéisation simple, mais à une forme maintenue, traversée par des flux.

1.2 Observation en un point

Au point A, on observe :

$$S(t) = u(A, t).$$

Ce signal est une réduction très forte du système : il ne donne pas toute la carte spatiale. Mais il conserve une mémoire temporelle de ce qui traverse le point d'observation. Il peut enregistrer le passage d'un front, d'une branche de flux, d'un filament turbulent, d'une onde, d'une fluctuation locale ou d'une cascade de petites structures.

Le signal local est donc une projection temporelle de l'architecture spatiale :

$$S(t) = \Pi_A[u(x, t)).$$

Ici, Π_A désigne l'opération d'observation au point A. Cette notation rappelle que le signal n'est pas un objet isolé : il est l'ombre temporelle d'une structure spatiale dynamique.

2. Une écriture événementielle du signal

2.1 La somme de formes élémentaires

Un signal issu d'une structure dissipative peut souvent être décrit comme la superposition d'événements localisés :

$$S(t) = \sum_n a_n \phi\left(\frac{t-t_n}{\tau_n}\right).$$

Cette formule est fondamentale. Elle signifie que le signal est composé d'une série d'événements élémentaires de forme ϕ, d'amplitude a_n, de date d'apparition t_n et de durée caractéristique τ_n.

Terme	Signification mathématique	Sens physique
$S(t)$	signal observé	variable mesurée au point A
ϕ	forme élémentaire	signature temporelle d'un événement dissipatif
a_n	amplitude	intensité de l'événement
t_n	position temporelle	instant de passage ou d'activation
τ_n	durée	échelle temporelle de l'événement

La fonction ϕ n'est pas seulement un outil mathématique. Dans cette interprétation, elle représente la réponse temporelle élémentaire de la structure : une impulsion, un front, une oscillation amortie, une relaxation ou un pic intermittent.

2.2 Sens physique de ϕ

La forme ϕ dépend de la dynamique interne du système. Si la diffusion domine, l'événement sera lisse, étalé, amorti. Si la réaction domine, il pourra prendre la forme d'une transition rapide, d'un front ou d'un seuil. Si la turbulence domine, il pourra être bref, intense, asymétrique et intermittent.

On peut relier ϕ à la fonction de Green de l'opérateur dynamique. Si l'on linéarise l'équation autour d'un état de référence u_0, en écrivant :

$$u(x,t) = u_0 + \eta(x,t),$$

on obtient souvent :

$$\partial_t \eta = L\eta + source.$$

La réponse à une excitation impulsionnelle est donnée par la fonction de Green G. Au point A, la forme élémentaire peut donc être interprétée comme :

$$\phi(t) \sim G_A(t).$$

Ainsi, ϕ contient déjà une information sur l'opérateur dynamique de la structure dissipative.

2.3 Hypothèse d'échelle amplitude-durée

Dans une structure multi-échelle, les amplitudes ne sont pas forcément indépendantes des durées. On peut poser :

$$a(\tau) \sim \tau^{\gamma}.$$

Cette hypothèse signifie que l'intensité moyenne d'un événement dépend de sa durée selon une loi d'échelle. Si $\gamma > 0$, les événements longs sont en moyenne plus amples. Si $\gamma < 0$, les événements courts sont plus intenses. Si $\gamma = 0$, l'amplitude est indépendante de la durée.

Cette relation peut être justifiée si l'amplitude dépend d'une échelle spatiale ℓ par :

$$a(\ell) \sim \ell^{h},$$

et si la durée associée vérifie :

$$\tau \sim \ell^{z}.$$

Alors :

$$\ell \sim \tau^{1/z},$$

et donc :

$$a(\tau) \sim \tau^{h/z}.$$

On obtient :

$$\gamma = \frac{h}{z}.$$

L'exposant γ relie donc la géométrie spatiale, les temps caractéristiques et l'intensité des événements.

3. Analyse spectrale du signal

3.1 Transformée de Fourier d'un événement dilaté

Partons de :

$$S(t) = \sum_{n} a_n \phi\left(\frac{t-t_n}{\tau_n}\right).$$

La transformée de Fourier d'un événement dilaté et translaté est :

$$F[\phi\left(\frac{t-t_n}{\tau_n}\right)](f) = \tau_n e^{-i2\pi f t_n} \phi\hat{}\left(f\tau_n\right).$$

La transformée du signal total vaut donc :

$$S\hat{}(f) = \sum_n a_n \tau_n e^{-i2\pi f t_n} \phi\hat{}\left(f\tau_n\right).$$

Cette formule montre que le spectre dépend de trois éléments : la forme élémentaire ϕ, la distribution des durées τ_n et la distribution des amplitudes a_n.

3.2 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance est :

$$P(f) = |S\hat{}(f))^2.$$

Si les phases $e^{-i2\pi f t_n}$ sont suffisamment décorrélées, les termes croisés s'annulent en moyenne. On obtient alors l'approximation :

$$P(f) \approx \sum_n a_n^2 \tau_n^2 |\phi\hat{}\left(f\tau_n\right))^2.$$

Cette formule a un sens très clair : le spectre total est la somme des spectres des événements élémentaires, chacun replacé à son échelle de temps.

3.3 Passage à une distribution continue de durées

Si les événements sont nombreux, on remplace la somme par une intégrale :

$$P(f) \approx \int P_\tau(\tau) a(\tau)^2 \tau^2 |\phi\hat{}(f\tau))^2 d\tau.$$

Ici, $P_\tau(\tau)$ est la densité des durées. Si la structure est autosimilaire, on peut supposer :

$$P_\tau(\tau) \sim \tau^{-\mu}$$

et :

$$a(\tau) \sim \tau^\gamma.$$

Alors :

$$P(f) \approx \int \tau^{-\mu} \tau^{2\gamma} \tau^2 |\phi\hat{}(f\tau))^2 d\tau.$$

Donc :

$$P(f) \approx \int \tau^{2\gamma+2-\mu} |\phi\hat{}(f\tau))^2 d\tau.$$

En posant $x = f\tau$, on a $\tau = x/f$ et $d\tau = dx/f$. Il vient :

$$P(f) \sim f^{-(2\gamma+3-\mu)} \int x^{2\gamma+2-\mu} |\phi\hat{}(x))^2 dx.$$

Si l'intégrale converge, alors :

$$P(f) \sim f^{-\beta},$$

avec :

$$\beta = 2\gamma + 3 - \mu.$$

Cette relation n'est pas une loi universelle ; elle dépend des hypothèses de décorrélation, de convergence et de forme des événements. Mais elle montre le mécanisme essentiel : une distribution d'échelles temporelles et d'amplitudes peut produire un spectre en loi de puissance.

3.4 Interprétation spectrale

Forme du spectre	Interprétation mathématique	Sens physique
Spectre plat	$P(f)$ presque constant	bruit blanc, absence de mémoire
Pic dominant	fréquence privilégiée	oscillation, cycle ou mode propre
Plusieurs pics	plusieurs fréquences actives	modes internes multiples
Loi $1/f^{\beta}$	invariance d'échelle	mémoire longue, cascade, autosimilarité
Cassure de pente	changement de régime	seuil, transition, échelle dissipative
Spectre intermittent	énergie localisée	événements rares et intenses

Le spectre est donc une lecture globale de la complexité temporelle du signal. Il ne dit pas précisément quand les événements se produisent, mais il révèle comment l'énergie est répartie entre les échelles.

4. Analyse par ondelettes

4.1 Pourquoi les ondelettes ?

La transformée de Fourier décompose le signal en fréquences, mais perd l'information temporelle locale. Or une structure dissipative produit souvent des événements localisés : fronts, ruptures, pics, bouffées d'activité. Les ondelettes permettent de conserver à la fois le temps et l'échelle.

La transformée continue en ondelettes est :

$$W_S(a,b) = \int S(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

Terme	Signification
ψ	ondelette mère
a	échelle temporelle d'analyse
b	position temporelle
$W_S(a,b)$	coefficient d'ondelette
$\lvert W_S(a,b)\rvert^2$	énergie locale temps-échelle

L'ondelette est une loupe mobile. Elle mesure la ressemblance du signal avec une forme élémentaire à l'échelle a, autour du temps b.

4.2 Différence entre ϕ et ψ

Il faut distinguer deux fonctions.

Fonction	Statut	Rôle
ϕ	physique	forme réelle d'un événement dissipatif
ψ	analytique	forme utilisée pour analyser le signal

Dans le cas idéal, on choisit une ondelette ψ proche de la forme physique ϕ. Si les événements sont impulsionnels, on choisira une ondelette localisée. S'ils sont oscillants, une ondelette oscillante. S'ils sont des fronts, une ondelette adaptée aux ruptures.

4.3 Ondelette et énergie locale

Le carré du coefficient :

$$\lvert W_S(a,b)\rvert^2$$

mesure l'énergie locale du signal à l'échelle a et au temps b. On peut donc définir une volatilité résolue en échelle :

$$h^2(a,b) \sim \lvert W_S(a,b)\rvert^2.$$

Et une volatilité locale intégrée sur les échelles :

$$h^2(b) \sim \int_{a_{min}}^{a_{max}} |W_S(a,b))^2 \frac{da}{a}.$$

Le facteur da/a est naturel dans un monde autosimilaire, car les échelles sont multiplicatives : passer de a à $2a$ est comparable à passer de $2a$ à $4a$.

4.4 Autosimilarité et ondelettes

Si le signal vérifie statistiquement :

$$S(\lambda t) \sim \lambda^H S(t),$$

alors les coefficients d'ondelettes suivent une loi d'échelle. Avec la normalisation usuelle en $1/\sqrt{a}$, on a typiquement :

$$E[|W_S(a,b))^2) \sim a^{2H+1}.$$

La pente d'un graphe log-log de l'énergie ondelette permet donc d'estimer l'exposant de rugosité H.

Valeur de H	Type de signal	Sens physique
$H < 1/2$	anti-persistant	alternance rapide, retour fréquent
$H = 1/2$	brownien	fluctuation sans mémoire longue
$H > 1/2$	persistant	mémoire, tendance, corrélation longue
H variable	multifractal	intermittence, hétérogénéité d'échelle

4.5 Singularités et intermittence

Autour d'un temps singulier t_0, on peut écrire :

$$|S(t) - S(t_0)) \sim |t - t_0)^{h(t_0)}.$$

L'exposant $h(t_0)$ est l'exposant de Hölder local. Les ondelettes permettent de l'estimer par :

$$|W_S(a, t_0)) \sim a^{h(t_0)+1/2}.$$

Un petit $h(t_0)$ indique une forte irrégularité. Un grand $h(t_0)$ indique une zone plus régulière. Si le signal possède une distribution d'exposants locaux, il est multifractal.

On peut alors définir une fonction de partition :

$$Z(q,a) = \sum_b |W_S(a,b))^q.$$

Si :

$$Z(q,a) \sim a^{\tau(q)},$$

alors $\tau(q)$ renseigne sur la multifractalité. Une fonction $\tau(q)$ linéaire indique un comportement monofractal. Une fonction courbée indique une multifractalité, souvent liée à l'intermittence.

4.6 Tableau de lecture par ondelettes

Signature dans le scalogramme	Lecture mathématique	Sens dans une structure dissipative
Énergie forte à petite échelle	coefficients localisés	pics, micro-événements, intermittence
Énergie forte à grande échelle	coefficients étalés	tendance lente, mémoire longue
Alignement vertical	singularité multi-échelle	front, choc, rupture
Alignement horizontal	fréquence persistante	oscillation ou mode propre
Arborescence temps-échelle	cascade	réseau de flux multi-échelle
Texture diffuse	bruit étendu	agitation non structurée

5. Le signal comme variable d'ordre : équation stochastique effective

5.1 Forme générale

Le signal $S(t)$ peut être considéré comme une variable d'ordre locale. Il résume l'état du système au point A. On peut lui associer une équation stochastique effective :

$$dS_t = -V'(S_t)dt + h_t dW_t^{(1)} + \sigma dW_t^{(2)}.$$

Cette équation réunit trois dimensions du processus.

Terme	Sens mathématique	Sens physique
$-V'(S_t)dt$	dérive déterministe	attraction vers des états préférés
$h_t dW_t^{(1)}$	bruit à intensité variable	cascade, mémoire, intermittence
$\sigma dW_t^{(2)}$	bruit blanc constant	agitation de fond

5.2 Le potentiel $V(S)$

Le potentiel effectif $V(S)$ décrit le paysage des états possibles. Si :

$$V(S) = \frac{k}{2}S^2,$$

alors :

$$-V'(S) = -kS.$$

Le système est rappelé vers $S = 0$, comme dans une relaxation linéaire. Si V possède plusieurs minima, le signal peut basculer entre plusieurs états métastables. Dans une structure dissipative, V ne doit pas être compris comme une énergie libre thermodynamique stricte dans tous les cas, mais comme un potentiel effectif qui résume les tendances de rappel de la variable d'ordre.

5.3 Justification mathématique de la volatilité

Considérons d'abord :

$$dS_t = b_t dt + h_t dW_t.$$

Sur un petit intervalle Δt, on a :

$$\Delta S_t \approx b_t \Delta t + h_t \Delta W_t.$$

Or :

$$E[(\Delta W_t)^2) = \Delta t.$$

Si le terme de dérive est négligeable à très courte échelle devant le bruit, alors :

$$E[(\Delta S_t)^2) \approx h_t^2 \Delta t.$$

Donc :

$$h_t^2 \approx \frac{E[(\Delta S_t)^2)}{\Delta t}.$$

La volatilité est donc la variance locale du signal par unité de temps.

Avec deux bruits indépendants :

$$dS_t = -V'(S_t)dt + h_t dW_t^{(1)} + \sigma dW_t^{(2)},$$

on obtient :

$$E[(dS_t)^2) = (h_t^2 + \sigma^2)dt.$$

La variance instantanée totale est donc :

$$v_t = h_t^2 + \sigma^2.$$

Cette relation justifie la séparation entre bruit de fond et volatilité structurée.

6. Les différents visages de la volatilité

6.1 Volatilité comme variance locale

La première définition est statistique :

$$h_t^2 \approx \frac{E[(\Delta S_t)^2)}{\Delta t}.$$

Elle répond à la question : quelle est l'intensité locale des fluctuations ? Dans une structure dissipative, cette intensité est faible dans les phases calmes et forte lors des cascades, ruptures ou épisodes intermittents.

6.2 Volatilité d'échelle et autosimilarité

Si le signal est autosimilaire :

$$S(\lambda t) \sim \lambda^H S(t),$$

alors les incréments vérifient :

$$E[(\Delta_\tau S)^2) \sim \tau^{2H}.$$

La volatilité à l'échelle τ est :

$$h_\tau^2 \sim \frac{E[(\Delta_\tau S)^2)}{\tau}.$$

Donc :

$$h_\tau^2 \sim \tau^{2H-1},$$

et :

$$h_\tau \sim \tau^{H-1/2}.$$

Cette formule montre que le brownien classique est le cas particulier $H = 1/2$, où la volatilité ne dépend pas de l'échelle. Dès que $H \neq 1/2$, la volatilité devient une grandeur multi-échelle.

6.3 Volatilité comme mémoire

La volatilité peut également dépendre des fluctuations passées :

$$h_t^2 = h_0^2 + \int_0^t K(t - s) d[S]_s.$$

La variation quadratique $[S)_t$ mesure l'activité fluctuante cumulée. Pour une diffusion, on a :

$$d[S)_t = h_t^2 dt.$$

La formule de mémoire dit donc que la volatilité actuelle est une moyenne pondérée des fluctuations passées.

Si :

$$K(u) = e^{-u/\theta},$$

la mémoire est courte. Si :

$$K(u) \sim u^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1,$$

la mémoire est longue. Une telle mémoire en loi de puissance peut être comprise comme la limite d'une somme de nombreux temps de relaxation :

$$K(u) = \sum_n c_n e^{-u/\tau_n}.$$

Lorsque les temps τ_n sont distribués sur une hiérarchie d'échelles, cette somme peut approcher une loi de puissance.

6.4 Volatilité par ondelettes

L'analyse en ondelettes donne une volatilité locale dans le plan temps-échelle :

$$h^2(a, b) \sim |W_S(a, b))^2.$$

Et une volatilité locale totale :

$$h^2(b) \sim \int_{a_{min}}^{a_{max}} |W_S(a, b))^2 \frac{da}{a}.$$

Cette formulation est particulièrement utile, car elle transforme la volatilité en carte lisible. Le signal n'est plus seulement fort ou faible : il est fort ou faible à telle échelle et à tel moment.

6.5 Volatilité et spectre

Le spectre en loi de puissance :

$$P(f) \sim f^{-\beta}$$

est la manifestation globale d'une volatilité multi-échelle. Les grandes échelles correspondent aux basses fréquences, les petites échelles aux hautes fréquences. Pour certains processus, on relie β et H par :

$$\beta = 2H + 1$$

pour un mouvement brownien fractionnaire, ou :

$$\beta = 2H - 1$$

pour un bruit fractionnaire gaussien. Le point important est que β mesure la façon dont l'énergie fluctuante se distribue entre les échelles.

7. Tableau de synthèse des visages de la volatilité

Vue de la volatilité	Formule	Justification mathématique	Sens physique
Variance locale	$h_t^2 \approx E[(\Delta S)^2)/\Delta t$	variance par unité de temps	intensité instantanée des fluctuations
Échelle autosimilaire	$h_\tau \sim \tau^{H-1/2}$	loi d'échelle des incréments	volatilité dépendante de la loupe temporelle
Mémoire	$h_t^2 = h_0^2 + \int K(t-s)$	convolution des fluctuations passées	trace de l'histoire du système
Mémoire longue	$K(u) \sim u^{-\alpha}$	limite de relaxations hiérarchiques	persistance multi-échelle
Ondelette	$h^2(a,b) \sim \lvert W_S(a,b)\rvert^2$	énergie locale temps-échelle	carte locale de l'activité dissipative
Spectre	$P(f) \sim f^{-\beta}$	répartition fréquentielle de l'énergie	cascade, mémoire longue, autosimilarité
Équation stochastique	$dS = -V'(S)dt + h_t a$	diffusion à variance variable	forme + bruit + mémoire

8. Sens physique global

La volatilité est souvent comprise comme une notion statistique. Dans le cadre des structures dissipatives, elle prend un sens beaucoup plus profond. Elle devient le lieu où la structure inscrit sa mémoire dans le signal.

Le bruit de fond σdW représente un désordre immédiat, local, peu structuré. La volatilité $h_t dW$, au contraire, représente un désordre modulé par la forme, l'histoire, les flux et les échelles. Elle est le bruit rendu historique par la structure.

On peut résumer ainsi :

$$\sigma dW = désordre\ local,$$

$$h_t dW = désordre\ organisé\ par\ l'histoire\ multi - échelle.$$

Le potentiel $V(S)$ donne la forme. Le bruit blanc donne l'incertitude élémentaire. La volatilité donne la mémoire active du processus.

9. Conclusion générale

À partir du signal local $S(t)$, on peut développer trois lectures complémentaires.

La première est spectrale. Elle montre comment l'énergie du signal se répartit entre les fréquences. Un spectre en loi de puissance indique une organisation multi-échelle et une mémoire longue.

La deuxième est ondulatoire. Les ondelettes révèlent où et à quelle échelle les événements se produisent. Elles transforment le signal en paysage temps-échelle et permettent de voir les fronts, les ruptures, les intermittences et les cascades.

La troisième est dynamique. L'équation stochastique de variable d'ordre écrit le signal comme le résultat d'un rappel vers une forme, d'un bruit de fond et d'une volatilité structurée. Cette volatilité peut être reliée aux incréments autosimilaires, à la mémoire du système, aux ondelettes et au spectre.

La chaîne complète devient :

$$structure\ dissipative \rightarrow signal\ local \rightarrow événements\ multi - échelles \rightarrow spectre\ et\ ondelettes \rightarrow vola$$

La formule la plus synthétique est :

$$Mathématiquement,\ la\ volatilité\ est\ une\ variance\ locale\ ;\ physiquement,\ elle\ est\ la\ mémoire\ active$$

Et la formulation la plus profonde pourrait être :

$$Dans\ une\ structure\ dissipative,\ la\ volatilité\ est\ le\ désordre\ rendu\ historique\ par\ la\ forme.$$