Des réseaux réels aux systèmes de Lotka–Volterra généralisés

Électricité, télécommunications, réseaux sociaux et systèmes biologiques : dérivations, hypothèses et portée d'un langage dynamique commun

Table of Contents

1 Introduction — Chercher une grammaire commune derrière des réseaux très différents

Un réseau électrique, un réseau de télécommunications, une communauté biologique et un système social semblent, au premier regard, appartenir à des mondes sans rapport. Le premier transporte de la puissance et doit préserver la synchronisation de machines tournantes. Le second partage une capacité limitée entre des flux concurrents. Le troisième met en interaction des espèces, des souches, des cellules ou des molécules. Le quatrième fait évoluer des opinions, des comportements ou des stratégies au sein d'une population.

Pourtant, ces systèmes ont une structure commune : ils comportent un grand nombre de variables positives ou d'amplitudes, chacune possède une dynamique propre, et cette dynamique est modifiée par les autres variables à travers un réseau d'interactions. Lorsqu'on choisit les bonnes variables collectives et que l'on se place au bon niveau d'approximation, plusieurs de ces systèmes peuvent être ramenés à une famille d'équations de la forme

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), i = 1, \dots, n,$$

ou, avec une convention de signe adaptée,

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right).$$

C'est la forme de **Lotka–Volterra généralisée**, notée GLV. Les variables x_i ne doivent pas nécessairement représenter des espèces. Elles peuvent être des abondances biologiques, des parts de stratégies, des débits, ou encore les énergies de modes propres d'un réseau physique.

L'objectif de ce document n'est donc pas d'affirmer que tous les réseaux « sont » des Lotka–Volterra. Il est plus précis : montrer que, sous des hypothèses clairement identifiées, **le GLV peut apparaître comme forme réduite commune de dynamiques de réseau**, soit exactement, soit après changement de variables, soit après projection modale et fermeture asymptotique.

Cette distinction est essentielle. Nous rencontrerons quatre situations différentes :

1. le GLV est le modèle naturel de départ, comme en écologie ;
2. le GLV est exactement équivalent à une autre dynamique, comme l'équation réplicatrice ;
3. le GLV apparaît directement après une hypothèse de coût linéarisé et d'adaptation multiplicative, comme pour certains modèles de congestion télécom ;
4. le GLV apparaît comme **équation d'amplitude** après développement non linéaire et projection sur les modes propres, comme pour un réseau électrique proche de la synchronisation.

Le fil directeur sera donc

$$réseau\ réel \rightarrow variables\ adaptées \rightarrow interaction\ quadratique\ ou\ bilinéaire \rightarrow GLV$$

puis, dans un second temps,

$$A = S + K \rightarrow dissipation\ et\ réciprocité + circulation\ et\ non - réciprocité$$

ce qui prépare l'étude de la stabilité, des oscillations, des bifurcations et, lorsque la dimension devient grande, de la limite continue du réseau.

2 1. Le système de Lotka–Volterra généralisé comme forme normale de réseau

2.1 1.1. Forme générale

On considère

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i + \sum_j a_{ij}x_j\right).$$

Le terme r_i représente la tendance intrinsèque de la variable x_i en l'absence des autres composantes. La matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ représente l'effet de x_j sur le taux de croissance relatif de x_i.

Une propriété importante est que l'équation porte sur le **taux de croissance relatif** :

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = r_i + \sum_j a_{ij}x_j.$$

C'est précisément ce qui rend la structure GLV naturelle dans de nombreux domaines. Dès qu'une grandeur positive s'ajuste proportionnellement à sa valeur actuelle, tandis que son taux d'ajustement dépend approximativement de façon affine des autres grandeurs, on retrouve cette forme.

2.2 1.2. Équilibre intérieur

Un équilibre positif x^* satisfait

$$r + Ax^* = 0$$

pour la convention $\dot{x}_i = x_i\left(r_i + \sum_j a_{ij}x_j\right)$, soit

$$x^* = -A^{-1}r,$$

lorsque A est inversible et que toutes les composantes de x^* sont positives.

Avec la convention compétitive

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i - \sum_j A_{ij}x_j\right),$$

on obtient

$$Ax^* = r, x^* = A^{-1}r.$$

Le Jacobien à l'équilibre intérieur est alors

$$J^* = -D_{x^*}A, D_{x^*} = diag\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right).$$

Cette relation jouera un rôle central dans l'étude de la stabilité.

2.3 1.3. Décomposition symétrique et antisymétrique

Toute matrice réelle A se décompose de manière unique en

$$A = S + K,$$

avec

$$S = \frac{A+A^T}{2}, K = \frac{A-A^T}{2},$$

et

$$S^T = S, K^T = -K.$$

La partie symétrique mesure les interactions réciproques. La partie antisymétrique mesure la non-réciprocité. Comme

$$z^T Kz = 0$$

pour tout vecteur réel z, la partie antisymétrique ne contribue pas directement à une forme quadratique énergétique. Elle produit plutôt une circulation ou une rotation dans l'espace des états. Cette interprétation, déjà très naturelle en mécanique, prendra des significations spécifiques selon les réseaux étudiés.

3 2. Réseau électrique — des équations de swing au Lotka–Volterra des énergies modales

Le réseau électrique est le cas où la réduction vers un GLV demande le plus de travail. Les variables physiques initiales ne sont pas des populations, mais des angles électriques, des vitesses et des puissances. Le passage vers LV se fait par une succession de réductions : dynamique électromécanique, modèle de Kuramoto inertiel, développement autour de la synchronisation, décomposition modale, puis équations d'amplitude.

3.1 2.1. Équations de swing

Pour un ensemble de générateurs synchrones ou de nœuds agrégés, une forme classique de l'équation de swing est

$$M_i \ddot{\theta}_i + D_i \dot{\theta}_i = P_i - \sum_j B_{ij} sin\left(\theta_i - \theta_j\right).$$

Ici :

- θ_i est l'angle électrique du nœud i ;
- M_i représente l'inertie effective ;
- D_i l'amortissement ;
- P_i le déséquilibre injection–consommation ;
- B_{ij} mesure la force du couplage électrique entre les nœuds.

Cette équation appartient à la famille des oscillateurs couplés de type Kuramoto avec inertie. Le lien entre réseaux de puissance et modèles de Kuramoto est bien établi, à condition de conserver les hypothèses de réseau AC simplifié et de couplage principalement sinusoïdal.

3.2 2.2. Limite sur-amortie et forme de Kuramoto

Lorsque l'inertie peut être négligée à l'échelle considérée, ou après élimination d'une variable rapide, on obtient schématiquement

$$D_i \dot{\theta}_i = P_i - \sum_j B_{ij} sin\left(\theta_i - \theta_j\right).$$

En définissant

$$\omega_i = \frac{P_i}{D_i}, K_{ij} = \frac{B_{ij}}{D_i},$$

on retrouve

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_j K_{ij} sin\left(\theta_j - \theta_i\right).$$

Le réseau électrique est donc ramené à un réseau d'oscillateurs de phase couplés.

3.3 2.3. Développement près de la synchronisation

Lorsque les différences de phase sont petites,

$$\theta_j - \theta_i \ll 1,$$

on développe

$$sinz = z - \frac{z^3}{6} + O\left(z^5\right).$$

En notation matricielle, avec une matrice d'incidence B et une matrice diagonale de poids de lignes W, la dynamique peut s'écrire sous une forme proche de

$$\dot{\theta} = - BWsin\left(B^T\theta\right).$$

Le développement cubique donne

$$\dot{\theta} = - L\theta + \frac{1}{6}BW\left(B^T\theta\right)^{\circ 3} + O\left(\|\ \theta\|^5\right),$$

avec

$$L = BWB^T,$$

le Laplacien pondéré du réseau électrique.

Le terme linéaire décrit les modes de relaxation du réseau ; le terme cubique est le premier terme non linéaire capable de coupler ces modes.

3.4 2.4. Décomposition sur les modes propres

Soient v_p les vecteurs propres du Laplacien :

$$Lv_p = \lambda_p v_p.$$

On développe la perturbation de phase sous la forme

$$\theta(t) = \sum_p a_p(t)v_p.$$

Après projection sur le mode p, on obtient une équation d'amplitude générale :

$$\dot{a}_p = - \lambda_p a_p + \frac{1}{6}\sum_{qrs} C_{pqrs}a_q a_r a_s + \cdots,$$

avec des coefficients de couplage C_{pqrs} déterminés par la topologie du réseau, les poids des lignes et les vecteurs propres.

À ce stade, le système n'est pas encore un LV. Il s'agit d'un système cubique d'amplitudes modales.

3.5 2.5. Hypothèse de fermeture modale

Près d'un régime où les phases modales sont suffisamment séparées, une moyenne temporelle ou une approximation de résonance permet de ne conserver que les termes qui modifient lentement l'amplitude du mode p. Les termes dominants prennent alors la forme

$$\dot{a}_p = a_p\left(-\lambda_p + \alpha_p a_p^2 + \sum_{q\neq p} \beta_{pq} a_q^2\right).$$

Cette étape constitue l'hypothèse principale de la réduction. Elle suppose notamment :

- des amplitudes relativement faibles ;
- une dynamique proche d'un régime modal ;
- l'élimination des termes rapidement oscillants ;
- une fermeture au troisième ordre.

3.6 2.6. Les énergies modales deviennent les variables LV

Introduisons

$$x_p = a_p^2.$$

Alors

$$\dot{x}_p = 2a_p\dot{a}_p.$$

En substituant l'équation d'amplitude :

$$\dot{x}_p = x_p\left(-2\lambda_p + 2\alpha_p x_p + 2\sum_{q\neq p} \beta_{pq} x_q\right).$$

Nous obtenons exactement une forme GLV :

$$\dot{x}_p = x_p\left(r_p + \sum_q A_{pq} x_q\right)$$

avec

$$r_p = -2\lambda_p,$$

et des coefficients A_{pq} issus des interactions cubiques entre modes.

La signification physique est très importante : **les "espèces" du GLV ne sont pas les nœuds électriques ; ce sont les énergies des modes propres du réseau**.

La chaîne de réduction est donc

$$réseau\ électrique \rightarrow swing/Kuramoto \rightarrow Laplacien \rightarrow modes\ propres \rightarrow amplitudes \rightarrow x_p = a_p^2 \rightarrow GLV$$

3.7 2.7. Ce qui est exact et ce qui ne l'est pas

Le passage swing → Kuramoto repose sur des hypothèses physiques connues. La décomposition sur les modes propres du Laplacien est exacte pour la partie linéaire. En revanche, le passage du système cubique complet vers le GLV des énergies modales est une **réduction asymptotique**, valable dans un domaine de faibles amplitudes et sous une hypothèse de fermeture modale.

Le résultat ne signifie donc pas qu'un réseau électrique quelconque est exactement un Lotka–Volterra. Il signifie que, près de la synchronisation et sur les échelles lentes des amplitudes modales, un GLV peut constituer une forme réduite pertinente.

4 3. Réseaux de télécommunications — concurrence des flux et congestion

Le cas des télécommunications est presque inverse : le passage vers GLV peut être très direct si l'on choisit comme variables les débits de flux ou de routes et si leur adaptation est multiplicative.

4.1 3.1. Variables de flux et matrice route–lien

Considérons n flux de débit $x_i(t) > 0$ partageant m liens. On définit la matrice route–lien

$$H_{\ell i} = \{1,\ si\ le\ fluxiutilise\ le\ lien\ell,\ 0,\ sinon.\ )$$

La charge du lien ℓ est

$$y_\ell = \sum_i H_{\ell i} x_i.$$

4.2 3.2. Coût de congestion

Supposons qu'autour d'un régime de fonctionnement le coût de congestion du lien puisse être linéarisé :

$$c_\ell\left(y_\ell\right) \simeq c_\ell^0 + b_\ell y_\ell, b_\ell > 0.$$

Le coût subi par la route i est la somme des coûts des liens traversés :

$$C_i = \sum_\ell H_{\ell i} c_\ell\left(y_\ell\right).$$

En substituant y_ℓ :

$$C_i = C_i^0 + \sum_j \left(\sum_\ell H_{\ell i} b_\ell H_{\ell j} \right) x_j.$$

Si

$$B = diag\left(b_1, \ldots, b_m\right),$$

alors la matrice de congestion s'écrit

$$S = H^T B H.$$

Cette matrice est symétrique positive semi-définie.

4.3 3.3. Adaptation multiplicative des débits

Supposons maintenant que le débit s'ajuste proportionnellement au débit courant, selon un gain intrinsèque g_i diminué par le coût de congestion :

$$\dot{x}_i = x_i\left(g_i - C_i\right).$$

Après absorption de la constante C_i^0 dans le taux propre,

$$r_i = g_i - C_i^0,$$

on obtient

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i - \sum_j S_{ij} x_j\right).$$

C'est exactement un GLV compétitif.

Ici, contrairement au cas électrique, aucune transformation modale n'est nécessaire : **les flux eux-mêmes jouent le rôle des variables LV**.

4.4 3.4. Exemple à trois flux

Prenons deux liens et trois routes :

$$H = (1\,1\,0\,0\,1\,1).$$

Le flux 1 partage le premier lien avec le flux 2 ; le flux 3 partage le second lien avec le flux 2.

Avec

$$B = \left(b_1\,0\,0\,b_2\right),$$

on obtient

$$S = H^T B H = \left(b_1\; b_1\; 0\; b_1\; b_1 + b_2\; b_2\; 0\; b_2\; b_2\right).$$

La structure du GLV reflète donc exactement la topologie physique du partage des liens.

4.5 3.5. Apparition d'une partie antisymétrique

Un réseau réel peut être non réciproque : politiques de priorité, différences de RTT, routage dynamique, mécanismes de contrôle distincts, files d'attente asymétriques. Une approximation simple consiste à écrire

$$A = S + K,$$

avec

$$S^T = S, K^T = -K.$$

S représente alors la concurrence réciproque produite par le partage de capacité ; K représente les asymétries de contrôle et de rétroaction.

La structure obtenue est directement compatible avec l'analyse de stabilité développée pour le GLV : partie symétrique dissipative, partie antisymétrique rotationnelle.

4.6 3.6. Limites de la réduction

Ce modèle suppose :

- une description fluide des paquets ;
- des coûts de congestion suffisamment réguliers ;
- une linéarisation autour d'un régime de fonctionnement ;
- une adaptation multiplicative des débits ;
- des délais suffisamment faibles pour être absorbés dans une dynamique instantanée.

Lorsque les délais deviennent importants, le modèle naturel devient un GLV retardé :

$$\dot{x_i}(t) = x_i(t)[r_i - \sum_j A_{ij} x_j(t - \tau_{ij})).$$

Le retard peut alors lui-même provoquer des oscillations et des bifurcations de Hopf.

5 4. Réseaux sociaux — de la dynamique réplicatrice au Lotka–Volterra

Dans un réseau social, les variables individuelles sont trop nombreuses pour être décrites directement par un GLV. La réduction devient pertinente lorsque l'on considère des **fractions de population** adoptant différentes opinions, stratégies ou comportements.

5.1 4.1. Variables de stratégie

Soient

$$p_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$$

les proportions d'une population utilisant la stratégie i.

On suppose qu'un gain moyen ou une attractivité est donné par

$$f_i(p) = (Ap)_i.$$

Le gain moyen de la population est

$$f' = p^T Ap.$$

La dynamique réplicatrice s'écrit

$$\dot{p}_i = p_i[(Ap)_i - p^T Ap).$$

Une stratégie dont le gain est supérieur à la moyenne augmente sa part relative.

5.2 4.2. Pourquoi cette dynamique est naturelle socialement

La dynamique réplicatrice peut représenter, au niveau agrégé :

- l'imitation de stratégies efficaces ;
- l'adoption de normes ;
- la diffusion relative d'opinions ;
- la compétition entre technologies ou comportements ;
- l'apprentissage social.

Elle ne décrit pas la psychologie individuelle. Elle suppose que les mécanismes microscopiques peuvent être ramenés à une évolution des fréquences de stratégies.

5.3 4.3. Transformation projective vers Lotka–Volterra

Choisissons la stratégie n comme référence et définissons

$$x_i = \frac{p_i}{p_n}, i = 1, \ldots, n - 1.$$

Comme

$$p_n = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j},$$

et

$$p_i = \frac{x_i}{1 + \sum_j x_j},$$

on peut calculer

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \frac{\dot{p}_i}{p_i} - \frac{\dot{p}_n}{p_n}.$$

Avec l'équation réplicatrice, le terme de gain moyen $p^T Ap$ se simplifie :

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = (Ap)_i - (Ap)_n.$$

Après substitution des p_j en fonction des x_j et, si nécessaire, changement de l'échelle de temps pour éliminer le dénominateur commun, on obtient une équation de la forme

$$\frac{dx_i}{d\tau} = x_i\left(r_i + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}x_j\right).$$

C'est un système Lotka–Volterra de dimension $n - 1$.

L'équivalence entre dynamique réplicatrice et LV est donc structurelle : le simplex des fréquences est transformé en orthant positif par une projection de coordonnées.

5.4 4.4. La partie antisymétrique comme circulation stratégique

Décomposons

$$A = S + K.$$

La partie symétrique représente des avantages ou désavantages réciproques. La partie antisymétrique représente des interactions cycliques.

Un exemple canonique est la matrice

$$K = (0\,1\ -1\ -1\,0\,1\,1\ -1\,0),$$

associée à une structure pierre–feuille–ciseaux. Elle produit une circulation autour de l'état intérieur du simplex.

Le vocabulaire construit pour le GLV devient alors très parlant :

$$S \leftrightarrow réciprocité\ et\ potentiel,$$

$$K \leftrightarrow circulation\ des\ stratégies.$$

5.5 4.5. Passage du réseau individuel aux variables collectives

Il faut toutefois distinguer deux niveaux. Un réseau social réel est un graphe d'individus ; l'équation réplicatrice décrit des fréquences globales ou locales. Pour justifier la réduction, il faut supposer soit un mélange suffisamment homogène, soit une fermeture de champ moyen, soit une agrégation en communautés.

La chaîne conceptuelle est donc

$$graphe\ social\ individuel \rightarrow fréquences\ de\ stratégies \rightarrow réplicateur \leftrightarrow GLV.$$

La flèche vers le réplicateur est une réduction statistique ; l'équivalence réplicateur–LV, elle, est mathématique.

6 5. Réseaux biologiques — le cas où Lotka–Volterra est souvent déjà naturel

6.1 5.1. Écologie et communautés microbiennes

En écologie, le GLV est l'une des formes les plus directes de description d'un réseau d'interactions entre espèces :

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i + \sum_j a_{ij}x_j\right).$$

x_i est l'abondance de l'espèce ou du taxon i, r_i son taux intrinsèque, et a_{ij} l'effet de l'espèce j sur le taux de croissance de i.

Les signes permettent de représenter, au moins qualitativement :

- compétition ;
- facilitation ;
- mutualisme ;
- prédation ou exploitation asymétrique.

Le réseau biologique est alors directement la matrice A.

Les modèles gLV sont notamment utilisés pour les communautés microbiennes, où ils servent à relier des séries temporelles d'abondance à un réseau d'interactions pairwise. Leur validité est cependant limitée lorsque les médiateurs, ressources cachées ou interactions d'ordre supérieur deviennent dominants.

6.2 5.2. Origine de la structure multiplicative

La forme

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x)$$

est naturelle pour une population car le nombre d'événements de naissance, mort ou interaction est proportionnel au nombre d'individus présents. Si le taux net par individu est développé au premier ordre :

$$f_i(x) \simeq r_i + \sum_j a_{ij}x_j,$$

on obtient immédiatement le GLV.

Autrement dit, le GLV peut être vu comme la **troncature affine du taux de croissance relatif**.

6.3 5.3. Réseaux biochimiques, gènes et protéines

Pour un réseau de gènes ou de protéines, on part plus généralement de

$$\dot{x}_i = F_i\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

Autour d'un état ou dans certaines représentations multiplicatives, on peut écrire

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = G_i(x).$$

Si G_i est développé au premier ordre :

$$G_i(x) \simeq r_i + \sum_j a_{ij} x_j,$$

alors

$$\dot{x_i} = x_i\left(r_i + \sum_j a_{ij} x_j\right).$$

Cette approximation n'est pas toujours légitime. Les réseaux biochimiques comportent souvent des saturations de Michaelis–Menten, des coopérativités de Hill, des lois de conservation ou des interactions d'ordre supérieur. Néanmoins, il existe un cadre mathématique plus général de systèmes **quasi-polynomiaux** ou **generalized Lotka–Volterra**, dans lequel de nombreux systèmes non linéaires peuvent être recodés par transformations de monômes et augmentation de dimension.

6.4 5.4. Interprétation de S et K en biologie

Pour un réseau écologique :

$$S = \frac{A+A^T}{2}$$

mesure la composante réciproque des interactions. Une compétition mutuelle contribue essentiellement à S.

La partie

$$K = \frac{A-A^T}{2}$$

mesure l'asymétrie. Les chaînes proie–prédateur, hôte–parasite ou certaines exploitations directionnelles contiennent naturellement une forte composante non réciproque.

Ainsi, le langage « dissipation / circulation » n'est pas qu'une analogie : il devient une manière de distinguer interactions réciproques et cycles d'exploitation.

7 6. Comparaison des quatre dérivations

Les quatre domaines n'atteignent pas le GLV de la même manière. C'est précisément ce qui rend la comparaison instructive.

Domaine	Variables initiales	Variables LV	Nature du passage	Hypothèse centrale
Réseau électrique	phases, vitesses, puissances	énergies modales $x_p = a_p^2$	réduction modale	proximité de la synchronisation + fermeture cubique
Télécommunications	débits de flux/routes	débits x_i	quasi-direct	adaptation multiplicative + congestion linéarisée

Domaine	Variables initiales	Variables LV	Nature du passage	Hypothèse centrale
Réseaux sociaux	fréquences de stratégies	rapports de fréquences	équivalence après transformation	dynamique réplicatrice / champ moyen
Écologie	abondances	abondances	direct	interactions pairwise affines
Réseaux biochimiques	concentrations	variables transformées	approximation ou recodage	développement local / structure quasi-polynomiale

Ce tableau met en évidence une idée importante : **le GLV n'est pas lié à une substance particulière mais à une structure de croissance relative couplée**.

8 7. Une dérivation abstraite commune

On peut résumer les cas précédents par une structure plus générale. Supposons que des variables positives x_i vérifient

$$\dot{x}_i = x_i G_i(x).$$

Si, sur le domaine étudié,

$$G_i(x) \simeq r_i + \sum_j a_{ij} x_j,$$

alors

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_j a_{ij} x_j \right).$$

Le GLV apparaît donc comme **développement de premier ordre du taux relatif** autour d'un régime donné.

Dans le réseau électrique, les variables positives x_i ne sont obtenues qu'après passage aux énergies modales. Dans les télécoms, elles sont les débits. Dans le monde social, elles deviennent des rapports de fréquences. En biologie, elles sont souvent directement les abondances.

C'est cette liberté de choix des variables qui fait du GLV un langage transversal.

9 8. De la topologie du réseau à la matrice LV

Une deuxième idée commune est que la matrice A n'est pas un simple tableau de paramètres arbitraires. Elle constitue la projection, à l'échelle réduite, de la topologie et de la physique du réseau.

Dans les télécoms :

$$A \simeq H^T BH.$$

Dans le réseau électrique, les coefficients A_{pq} sont construits à partir :

$$Laplacien + vecteurs\ propres + termes\ non\ linéaires\ de\ couplage.$$

Dans les réseaux sociaux, A est une matrice de gains stratégiques ou d'influence.

Dans l'écologie, A est directement la matrice des effets pairwise entre espèces.

Ainsi :

$$architecture\ du\ réseau \rightarrow matrice\ d'interaction\ effective A.$$

Le GLV ne détruit donc pas nécessairement l'information du réseau ; il la **condense** dans une matrice d'interactions entre variables collectives.

10 9. Décomposition $A = S + K$: un langage transversal de stabilité

Une fois le GLV obtenu, la même analyse matricielle peut être appliquée aux différents réseaux.

10.1 9.1. Partie symétrique

$$S = \frac{A+A^T}{2}.$$

Elle mesure la composante réciproque du couplage. Lorsque la convention de signe est choisie sous la forme

$$\dot{x_i} = x_i\left(r_i - \sum_j A_{ij}x_j\right),$$

et que

$$S \succ 0,$$

la partie symétrique fournit une structure dissipative forte.

10.2 9.2. Partie antisymétrique

$$K = \frac{A-A^T}{2}.$$

Elle représente la non-réciprocité et tend à produire des composantes rotationnelles du spectre.

Les interprétations varient selon le domaine :

- électricité : circulation entre modes ;
- télécom : asymétrie de rétroaction ou de priorité ;
- social : cycles de stratégies ;
- biologie : prédation ou exploitation asymétrique.

10.3 9.3. Jacobien à l'équilibre

Pour un équilibre positif,

$$J^{*} = -D_{x^{*}}A.$$

Il est semblable à

$$-D_{x^{*}}^{1/2}AD_{x^{*}}^{1/2}.$$

Sa partie symétrique pondérée est

$$-D_{x^{*}}^{1/2}SD_{x^{*}}^{1/2}.$$

Si $S \succ 0$, cette matrice est négative définie, ce qui garantit que toutes les valeurs propres du Jacobien ont une partie réelle négative. La partie antisymétrique peut créer des paires complexes, mais ne suffit pas, tant que S reste définie positive, à produire une instabilité locale de l'équilibre positif.

Cette propriété donne une lecture commune de la résilience de réseaux très différents.

11 10. De la stabilité à la bifurcation

Si l'on fait varier un paramètre de contrôle μ et que la plus petite valeur propre de la partie symétrique approche zéro,

$$\lambda_{min}(S(\mu)) \downarrow 0,$$

la garantie de coercivité disparaît.

Lorsque

$$\lambda_{min}(S) < 0,$$

une direction devient localement anti-dissipative. Si une composante antisymétrique suffisamment forte couple cette direction à d'autres degrés de liberté, une paire complexe du Jacobien peut traverser l'axe imaginaire :

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

avec

$$\alpha(\mu_c) = 0, \omega(\mu_c) \neq 0.$$

Sous les conditions supplémentaires usuelles de transversalité et de non-dégénérescence, on obtient une bifurcation de Hopf.

Cette analyse n'est plus spécifique à l'origine physique du réseau. Une fois la réduction GLV obtenue, le même mécanisme spectral peut être étudié pour un réseau de puissance, une écologie, un système de congestion ou un jeu évolutionnaire.

12 11. Ce que cette unification permet — et ce qu'elle ne permet pas

12.1 11.1. Ce qu'elle permet

La réduction vers GLV permet de comparer des systèmes différents avec les mêmes outils :

- équilibres ;
- faisabilité ;
- spectre du Jacobien ;
- temps de relaxation ;
- décomposition $S + K$;
- bifurcations ;
- chaos et intermittence ;
- matrices aléatoires ;
- limites de grande dimension ;
- passage éventuel vers un opérateur continu.

Elle permet surtout de distinguer **la physique microscopique** du réseau et **la dynamique collective** qui apparaît après réduction.

12.2 11.2. Ce qu'elle ne permet pas

Le GLV reste une fermeture de faible ordre. Il peut devenir insuffisant lorsque :

- les interactions d'ordre supérieur sont fortes ;
- les délais jouent un rôle central ;
- la topologie change rapidement ;
- les contraintes de conservation imposent une géométrie particulière ;
- la dynamique dépend fortement de variables cachées ;
- les amplitudes s'éloignent du domaine où le développement est valide.

Dans ces cas, le GLV doit être enrichi : retards, bruit, termes cubiques, hypergraphes, réseaux adaptatifs ou modèles non locaux.

13 12. Vers la limite continue des réseaux de grande dimension

Une fois le langage GLV établi, une autre étape devient possible. Si N devient très grand et si l'indice i acquiert une signification spatiale, le vecteur

$$X_N = \left(x_1, \ldots, x_N\right)$$

peut tendre vers un champ

$$x(r, t).$$

La matrice d'interaction devient alors un opérateur non local. Sous des hypothèses de courte portée et de régularité, un développement en moments conduit à des opérateurs différentiels :

$$A \simeq A_0 + A_1 \cdot \nabla + A_2 : \nabla\nabla + \cdots.$$

Dans le cas isotrope, le second ordre devient un Laplacien :

$$A_2 : \nabla\nabla \to D\Delta.$$

La partie impaire du noyau peut produire une advection :

$$- v \cdot \nabla.$$

Après linéarisation autour d'un équilibre, on rejoint alors la forme

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X + \cdots.$$

Le présent document constitue ainsi l'amont conceptuel de la dérivation continuum : il explique comment les réseaux réels peuvent d'abord être ramenés à un langage GLV avant que la grande dimension ne transforme la matrice en opérateur spatial.

14 Conclusion — Lotka–Volterra comme langage intermédiaire entre réseau et continuum

Le résultat principal n'est pas l'affirmation que l'électricité, les télécommunications, les sociétés humaines et les écosystèmes obéissent aux mêmes lois physiques. Leurs variables, leurs contraintes et leurs mécanismes microscopiques restent radicalement différents.

Ce qui est commun est une **architecture dynamique**. Dans chacun des cas étudiés, on peut identifier des grandeurs positives ou des énergies modales dont le taux de variation relatif dépend, au premier ordre, d'une combinaison linéaire des autres grandeurs. C'est cette structure qui produit la forme GLV.

Pour le réseau électrique, le GLV apparaît tardivement, après la projection sur les modes propres et le passage aux énergies modales. Pour les télécommunications, il apparaît à partir de la concurrence de flux partageant des capacités. Pour les réseaux sociaux, il est équivalent à la dynamique réplicatrice après transformation projective. Pour l'écologie, il constitue directement une description naturelle des interactions pairwise entre populations.

Ainsi se dessine une chaîne générale :

$$physique\ ou\ comportement\ microscopique \to réseau\ d'interactions \to variables\ collectives \to GLV \to spectre\ et$$

Cette chaîne donne au GLV un rôle particulier : non pas celui d'une loi universelle, mais celui d'un **langage intermédiaire**, assez simple pour être analysé et assez riche pour conserver la trace de la topologie, de la réciprocité et de la non-réciprocité des interactions.

15 Bibliographie indicative et commentée

Filatrella, G., Nielsen, A. H. & Pedersen, N. F. (2008), "Analysis of a power grid using the Kuramoto-like model", European Physical Journal B. Cette référence établit explicitement le lien

formel entre réseau de puissance et oscillateurs de type Kuramoto. Elle soutient la première étape de la réduction électrique, avant la projection modale proposée ici.

Hernández-Bermejo, B. & Fairén, V., travaux sur la représentation Lotka–Volterra généralisée des systèmes non linéaires. Ces travaux montrent que la famille GLV possède une portée algébrique bien plus large que l'écologie classique et qu'un ensemble important de systèmes quasi-polynomiaux ou de lois de type mass-action peut être recodé sous forme GLV après transformation de variables.

Hofbauer, J. & Sigmund, K., théorie des jeux évolutionnaires et dynamique réplicatrice. La littérature classique de dynamique évolutionnaire établit l'équivalence, après transformation projective et reparamétrisation du temps, entre systèmes réplicateurs et Lotka–Volterra. Cette équivalence justifie le pont mathématique entre fréquences de stratégies et GLV.

Allesina, S. & Tang, S. (2012), "Stability criteria for complex ecosystems", Nature. Ce travail relie structure statistique des interactions, réciprocité et spectre de stabilité des grandes communautés. Il éclaire le rôle distinct des interactions réciproques et asymétriques dans les matrices écologiques.

Bucci, V. et al. (2016), MDSINE: Microbial Dynamical Systems INference Engine, Genome Biology. Exemple important de l'usage du gLV pour reconstruire des interactions microbiennes à partir de séries temporelles.

Remien, C. H. et al. (2021), travaux sur l'identifiabilité structurelle du generalized Lotka–Volterra. Ils montrent les conditions et limites de l'inférence des paramètres GLV à partir de données de communautés microbiennes.

Dedrick, S. et al. (2023), travaux sur les conditions dans lesquelles un modèle Lotka–Volterra représente correctement les interactions microbiennes. Cette littérature rappelle que le GLV est une fermeture pairwise et que sa validité dépend de la structure des ressources et médiateurs cachés.

Travaux sur le contrôle de congestion par modèles fluides et dynamiques multiplicatives. Ils constituent le contexte naturel de la dérivation télécom présentée ici : les débits sont traités comme variables continues et leur adaptation dépend du coût de congestion. La forme GLV apparaît lorsque ce coût est linéarisé et que l'ajustement est multiplicatif.