De la dissipation à la rotation : apparition d'une bifurcation de Hopf dans un système de Lotka–Volterra 3D

Étude numérique et pédagogique

Août 2026

Introduction

Un système de Lotka–Volterra à trois dimensions peut sembler, au premier regard, n'être qu'un modèle élémentaire de trois populations ou de trois variables en interaction. Pourtant, sa matrice de couplage contient déjà une géométrie dynamique riche. Selon la manière dont cette matrice distribue la dissipation, la coopération, la compétition et la circulation entre les variables, le même système peut converger calmement vers un point fixe, s'enrouler autour de cet équilibre suivant une spirale amortie, développer des quasi-cycles de très longue durée, puis perdre sa stabilité par une paire complexe de valeurs propres qui franchit l'axe imaginaire.

L'objet de ce chapitre est de reconstruire, pas à pas, cette transition. L'idée directrice est de décomposer la matrice d'interaction en une partie symétrique et une partie antisymétrique. La première joue le rôle d'une structure dissipative ou restauratrice ; la seconde introduit une circulation, c'est-à-dire une composante rotationnelle qui ne contribue pas directement à la forme quadratique d'énergie. La bifurcation de type Hopf apparaît lorsque la dissipation est suffisamment affaiblie dans une direction alors qu'une rotation forte subsiste.

Ce texte présente le raisonnement mathématique, les hypothèses, le protocole Monte-Carlo, les indicateurs spectraux et les trajectoires temporelles obtenues autour du seuil.

1. Le système de Lotka–Volterra tridimensionnel

Nous considérons le système généralisé

$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i - \sum_{j=1}^{3} M_{ij}x_j\right), i = 1, 2, 3.$$

Dans les expériences numériques présentées ici, nous avons pris

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1,$$

et des conditions initiales strictement positives. Les variables $x_i(t)$ peuvent être interprétées comme des populations, des concentrations, des amplitudes ou, plus généralement, des intensités dynamiques couplées.

Un point d'équilibre intérieur, c'est-à-dire avec les trois composantes non nulles, vérifie

$$Mx^* = r,$$

d'où

$$x^* = M^{-1}r.$$

Cet équilibre n'est physiquement admissible que si

$$x_i^* > 0 pour i = 1, 2, 3.$$

La stabilité locale dépend du Jacobien. Pour

$$f_i(x) = x_i\left(r_i - (Mx)_i\right),$$

on obtient au point intérieur, puisque $r - Mx^* = 0$,

$$J^* = - D_{x^*} M,$$

avec

$$D_{x^*} = diag\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right).$$

L'équilibre est asymptotiquement stable lorsque toutes les valeurs propres de J^* ont une partie réelle négative.

2. Décomposer la matrice : dissipation et rotation

Toute matrice réelle M se décompose de manière unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$M = S + \sigma K,$$

avec

$$S = S^T,$$

et

$$K = - K^T.$$

Le paramètre σ règle l'intensité de la composante antisymétrique.

La propriété fondamentale de K est

$$u^T K u = 0$$

pour tout vecteur réel u. Par conséquent,

$$u^T M u = u^T S u.$$

La partie antisymétrique n'apparaît pas dans la forme quadratique. Elle ne fournit donc pas, à ce niveau, une contribution dissipative ou anti-dissipative. Elle agit plutôt comme un terme de circulation : elle dévie les trajectoires et favorise l'apparition de paires complexes de valeurs propres.

Cette décomposition suggère une lecture mécanique :

- S contrôle principalement la composante de rappel et la dissipation ;
- K contrôle principalement la composante rotationnelle ;
- le rapport entre rotation et dissipation règle la forme de la relaxation.

Un indicateur spectral naturel est

$$\Gamma_{dyn} = \frac{|Im\lambda)}{|Re\lambda)},$$

pour la paire complexe dominante. Lorsque $\Gamma_{dyn} \ll 1$, la relaxation est presque monotone. Lorsque $\Gamma_{dyn} \gg 1$, la trajectoire effectue de nombreuses rotations avant d'être amortie.

3. État de référence : une partie symétrique définie positive

La matrice symétrique de référence utilisée dans les simulations est

$$S_0 = (1\ 0.35\ -\ 0.20\ 0.35\ 1\ 0.25\ -\ 0.20\ 0.25\ 1\ ).$$

Ses valeurs propres sont positives :

$$\lambda\left(S_0\right) \simeq (0.4615, 1.1826, 1.3559).$$

Ainsi $S_0 \succ 0$. Dans ce régime, lorsque l'équilibre intérieur est positif, le système est dominé par une structure dissipative. Les trajectoires convergent vers un point fixe. L'ajout d'une partie antisymétrique peut transformer cette convergence en spirale, mais tant que la partie symétrique conserve une coercivité suffisante, la rotation seule ne suffit pas à rendre l'équilibre instable.

4. Première expérience : augmenter la rotation en conservant la dissipation

Nous avons d'abord fixé $S = S_0$ et considéré

$$M = S_0 + \sigma K,$$

où K est une matrice antisymétrique aléatoire définie par trois nombres gaussiens indépendants :

$$K = \left(0\ k_{12}\ k_{13}\ -k_{12}\ 0\ k_{23}\ -k_{13}\ -k_{23}\ 0\right).$$

Pour chaque valeur de σ, cent réalisations ont été générées.

Lorsque σ augmente, la probabilité d'obtenir une paire complexe du Jacobien devient rapidement proche de 100 % parmi les équilibres intérieurs physiquement admissibles. À grande intensité antisymétrique, la pulsation médiane croît fortement tandis que le rapport d'amortissement décroît.

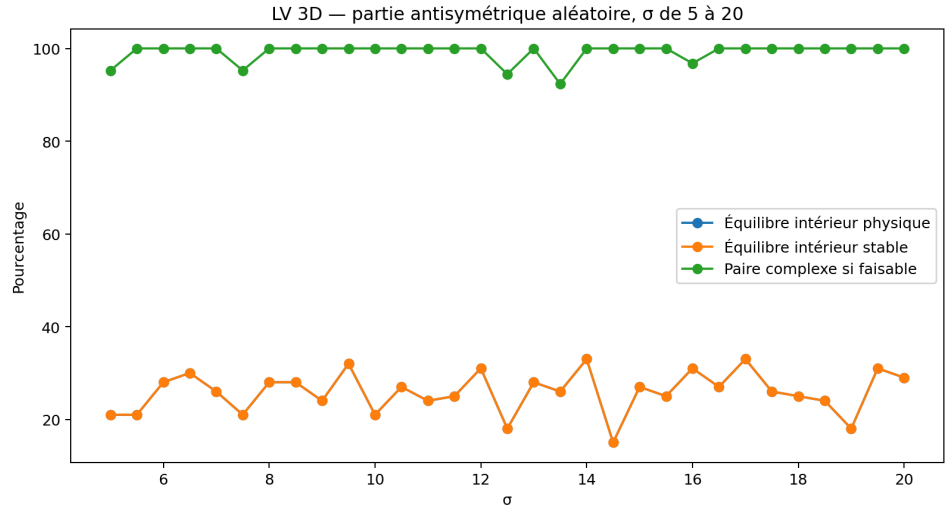


Figure 1 — À grande intensité antisymétrique, les équilibres physiques possèdent presque toujours une paire complexe. La coexistence intérieure reste plus rare, mais les trajectoires calculées demeurent bornées.

Cette figure montre un premier fait essentiel : l'antisymétrie ne détruit pas automatiquement la stabilité. Elle transforme d'abord la géométrie de la relaxation. Pour σ compris entre 5 et 20, presque tous les équilibres intérieurs admissibles possèdent une paire complexe, mais leurs parties réelles restent négatives.

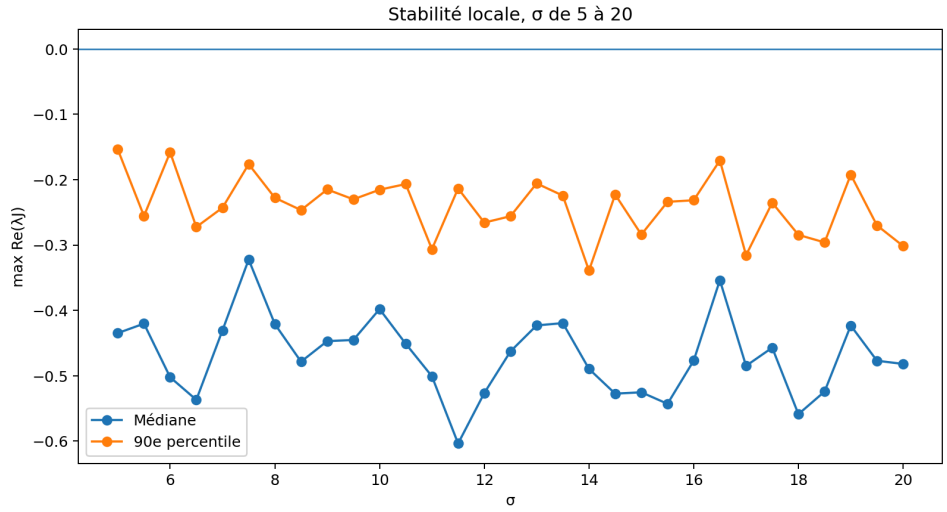


Figure 2 — La partie réelle dominante du Jacobien reste négative malgré une rotation de plus en plus forte. La rotation seule ne suffit donc pas à provoquer une bifurcation.

La fréquence augmente avec σ, tandis que l'amortissement relatif devient très faible. Le nombre

$$\Gamma_{dyn} = \frac{|\omega)}{|\alpha)}, \lambda = \alpha \pm i\omega,$$

peut atteindre plusieurs dizaines.

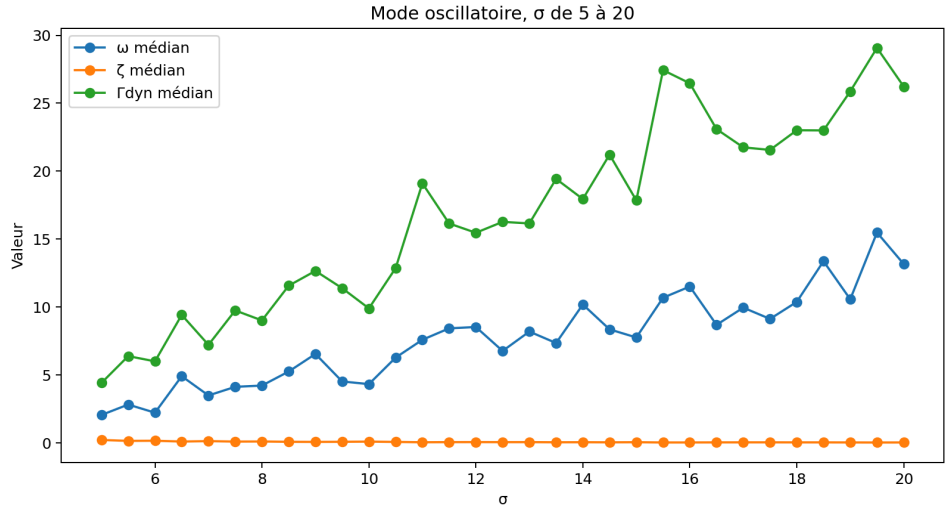


Figure 3 — Augmentation de la pulsation et du rapport rotation/dissipation lorsque σ augmente. Le système devient fortement spiralé mais reste localement stable.

Cette première étape est fondamentale : elle sépare clairement deux mécanismes. La partie antisymétrique construit la rotation ; elle ne suffit pas, tant que la dissipation symétrique reste positive, à faire franchir l'axe imaginaire aux valeurs propres du Jacobien.

5. Deuxième expérience : diminuer une seule direction dissipative

Pour provoquer une véritable perte de stabilité sans bouleverser toute la matrice symétrique, nous avons choisi de ne modifier qu'une seule de ses valeurs propres.

On écrit

$$S = Q\,diag\left(\mu, \lambda_2, \lambda_3\right) Q^T,$$

où Q contient les vecteurs propres de S_0, λ_2 et λ_3 restent fixes, et

$$\mu = \lambda_{min}(S)$$

est le paramètre de contrôle.

Cette construction conserve les directions propres de S_0 et ne modifie que la courbure ou la dissipation dans la direction la plus faible.

Trois régimes deviennent alors possibles :

$$\mu > 0 : dissipation\ dans\ toutes\ les\ directions,$$

$$\mu = 0 : direction\ marginale,$$

$$\mu < 0 : direction\ localement\ anti - dissipative.$$

Nous avons maintenu une forte rotation, $\sigma = 10$, et fait décroître μ.

6. Approche du seuil : de la spirale amortie au quasi-cycle

Dans un premier balayage, μ a été conduit de $+\ 0.45$ à $-\ 0.45$. Les valeurs propres complexes demeuraient encore dans le demi-plan gauche, mais l'amortissement devenait très faible. Le système se rapprochait du seuil sans le franchir.

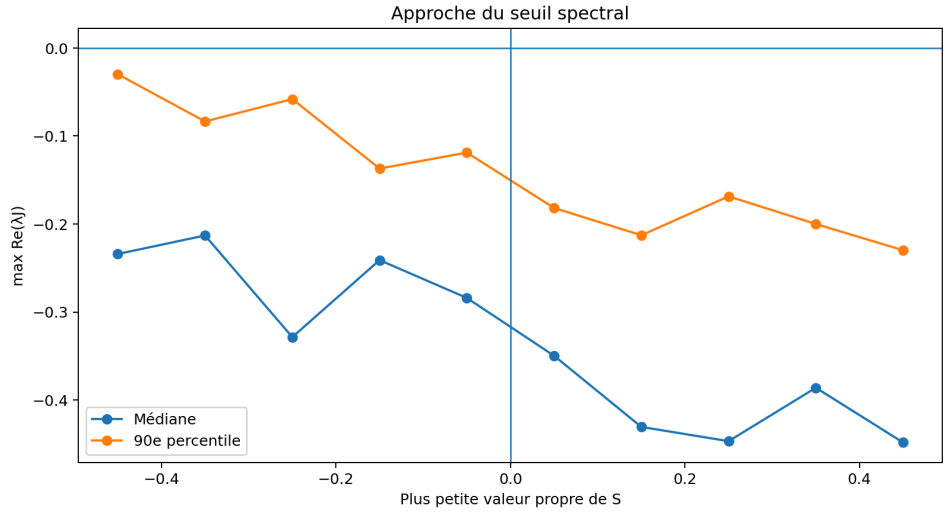


Figure 4 — Lorsque la plus petite valeur propre de S s'approche de zéro puis devient légèrement négative, la partie réelle dominante du Jacobien se rapproche de zéro.

La diminution de la dissipation rend simultanément le rapport Γ_{dyn} très grand. Les oscillations peuvent donc persister longtemps tout en restant encore asymptotiquement amorties.

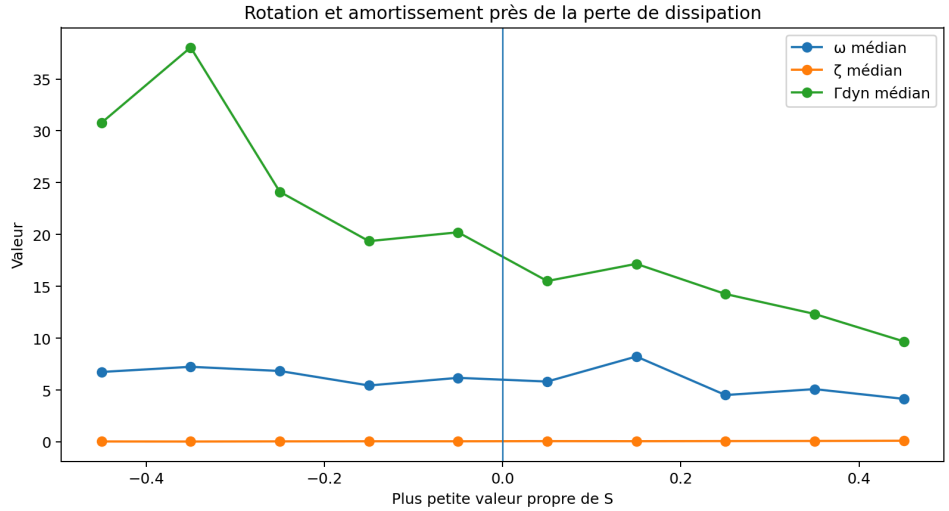


Figure 5 — La rotation reste forte tandis que l'amortissement relatif décroît à l'approche de la perte de dissipation directionnelle.

À ce stade, l'image physique est celle d'une spirale de plus en plus serrée et de moins en moins amortie. La composante rotationnelle est déjà présente ; il ne manque plus que la disparition du rappel dans une direction pour provoquer le franchissement spectral.

7. Franchissement spectral : apparition d'une instabilité de type Hopf

Nous avons ensuite prolongé μ de -0.5 à -2.0 avec un pas de 0.1, en conservant $\sigma = 10$ et 100 réalisations par valeur.

Le seuil apparaît progressivement. À $\mu = -0.6$, le 90e percentile de la partie réelle dominante reste encore légèrement négatif. À $\mu = -0.7$, ce percentile devient positif. Les premières réalisations instables apparaissent donc dans une zone située approximativement autour de

$$\mu_c \approx -0.65$$

pour ce protocole statistique.

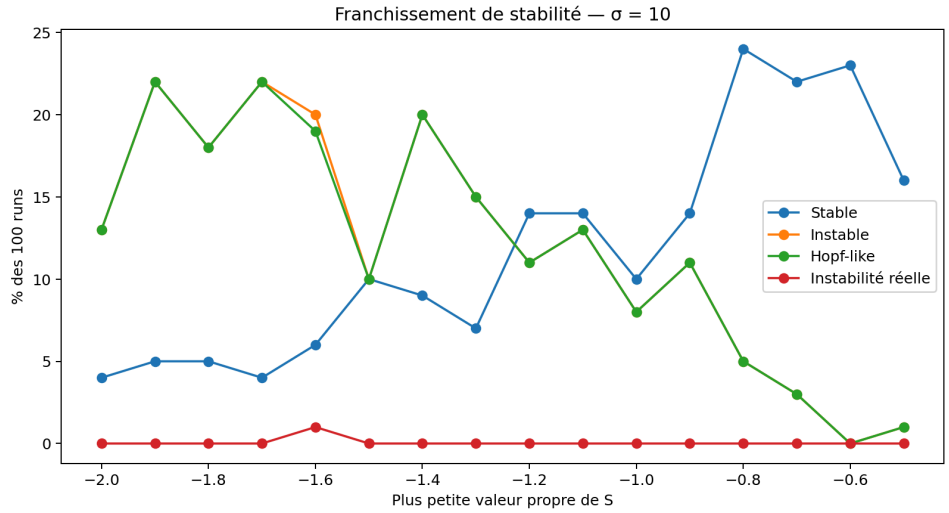


Figure 6 — Le franchissement de stabilité apparaît principalement sous forme d'instabilités oscillatoires : la paire complexe dominante traverse l'axe imaginaire.

La lecture spectrale confirme le mécanisme. Si

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

alors la transition locale de type Hopf correspond à

$$\alpha(\mu_c) = 0, \omega(\mu_c) \neq 0.$$

Pour $\mu > \mu_c$, on a $\alpha < 0$ et la spirale est stable. Pour $\mu < \mu_c$, certaines réalisations présentent $\alpha > 0$: l'amplitude des oscillations croît localement autour du point fixe.

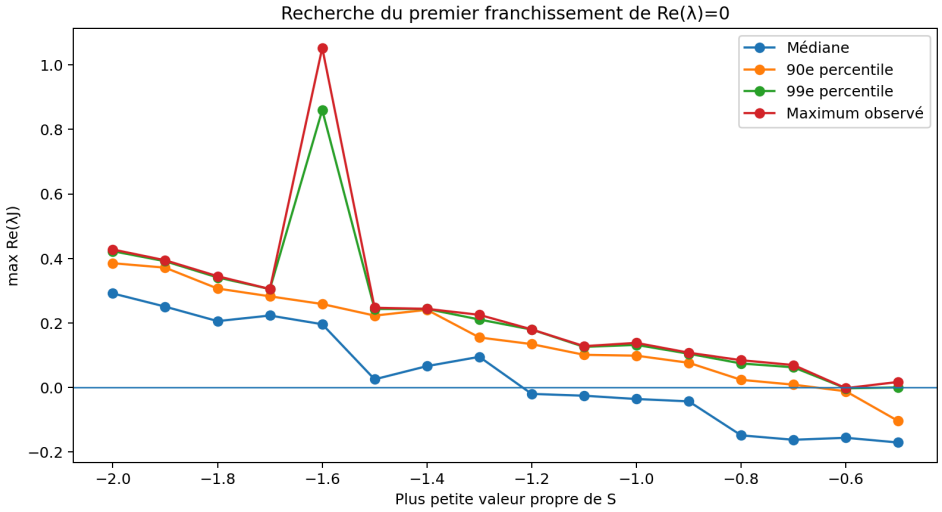


Figure 7 — Recherche du franchissement de $Re(\lambda) = 0$. Les percentiles supérieurs et le maximum observé deviennent positifs avant que la médiane ne change elle-même de signe.

La médiane de la partie réelle dominante devient positive plus tard, entre environ $\mu = -1.2$ et $\mu = -1.3$. Cela distingue deux seuils : l'apparition des premières instabilités dans la population de matrices, puis le moment où l'instabilité devient typique parmi les équilibres physiques.

Le rapport d'amortissement change alors de signe. Pour une paire

$$\lambda = \alpha \pm i\omega,$$

nous avons utilisé

$$\zeta = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Ainsi $\zeta > 0$ correspond à un amortissement, $\zeta = 0$ au seuil et $\zeta < 0$ à une croissance locale de l'enveloppe oscillante.

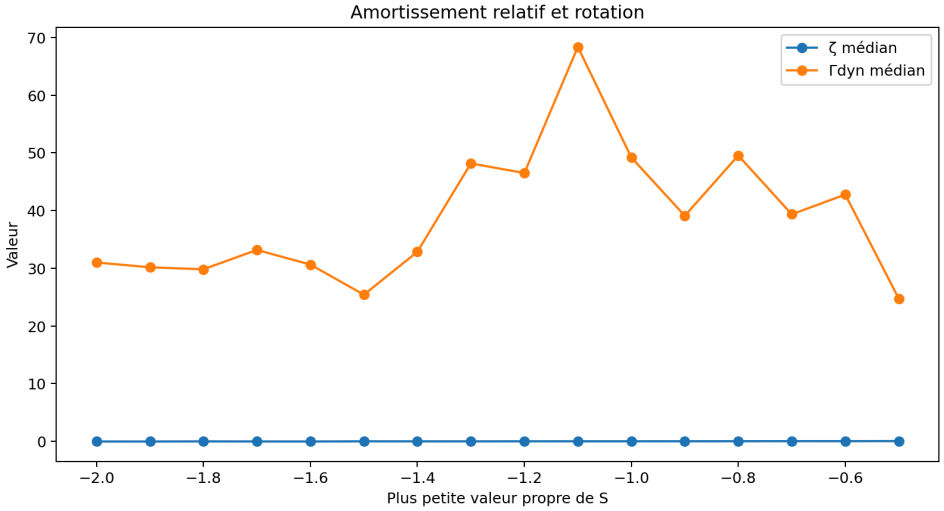


Figure 8 — Près et au-delà du seuil, le rapport rotation/dissipation devient très grand et le signe de l'amortissement peut s'inverser.

8. Les trajectoires : quatre scènes autour de la bifurcation

L'analyse spectrale décrit la stabilité locale. Pour comprendre ce que devient réellement le système non linéaire, il faut revenir aux trajectoires.

8.1. $\mu = -0.8$: spirale amortie

Pour un run représentatif,

$$\lambda_{1,2} \simeq -0.149 \pm 1.266i.$$

La paire complexe se trouve encore dans le demi-plan gauche. Les trois composantes oscillent puis convergent vers l'équilibre intérieur.

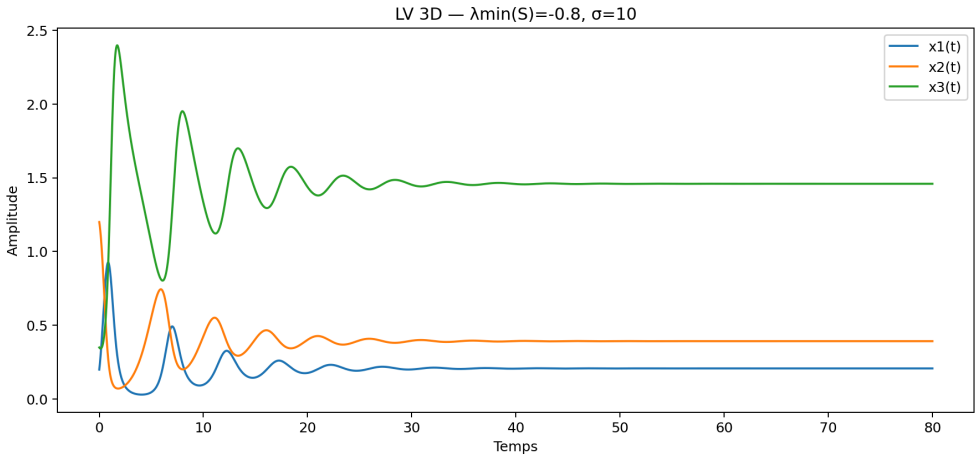


Figure 9 — Pour $\mu = -0.8$, les trois signaux présentent des oscillations amorties et convergent vers un point fixe positif.

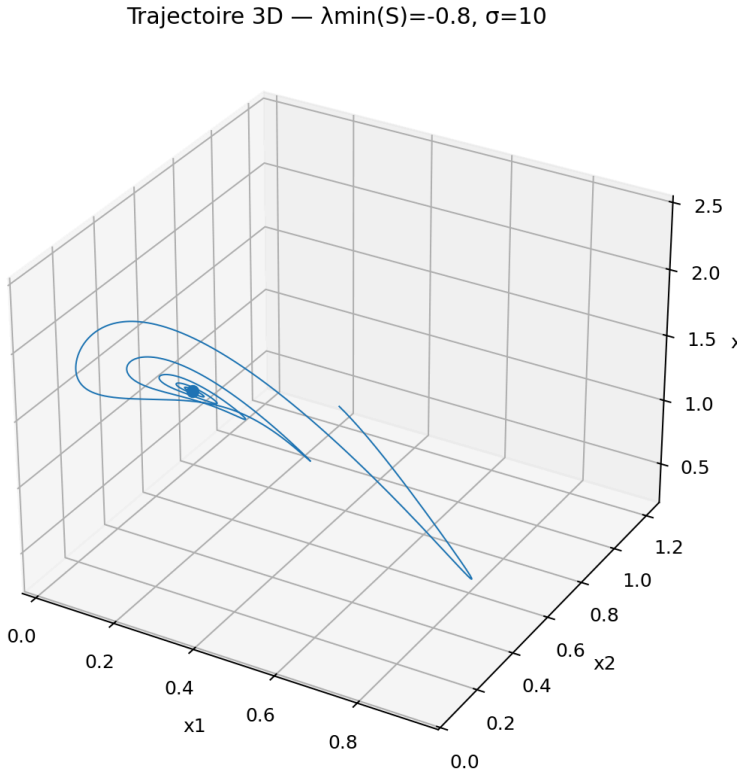


Figure 10 — Dans l'espace des phases, la trajectoire s'enroule autour de l'équilibre : image géométrique d'une spirale stable.

8.2. $\mu = -1.0$: quasi-cycle de longue durée

Pour une réalisation proche du seuil,

$$\lambda_{1,2} \simeq -0.0287 \pm 6.583i.$$

La partie réelle est encore négative, mais très faible devant la partie imaginaire. Les oscillations sont donc nombreuses et ne décroissent que très lentement.

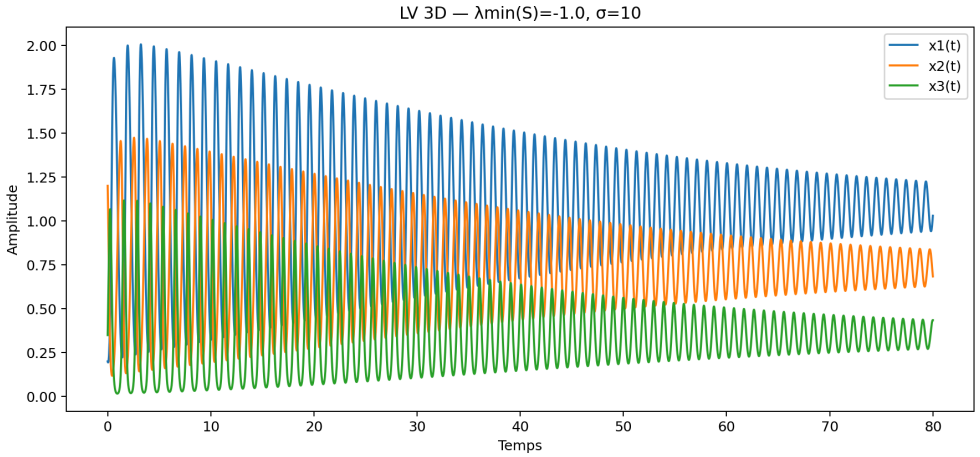


Figure 11 — Pour $\mu = -1.0$, les oscillations persistent sur toute la fenêtre d'observation : le système est encore stable, mais très faiblement amorti.

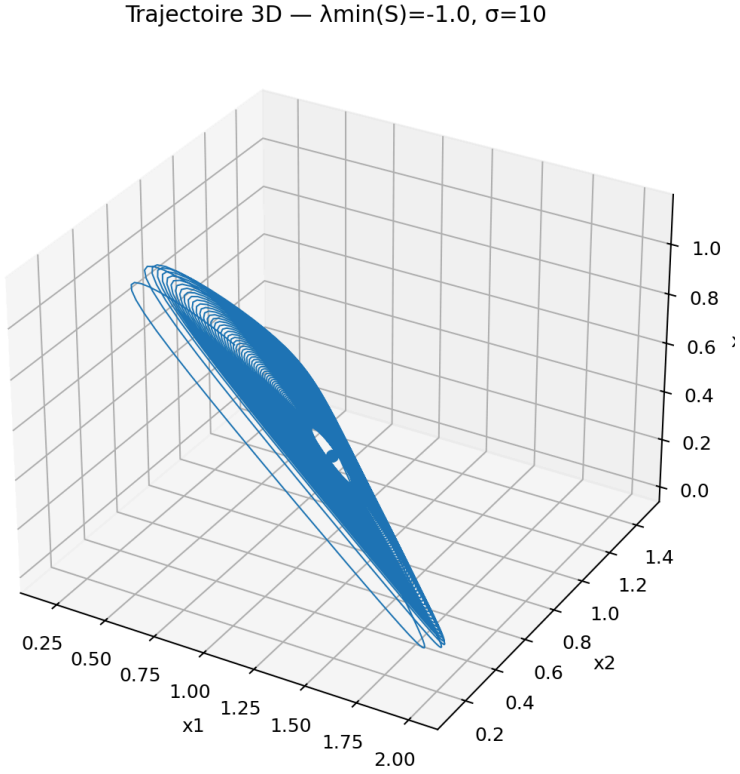


Figure 12 — La trajectoire 3D effectue de nombreuses rotations autour de la région d'équilibre avant de se contracter lentement.

8.3. $\mu = -1.3$: la paire complexe devient instable

Ici,

$$\lambda_{1,2} \simeq +0.0836 \pm 8.869i.$$

La partie réelle a franchi zéro. L'équilibre intérieur est localement instable. Les oscillations augmentent initialement, puis la non-linéarité du système intervient. Dans cette réalisation, elle ne produit pas un petit cycle limite autour du point fixe : la trajectoire se déplace vers la frontière du cône positif, avec une composante presque éteinte.

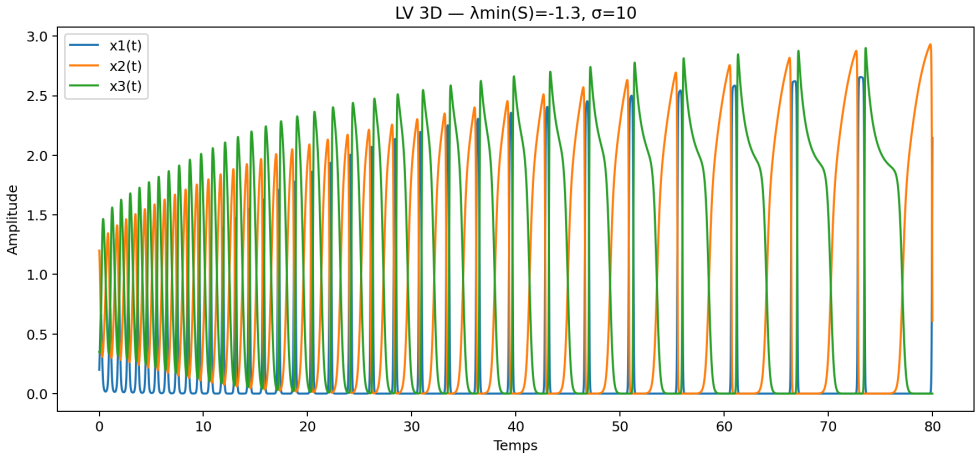


Figure 13 — Pour $\mu = -1.3$, les oscillations ne sont plus amorties autour de l'équilibre intérieur. L'amplitude se réorganise et la trajectoire tend vers une dynamique proche d'une frontière.

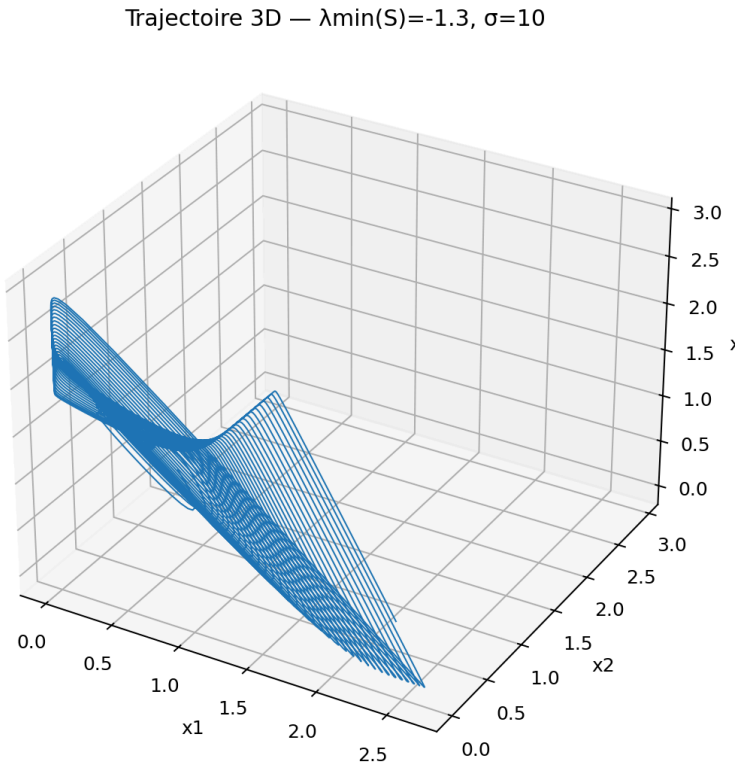


Figure 14 — La trajectoire 3D quitte le voisinage de l'équilibre instable et explore une région proche des faces du domaine positif.

8.4. $\mu = -1.6$: intermittence et compétition entre composantes

Pour le run représentatif,

$$\lambda_{1,2} \simeq +0.1934 \pm 2.334i.$$

L'instabilité oscillatoire est plus forte. Les signaux présentent désormais de longues phases pendant lesquelles une variable domine tandis que les autres sont presque nulles, puis une autre variable prend le relais. La dynamique ressemble à une succession de bouffées et de quasi-extinctions.

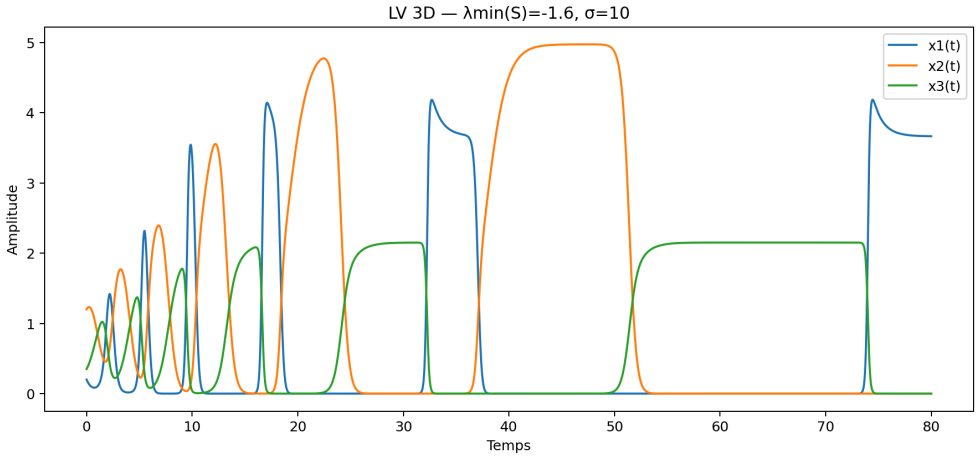


Figure 15 — Pour $\mu = -1.6$, les trois composantes alternent des épisodes de domination et de quasi-extinction. La dynamique devient fortement intermittente.

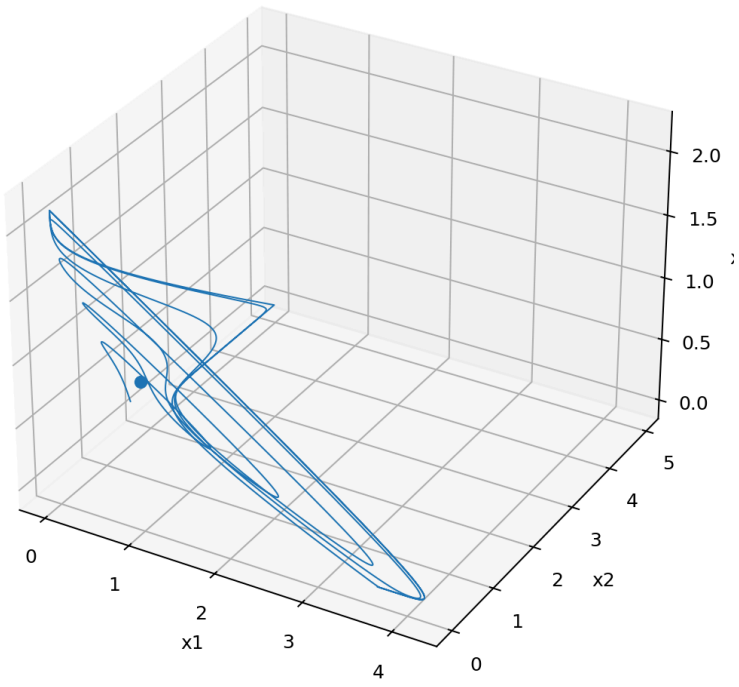


Figure 16 — La trajectoire 3D se rapproche des faces et des arêtes du domaine positif, évoquant une dynamique de type hétérocline ou de compétition entre états de frontière.

9. Ce que signifie exactement « bifurcation de Hopf » ici

Il est important de distinguer trois niveaux de conclusion.

Premier niveau : le résultat spectral local. Nous observons bien, dans certaines réalisations, une paire complexe du Jacobien qui passe de

$$\alpha < 0$$

à

$$\alpha > 0$$

avec $\omega \neq 0$. C'est la signature locale caractéristique d'une bifurcation de Hopf.

Deuxième niveau : la bifurcation non linéaire. Pour démontrer rigoureusement une bifurcation de Hopf au sens classique, il faudrait vérifier les conditions de transversalité et calculer le premier coefficient de Lyapunov afin de déterminer si la bifurcation est supercritique ou sous-critique.

La condition de transversalité s'écrit schématiquement

$$\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_c} \neq 0.$$

Troisième niveau : l'attracteur après bifurcation. Une paire complexe instable ne garantit pas qu'un cycle limite stable apparaisse. Nos trajectoires montrent justement qu'au-delà du seuil le système peut être

entraîné vers les frontières du domaine positif, où apparaissent des épisodes intermittents et des quasi-extinctions.

Nous parlerons donc avec prudence d'une **bifurcation locale de type Hopf** ou d'un **franchissement Hopf-like**, tant que le coefficient de Lyapunov et l'existence d'un cycle limite n'ont pas été établis analytiquement.

10. Interprétation géométrique : perte de convexité et circulation

L'ensemble du mécanisme peut être résumé par une image simple. La partie symétrique définit une géométrie de rappel. Tant que

$$S \succ 0,$$

la forme quadratique

$$u^T S u$$

est positive dans toutes les directions. Le système dispose d'une coercivité : les écarts sont ramenés vers l'équilibre.

Lorsque

$$\lambda_{min}(S) \downarrow 0,$$

une direction devient de plus en plus molle. Le temps de relaxation associé s'allonge et les rotations imposées par K deviennent dominantes.

Lorsque

$$\lambda_{min}(S) < 0,$$

cette direction n'est plus restauratrice. Elle devient localement amplificatrice. En l'absence de rotation, on pourrait s'attendre à une instabilité essentiellement réelle. Mais la composante antisymétrique mélange les directions et transforme l'amplification en mouvement tournant.

On obtient alors l'idée centrale :

$$perte\ de\ dissipation\ +\ rotation \Rightarrow instabilité\ oscillatoire.$$

Cette formulation est proche d'une décomposition « gradient + circulation » :

$$\dot{X} \simeq -\ \nabla V(X) +\ \Omega(X).$$

Le terme de gradient représente la relaxation vers une structure stable ; le terme rotationnel détourne continuellement la trajectoire. La bifurcation apparaît lorsque la courbure restauratrice devient trop faible, puis négative, dans une direction alors que la circulation subsiste.

11. Une formulation mathématique synthétique du résultat

Nous pouvons résumer l'expérience par le système paramétré

$$M(\mu, \sigma) = S(\mu) +\ \sigma K,$$

avec

$$S(\mu) = Q\,diag\left(\mu, \lambda_2, \lambda_3\right) Q^T.$$

L'équilibre intérieur est

$$x^*(\mu, \sigma) = M(\mu, \sigma)^{-1} r,$$

et son Jacobien

$$J^*(\mu, \sigma) = -D_{x^*} M(\mu, \sigma).$$

Définissons

$$\Lambda(\mu, \sigma) = \max_k Re\lambda_k\left(J^*\right).$$

La frontière de stabilité locale est donnée par

$$\Lambda(\mu, \sigma) = 0.$$

Dans la zone où la valeur propre dominante appartient à une paire complexe, cette frontière devient une frontière de type Hopf :

$$Re\lambda_{1,2} = 0, Im\lambda_{1,2} \neq 0.$$

Le plan (μ, σ) peut donc être lu comme un diagramme dissipation–rotation. μ règle la force du rappel dans la direction symétrique la plus faible ; σ règle l'intensité de la circulation. La transition apparaît lorsque la combinaison des deux fait franchir zéro à la partie réelle de la paire complexe.

12. Hypothèses, portée et limites

Le modèle étudié repose sur plusieurs hypothèses qu'il faut garder explicites.

1. **Dimension trois.** La dynamique est volontairement réduite à trois variables afin de pouvoir suivre toutes les singularités et visualiser les trajectoires dans l'espace des phases.
2. **Croissances intrinsèques identiques.** Nous avons pris $r_i = 1$. Une hétérogénéité des r_i déplacerait les équilibres et les seuils.
3. **Partie antisymétrique gaussienne.** Les trois coefficients indépendants de K sont tirés suivant une loi normale centrée. D'autres distributions produiraient d'autres statistiques de seuil.
4. **Paramètre spectral contrôlé.** La perte de dissipation est introduite en faisant varier seulement $\lambda_{min}(S)$, les deux autres valeurs propres et les vecteurs propres de S_0 étant maintenus fixes.
5. **Monte-Carlo fini.** Les pourcentages sont obtenus sur 100 runs par valeur du paramètre. Ils décrivent une tendance statistique, non une probabilité exacte.
6. **Admissibilité physique.** Une analyse de stabilité de l'équilibre intérieur n'a de sens physique ici que lorsque $x^* > 0$.
7. **Hopf local versus cycle limite.** Le franchissement d'une paire complexe est établi numériquement ; la nature supercritique ou sous-critique de la bifurcation et l'existence d'un cycle limite stable demanderaient une analyse de forme normale.

Conclusion

L'expérience part d'un système de Lotka–Volterra tridimensionnel et montre qu'une décomposition très simple de la matrice d'interaction permet d'organiser toute la dynamique.

La partie symétrique fournit la structure dissipative. Tant qu'elle est définie positive, la rotation antisymétrique peut rendre la trajectoire de plus en plus spiralée, augmenter fortement la fréquence et diminuer l'amortissement relatif, mais elle ne suffit pas à provoquer l'instabilité de l'équilibre intérieur.

La situation change lorsque la plus petite valeur propre de la partie symétrique est progressivement réduite. Une direction restauratrice devient marginale puis anti-dissipative. La composante antisymétrique, déjà présente, transforme alors cette perte de rappel en une instabilité oscillatoire : une paire complexe du Jacobien traverse l'axe imaginaire.

Ainsi, le résultat central peut être formulé en une phrase :

$$partie\ symétrique\ \Rightarrow dissipation,\ partie\ antisymétrique\ \Rightarrow rotation,\ leur\ compétition\ \Rightarrow transition\ vers\ l'instabilit$$

La bifurcation ne conduit pas nécessairement à un petit cycle limite stable. Dans les simulations au-delà du seuil, la dynamique peut être attirée vers les frontières du domaine positif et devenir intermittente, avec alternance de domination et de quasi-extinction des composantes. Cette dernière observation ouvre une perspective plus large : dans un réseau non linéaire, la perte d'une direction dissipative peut transformer une relaxation ordonnée en une dynamique de compétition entre modes et, potentiellement, en une source de signaux complexes.

Généralisation en dimension n : dissipation, rotation et frontière de Hopf

L'expérience menée en dimension trois suggère une lecture qui dépasse très largement le cas particulier du système étudié. Ce qui apparaissait d'abord comme une propriété d'une matrice 3 × 3 se révèle en réalité comme une structure algébrique disponible pour toute matrice réelle, quelle que soit sa dimension. La généralisation ne consiste donc pas à transposer artificiellement un exemple : elle consiste à reconnaître, derrière l'exemple, une décomposition universelle de l'interaction en deux composantes de nature différente — l'une symétrique, associée à la dissipation ou à l'amplification, l'autre antisymétrique, associée à la circulation et à la rotation des trajectoires.

Considérons un système de Lotka–Volterra généralisé à n composantes. Chaque variable x_i peut représenter une population, une concentration, un niveau d'activité, un mode collectif ou, plus généralement, une quantité positive dont le taux de variation dépend de son propre niveau et de ses interactions avec les autres composantes.

$$d\,x_i\,/\,d\,t\ =\ x_i\,(\,r_i\ -\ \Sigma_(j\ =\ 1)\hat{}n\,A_ij\,x_j\,),\quad i\ =\ 1,\ldots,n$$

On suppose ici que les paramètres r_i sont réels et que la matrice d'interaction A est réelle. La positivité des variables est une hypothèse naturelle du modèle : si x_i(0)>0, le facteur multiplicatif x_i rend les hyperplans x_i=0 invariants. Un équilibre intérieur, lorsqu'il existe, est défini par la condition que toutes les composantes soient strictement positives.

$$A\,x\,*\ \ =\ r,\quad donc\quad x\,*\ \ =\ A\hat{}(-\ 1)\,r$$

Une décomposition algébrique unique

Toute matrice réelle A possède une décomposition unique en une partie symétrique S et une partie antisymétrique K. Cette décomposition ne dépend ni du modèle écologique ni de la dimension ; elle relève simplement de l'algèbre linéaire.

$$A = S + K$$

$$S = (A + A\text{^}T)/2, \quad K = (A - A\text{^}T)/2$$

$$S\text{^}T = S, \quad K\text{^}T = -K$$

Cette écriture donne un sens immédiat à deux aspects différents de l'interaction. La partie symétrique décrit les interactions réciproques : ce que la composante i exerce sur j possède, dans cette partie, le même poids que ce que j exerce sur i. La partie antisymétrique décrit au contraire la non-réciprocité pure : un effet dans un sens est compensé par un effet opposé dans l'autre. Dans un langage dynamique, la première composante est naturellement reliée à la contraction ou à l'expansion, tandis que la seconde favorise les mouvements de circulation.

La propriété fondamentale de la partie antisymétrique est que sa forme quadratique s'annule pour tout vecteur réel u.

$$u\text{^}T\, K\, u = 0$$

Ainsi, dans une quantité quadratique de type énergie, K ne fournit directement ni dissipation ni amplification. Il peut cependant modifier profondément les valeurs propres et transformer des directions de relaxation en modes complexes, c'est-à-dire en mouvements oscillatoires ou spiralés.

Le Jacobien au point de coexistence : la clé de la généralisation

L'élément décisif apparaît lorsqu'on linéarise le Lotka–Volterra autour d'un équilibre intérieur x*. Posons D = diag(x_1*,…,x_n*). Comme A x*=r à l'équilibre, les termes diagonaux issus du facteur entre parenthèses s'annulent et le Jacobien prend la forme particulièrement simple :

$$J^* = -D\,A$$

Parce que x* est intérieur, D est une matrice diagonale strictement positive. Le Jacobien J* n'est généralement ni symétrique ni normal ; ses valeurs propres peuvent donc être complexes. Cependant, il est semblable à une matrice dont la structure symétrique–antisymétrique devient transparente.

$$D\text{^}(-1/2)\, J^*\, D\text{^}(1/2) = -D\text{^}(1/2)\, A\, D\text{^}(1/2)$$

En introduisant la matrice pondérée B = D^(1/2) A D^(1/2), on obtient une nouvelle décomposition :

$$B = H + G$$

$$H = D\text{^}(1/2)\, S\, D\text{^}(1/2), \quad G = D\text{^}(1/2)\, K\, D\text{^}(1/2)$$

H est symétrique et G antisymétrique. La dynamique linéarisée au voisinage de l'équilibre est donc, à une transformation de coordonnées près, gouvernée par la somme d'une partie symétrique pondérée et d'une partie antisymétrique pondérée. C'est exactement la structure que nos simulations en dimension trois avaient révélée empiriquement.

Pourquoi S définie positive protège l'équilibre

Supposons maintenant S définie positive. Comme D^(1/2) est inversible, H = D^(1/2) S D^(1/2) est une congruence de S. La loi d'inertie de Sylvester implique qu'elles possèdent le même nombre de directions positives, nulles et négatives. En particulier :

$$S \succ 0 \quad \Rightarrow \quad H \succ 0$$

Pour un vecteur complexe z, la partie réelle de la forme hermitienne associée à B dépend uniquement de H :

$$\Re(\, z^{*}\ B\, z\,) \;=\; z^{*}\ H\, z$$

La partie antisymétrique ne peut donc pas annuler cette coercivité. Toutes les valeurs propres de B se situent dans le demi-plan à partie réelle positive ; comme J* est semblable à −B, toutes les valeurs propres de J* ont une partie réelle négative. On obtient un résultat général, valable en toute dimension :

$$S \succ 0 \;\; et \;\; x^{*} \;\; > 0 \quad \Rightarrow \quad \Re\, \lambda_k(J^{*}) \;<\; 0 \;\; pour\ tout\ k$$

Ce résultat explique rétrospectivement toute la première partie de notre exploration numérique. Nous avions augmenté très fortement l'intensité σ de la composante antisymétrique. Les trajectoires étaient devenues de plus en plus spiralées, les fréquences augmentaient et l'amortissement relatif devenait très faible ; pourtant l'équilibre intérieur restait stable tant que la partie symétrique demeurait définie positive. La rotation pouvait devenir dominante sans supprimer la dissipation.

Le passage par zéro de la plus petite valeur propre

La quantité λ_min(S) acquiert alors une signification précise. Tant qu'elle est strictement positive, S possède une coercivité globale : toutes les directions sont dissipatives dans le sens quadratique. Lorsque λ_min(S) diminue vers zéro, cette garantie s'affaiblit dans une direction propre particulière. Au point zéro, une direction devient marginale ; lorsqu'elle devient négative, cette direction n'est plus dissipative mais potentiellement amplificatrice.

$$\lambda_min(S) \;>\; 0 \;\rightarrow\; \lambda_min(S) \;=\; 0 \;\rightarrow\; \lambda_min(S) \;<\; 0$$

Il faut toutefois distinguer soigneusement cette frontière énergétique de la bifurcation de Hopf elle-même. Le passage de λ_min(S) par zéro ne signifie pas nécessairement qu'une valeur propre du Jacobien traverse simultanément l'axe imaginaire. Il signifie que la protection générale fournie par la définie-positivité disparaît. À partir de ce moment, le spectre de J* devient libre d'atteindre le demi-plan instable, selon la géométrie de l'équilibre, les autres valeurs propres de S et la structure de K.

De la perte de dissipation à la bifurcation de Hopf

Lorsque la composante antisymétrique est faible, la perte d'une direction dissipative peut conduire à une instabilité essentiellement réelle : une valeur propre réelle s'approche de zéro et devient positive. Mais lorsque K est suffisamment importante, les directions sont couplées par une circulation. La perte de dissipation ne se traduit plus seulement par une croissance le long d'un axe ; elle peut être entraînée dans un mouvement de rotation. Le spectre fait alors apparaître une paire complexe conjuguée :

$$\lambda_(1,2)(\mu) \;=\; \alpha(\mu) \;\pm\; i\,\omega(\mu)$$

Un mécanisme de type Hopf apparaît lorsque le paramètre de contrôle μ — dans notre expérience, la plus petite valeur propre de S — amène cette paire complexe à traverser l'axe imaginaire :

$$\alpha(\mu_c) \;=\; 0, \quad \omega(\mu_c) \;\neq\; 0$$

et, pour une bifurcation de Hopf non dégénérée, le franchissement doit être transversal :

$$d\,\Re(\lambda_(1,2)) \;/\; d\,\mu\;|_(\mu \;=\; \mu_c) \;\neq\; 0$$

Nos simulations ont illustré cette succession de régimes. Avec une forte composante antisymétrique, les valeurs propres complexes sont apparues bien avant l'instabilité : on observait d'abord une spirale amortie, puis des quasi-cycles de plus en plus persistants. En poussant λ_min(S) suffisamment dans le

domaine négatif, la partie réelle de la paire complexe est devenue positive. L'équilibre intérieur est alors devenu une spirale instable. Au-delà du seuil local, le comportement non linéaire a conduit, selon les réalisations, à des oscillations croissantes, à des trajectoires proches des frontières positives ou à des successions de dominance entre composantes.

Il convient donc de parler avec précision de bifurcation « de type Hopf » tant que le premier coefficient de Lyapunov n'a pas été calculé et qu'un cycle limite n'a pas été établi par continuation numérique. Le franchissement spectral d'une paire complexe est la signature locale indispensable ; la nature exacte de l'attracteur non linéaire après le seuil — cycle stable, cycle instable, dynamique hétérocline ou autre attracteur — nécessite une analyse supplémentaire.

Un diagramme de phase naturel en deux paramètres

Cette lecture suggère finalement une représentation générale à deux paramètres. On peut faire dépendre la partie symétrique d'un paramètre μ qui contrôle sa plus petite valeur propre, et multiplier la partie antisymétrique par un paramètre σ qui contrôle l'intensité de la rotation :

$$A(\mu, \sigma) \;=\; S(\mu) \;+\; \sigma\, K$$

La frontière de stabilité locale est alors déterminée non par λ_min(S)=0 seule, mais par l'équation spectrale :

$$max_k\, \Re[\, \lambda_k(J\ *\ (\mu, \sigma))\,] \;=\; 0$$

Cette équation définit, dans le plan (μ,σ), une frontière de bifurcation. Le passage de λ_min(S) à travers zéro indique la région où la stabilité cesse d'être garantie ; σ détermine dans quelle mesure cette perte de stabilité est convertie en rotation. On peut ainsi distinguer une zone de relaxation monotone, une zone de spirales amorties, une zone de quasi-cycles et, lorsque les conditions sont réunies, une zone d'instabilité oscillatoire.

Portée de la méthode

La portée de cette construction dépasse le seul vocabulaire écologique de Lotka–Volterra. Une matrice d'interaction non symétrique apparaît dans de nombreux réseaux : systèmes biologiques, réseaux technologiques, flux de ressources, modèles de compétition entre modes ou équations d'amplitude. La séparation entre partie symétrique et partie antisymétrique fournit alors une lecture géométrique simple : la première porte la contraction ou l'amplification, la seconde porte la circulation. Dans un système non linéaire, une bifurcation oscillatoire peut être comprise comme la rencontre d'une direction qui cesse d'être dissipative avec un couplage rotationnel qui empêche la croissance de rester purement rectiligne.

Sous cette forme, notre démarche peut être résumée par une phrase : la définie-positivité de la partie symétrique constitue une protection énergétique de l'équilibre ; la perte de cette protection ouvre la porte à l'instabilité ; la partie antisymétrique décide si cette instabilité prend une forme essentiellement rotationnelle. Le zéro de λ_min(S) n'est donc pas le point de Hopf universel, mais une frontière de coercivité à partir de laquelle une bifurcation de Hopf devient possible.

Bibliographie commentée : stabilité, non-réciprocité et bifurcations

La littérature ne présente pas, à notre connaissance, exactement la procédure proposée ici comme un théorème unique fondé sur le suivi de λ_min(S). En revanche, chacune des briques mathématiques de la démarche est solidement ancrée dans plusieurs traditions : stabilité de Volterra–Lyapunov, matrices communautaires aléatoires, rôle des interactions réciproques ou non réciproques, et bifurcations de Hopf dans les systèmes de Lotka–Volterra.

[1] Goh, B. S. (1977). Global Stability in Many-Species Systems. The American Naturalist, 111(977), 135–143. DOI: 10.1086/283144. — Référence fondatrice sur la stabilité globale des systèmes multispecies de type Lotka–Volterra. Elle montre comment des conditions matricielles et des fonctions de Lyapunov peuvent garantir la convergence globale. Cette tradition fournit le socle théorique de notre interprétation de la partie symétrique comme composante dissipative.

[2] Takeuchi, Y., Adachi, N. & Tokumaru, H. (1978). Global stability of ecosystems of the generalized Volterra type. Mathematical Biosciences, 42, 119–136. — Étude classique du GLV en dimension générale. Les auteurs établissent des conditions d'existence et de stabilité globale des équilibres. Cette référence est particulièrement pertinente pour la généralisation du raisonnement au-delà de trois dimensions.

[3] Takeuchi, Y. & Adachi, N. (1980). The existence of globally stable equilibria of ecosystems of the generalized Volterra type. Journal of Mathematical Biology, 10, 401–415. — Prolonge la théorie de stabilité globale et met l'accent sur les conditions assurant l'existence d'un équilibre admissible. Elle rappelle qu'il faut distinguer la stabilité spectrale d'un équilibre de sa faisabilité dans le cône positif.

[4] May, R. M. (1972). Will a Large Complex System be Stable? Nature, 238, 413–414. DOI: 10.1038/238413a0. — Article fondateur de l'approche par matrices aléatoires. May montre que la distribution spectrale d'une grande matrice d'interactions peut contrôler un seuil de stabilité. Notre démarche prolonge cette intuition en séparant explicitement les contributions symétrique et antisymétrique.

[5] Allesina, S. & Tang, S. (2012). Stability criteria for complex ecosystems. Nature, 483, 205–208. DOI: 10.1038/nature10832. — Travail essentiel sur l'effet de la structure des interactions réciproques. Les auteurs montrent que les interactions de type prédateur–proie et les interactions compétitives ou mutualistes conduisent à des propriétés spectrales différentes. Cette distinction rejoint directement le rôle que nous attribuons aux composantes symétrique et antisymétrique.

[6] Zeeman, M. L. (1993). Hopf bifurcations in competitive three-dimensional Lotka–Volterra systems. Dynamics and Stability of Systems, 8(3), 189–217. DOI: 10.1080/02681119308806158. — Référence centrale sur les bifurcations de Hopf dans les LV compétitifs tridimensionnels. Elle établit que les systèmes LV 3D peuvent effectivement présenter des bifurcations oscillatoires et des cycles limites, et fournit un cadre géométrique plus complet pour interpréter nos simulations.

[7] Gyllenberg, M., Yan, P. & Wang, Y. (2006). A 3D competitive Lotka–Volterra system with three limit cycles: a falsification of a conjecture by Hofbauer and So. Applied Mathematics Letters, 19, 1–7. — Montre la richesse non linéaire possible au-delà du seuil local et rappelle qu'un système LV 3D peut posséder plusieurs cycles limites. Cette référence est utile pour ne pas réduire le scénario post-Hopf à un cycle unique.

[8] Ros, V., Roy, F., Biroli, G., Bunin, G. & Turner, A. M. (2023). Generalized Lotka–Volterra equations with random, nonreciprocal interactions: The typical number of equilibria. Physical Review Letters, 130, 257401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.130.257401. — Travail moderne sur les GLV à interactions aléatoires non réciproques. Il est directement lié à la composante antisymétrique et à la multiplicité des équilibres dans les grands systèmes.

[9] Delabays, R. & Jacquod, P. (2025). Route to chaos in multi-species ecosystems. Chaos, 35(9), 091109. DOI: 10.1063/5.0291485. — Étudie explicitement l'apparition de cycles limites après des bifurcations de Hopf et leur évolution vers des régimes plus complexes lorsque la variabilité des interactions augmente. Cette référence récente se rapproche de la perspective dynamique ouverte par nos simulations.

Conclusion de la généralisation

Le cas tridimensionnel nous a servi de laboratoire visuel, mais la construction mathématique ne lui est pas attachée. En dimension n, la décomposition A=S+K reste unique, l'équilibre intérieur reste gouverné par J*=−DA, et la transformation par D^(1/2) révèle la même séparation entre dissipation et rotation. Tant que S est définie positive, cette structure fournit une protection robuste de la stabilité locale. Lorsque sa

plus petite valeur propre traverse zéro, cette protection disparaît dans une direction ; si la non-réciprocité portée par K produit simultanément une paire complexe, la perte de dissipation peut devenir une instabilité oscillatoire. C’est cette articulation — coercivité, rotation, franchissement spectral — qui constitue le cœur généralisable de la méthode.