Du réseau de Lotka–Volterra à l'équation d'advection–diffusion–réaction

Limite continue, propagation des perturbations et saturation non linéaire

Introduction

Un système de Lotka–Volterra de grande dimension peut être lu de deux manières. Dans son interprétation classique, les composantes $x_i(t)$ représentent des populations ou des amplitudes qui interagissent entre elles. Dans une lecture de réseau, l'indice i peut également repérer une position, un nœud, un mode localisé ou une cellule élémentaire d'un système distribué. Lorsque le nombre de composantes devient très grand et que les nœuds remplissent progressivement un domaine spatial, le vecteur discret cesse alors d'être la description la plus naturelle : il tend vers un champ continu $x(r,t)$.

L'objectif de ce chapitre est de suivre ce passage sans ajouter artificiellement une diffusion à un modèle de Lotka–Volterra. L'idée est au contraire de montrer comment **la matrice d'interaction elle-même devient, à la limite continue, un opérateur spatial**. Sous des hypothèses de localité et de régularité, le développement de cet opérateur fait apparaître successivement un terme local, un gradient d'advection et un Laplacien de diffusion. Après linéarisation autour d'un équilibre homogène, on obtient alors l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial t} = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X + \cdots,$$

où $X(r,t)$ désigne la perturbation de l'équilibre.

Nous étudierons ensuite les solutions de cette équation : modes de Fourier, profils progressifs $F(k \cdot r - \omega t)$, propagation purement advective, diffusion-réaction, puis advection–diffusion–réaction. Enfin, lorsque le régime linéaire prévoit une croissance exponentielle, nous réintroduirons le premier terme non linéaire susceptible de saturer l'instabilité. Une non-linéarité cubique conduit alors à une équation de type Allen–Cahn / Ginzburg–Landau réelle et, pour le profil d'onde, à une équation de Duffing amortie. L'énergie modale obéit, dans une approximation monomode, à une loi logistique de saturation.

Le fil directeur sera donc :

$$réseau\ LV\ discret \rightarrow opérateur\ continu \rightarrow advection–diffusion–réaction \rightarrow propagation\ et\ sélection\ des\ modes$$

1. Le système de Lotka–Volterra comme réseau discret

Considérons un système de Lotka–Volterra généralisé à N composantes :

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i - x_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, N.$$

Le vecteur d'état est

$$X_N(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))^T,$$

et la matrice $A_N = (a_{ij})$ encode l'architecture des interactions.

Dans une interprétation purement écologique, l'indice i distingue des espèces. Dans l'interprétation qui nous intéresse ici, chaque composante est associée à un nœud ou à une cellule localisée autour d'un point r_i d'un domaine Ω. L'existence d'une géométrie sous-jacente est l'hypothèse qui permet de parler de limite spatiale.

Cette hypothèse est essentielle. Une matrice aléatoire sans notion de proximité n'a aucune raison de converger vers un Laplacien ordinaire. Pour qu'un opérateur différentiel local émerge, les interactions doivent devenir, au moins asymptotiquement, **locales ou à portée courte**, et les positions r_i doivent remplir le domaine de façon suffisamment régulière.

2. Passage de N fini au champ continu

Lorsque $N \to \infty$ et que la distance typique entre nœuds tend vers zéro, on suppose qu'il existe une fonction suffisamment régulière telle que

$$x_i(t) \simeq x(r_i, t).$$

Le vecteur X_N devient ainsi un champ

$$X_N(t) \to x(r, t).$$

La matrice A_N devient, elle aussi, un objet continu. Dans le cas le plus général, la somme matricielle est remplacée par un opérateur intégral :

$$\sum_j a_{ij} x_j \to A[x](r) = \int_\Omega K(r, r') x(r', t) dr'.$$

Le noyau $K(r, r')$ est la limite continue de la structure d'interaction. Il indique comment l'état au point r' influence celui du point r.

Le système LV prend alors la forme non locale

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r(r)x(r, t) - x(r, t)A[x](r, t).$$

À ce niveau, nous n'avons encore ni diffusion ni advection. Nous avons remplacé une matrice de dimension croissante par un opérateur intégral de dimension infinie.

3. Hypothèses permettant l'émergence d'un opérateur différentiel

Pour passer de l'opérateur intégral à un opérateur différentiel local, nous introduisons plusieurs hypothèses.

3.1. Homogénéité locale

Sur l'échelle considérée, supposons que le réseau soit presque homogène et que le noyau dépende principalement du déplacement relatif :

$$K(r, r') \simeq K(\xi), \xi = r' - r.$$

L'opérateur devient une convolution locale :

$$A[x](r) = \int K(\xi) x(r + \xi, t) d\xi.$$

3.2. Portée d'interaction courte

On suppose que $K(\xi)$ décroît suffisamment vite lorsque $|\xi)$ augmente. Les valeurs de x qui contribuent le plus à l'intégrale sont donc proches de r.

3.3. Régularité du champ

Le champ $x(r, t)$ doit varier lentement sur l'échelle de portée du noyau. On peut alors effectuer un développement de Taylor :

$$x(r + \xi, t) = x + \xi_\alpha \partial_\alpha x + \frac{1}{2}\xi_\alpha \xi_\beta \partial_{\alpha\beta} x + \frac{1}{6}\xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \partial_{\alpha\beta\gamma} x + \cdots.$$

Les indices répétés sont sommés.

4. Les moments du noyau : réaction, advection et diffusion

Introduisons les moments spatiaux du noyau :

$$M_0 = \int K(\xi) d\xi,$$

$$M_1 = \int \xi K(\xi) d\xi,$$

et

$$\left(M_2\right)_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta K(\xi) d\xi.$$

En substituant le développement de Taylor dans l'opérateur intégral, on obtient

$$A[x] \simeq M_0 x + M_1 \cdot \nabla x + \frac{1}{2} M_2 : \nabla\nabla x + \cdots.$$

Cette expression donne une lecture simple des différents ordres.

- Le moment d'ordre zéro produit un terme local.
- Le premier moment produit un terme de transport dirigé.

- Le second moment produit un opérateur diffusif ou anti-diffusif.
- Les moments d'ordres supérieurs engendrent des dérivées d'ordres supérieurs, importantes lorsque les échelles deviennent petites ou lorsque la diffusion du second ordre ne suffit plus à régulariser la dynamique.

Si le noyau est isotrope au second ordre,

$$M_2 = m_2 I,$$

alors

$$\frac{1}{2} M_2 : \nabla\nabla x = \frac{m_2}{2} \Delta x.$$

Si, de plus, le noyau est pair,

$$K(\xi) = K(-\xi),$$

alors

$$M_1 = 0,$$

et l'advection disparaît. Une asymétrie spatiale ou une non-réciprocité produit au contraire un premier moment non nul et donc un transport préférentiel.

5. Équation continue avant linéarisation

En substituant le développement de l'opérateur dans le LV continu, on obtient, au second ordre,

$$\frac{\partial x}{\partial t} \simeq rx - M_0 x^2 - xM_1 \cdot \nabla x - \frac{x}{2} M_2 : \nabla\nabla x + \cdots.$$

Dans le cas isotrope,

$$\frac{\partial x}{\partial t} \simeq rx - M_0 x^2 - xM_1 \cdot \nabla x - \frac{m_2}{2} x \Delta x + \cdots.$$

Il est important de remarquer que le Laplacien apparaît déjà, mais multiplié par x. Avant linéarisation, la limite continue du LV est donc généralement **non linéaire et non locale à l'ordre exact**, et son approximation locale contient une diffusion non linéaire.

6. Linéarisation autour de l'équilibre homogène

Supposons maintenant qu'il existe un équilibre spatialement homogène $x_0 > 0$. Pour un état constant, les gradients et le Laplacien s'annulent. L'équilibre vérifie donc

$$rx_0 - M_0 x_0^2 = 0.$$

Pour $x_0 \neq 0$,

$$M_0 x_0 = r.$$

Écrivons une petite perturbation :

$$x(r,t) = x_0 + X(r,t), |X) \ll x_0.$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en X, on obtient

$$\frac{\partial X}{\partial t} = - rX - x_0 M_1 \cdot \nabla X - \frac{x_0}{2} M_2 : \nabla\nabla X + \cdots.$$

On définit alors

$$R = - r,$$
$$v = x_0 M_1,$$

et, dans le cas isotrope,

$$D = - \frac{x_0 m_2}{2}.$$

La dynamique linéarisée devient

$$\frac{\partial X}{\partial t} = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X + \cdots.$$

Cette équation n'est donc pas obtenue en ajoutant extérieurement une diffusion au modèle LV. Elle résulte de trois opérations successives : **passage au continuum, développement local de l'opérateur d'interaction, puis linéarisation autour de l'équilibre du réseau**.

6.1. Remarque essentielle sur le signe de D

Le coefficient D est un coefficient effectif. Son signe dépend de la convention de signe de l'interaction et du second moment du noyau. La condition

$$D > 0$$

correspond à une diffusion ordinaire qui amortit les petites échelles. Si

$$D < 0,$$

le terme du second ordre est anti-diffusif : les grands nombres d'onde sont amplifiés dans l'approximation tronquée. Une telle situation impose généralement de conserver les termes d'ordre supérieur, par exemple un terme $- K_4 \Delta^2 X$ avec $K_4 > 0$, afin d'obtenir une dynamique bien posée.

Cette réserve est importante : l'apparition formelle d'un Laplacien ne garantit pas à elle seule qu'il soit dissipatif.

7. Lecture physique des trois termes

L'équation

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X$$

sépare trois mécanismes.

Le terme

$$RX$$

représente la dynamique locale de la perturbation : $R < 0$ correspond à un rappel vers l'équilibre, $R > 0$ à une amplification locale.

Le terme

$$- v \cdot \nabla X$$

transporte la perturbation. Il ne modifie pas, dans un milieu homogène infini ou périodique, l'énergie totale du champ ; il déplace l'information et la phase.

Enfin,

$$D\Delta X$$

redistribue la perturbation spatialement. Pour $D > 0$, il pénalise les structures de petite longueur d'onde et lisse le champ.

8. Solution générale par transformée de Fourier

La méthode la plus naturelle pour l'équation linéaire à coefficients constants consiste à décomposer le signal en modes spatiaux :

$$X(r,t) = \int X\hat{}(q,t) e^{iq\cdot r} dq.$$

Pour un mode $e^{iq\cdot r}$,

$$\nabla \to iq, \Delta \to - q^2.$$

L'amplitude du mode satisfait

$$\frac{dX\hat{}}{dt} = \left(R - Dq^2 - iv \cdot q\right) X\hat{}.$$

D'où

$$X\hat{}(q,t) = X\hat{}(q,0) exp[\left(R - Dq^2\right)t) exp[- i(v \cdot q)t).$$

La relation spectrale est donc

$$\lambda(q) = R - Dq^2 - iv \cdot q.$$

Sa partie réelle est

$$\Re\lambda = R - Dq^2,$$

et sa partie imaginaire

$$\Im\lambda = -\ v \cdot q.$$

L'équation sépare ainsi exactement le **gain** et la **phase**.

9. Diffusion–réaction : discussion des solutions

Commençons par supprimer l'advection :

$$\partial_t X = RX + D\Delta X.$$

9.1. Solution fondamentale pour $D > 0$

Dans un espace de dimension d, la solution à partir d'une condition initiale $X_0(r)$ s'écrit

$$X(r,t) = e^{Rt} \int G_D(r - r', t) X_0(r') dr',$$

avec le noyau de chaleur

$$G_D(r,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} exp\left(-\frac{|r)^2}{4Dt}\right).$$

Deux phénomènes se superposent : la diffusion élargit la perturbation sur une longueur typique

$$\ell_D(t) \sim \sqrt{Dt},$$

alors que la réaction multiplie son amplitude globale par e^{Rt}.

9.2. Sélection des nombres d'onde

Pour chaque mode q,

$$\gamma(q) = R - Dq^2.$$

Si $R > 0$ et $D > 0$, il existe un nombre d'onde critique

$$q_c = \sqrt{\frac{R}{D}}.$$

Les modes tels que

$$q > q_c$$

sont amortis, tandis que ceux qui satisfont

$$q < q_c$$

sont amplifiés dans le modèle linéaire.

La longueur caractéristique associée est

$$\ell_c \sim \sqrt{\frac{D}{R}},$$

à un facteur 2π près selon la convention adoptée pour la longueur d'onde.

Le réseau agit donc comme un filtre spatial : les petites structures sont plus fortement dissipées que les grandes.

10. Advection pure : transport d'une perturbation

Considérons maintenant

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X.$$

La méthode des caractéristiques donne directement

$$X(r,t) = e^{Rt} X_0(r - vt).$$

Le profil initial est transporté à la vitesse v sans déformation. Son amplitude est simplement multipliée par e^{Rt}.

Ainsi :

- $R < 0$: le signal est transporté et amorti ;
- $R = 0$: transport pur ;
- $R > 0$: le signal est transporté et amplifié.

L'advection ne sélectionne pas les longueurs d'onde ; elle impose une vitesse et une phase de propagation.

11. Advection–diffusion–réaction : solution générale

En combinant les trois termes,

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X,$$

on obtient, pour $D > 0$,

$$X(r,t) = e^{Rt} \int G_D(r - vt - r', t) X_0(r') dr'.$$

La perturbation est donc simultanément :

1. transportée par l'advection ;
2. étalée par la diffusion ;
3. amplifiée ou amortie par la réaction.

Cette formule constitue une réponse complète au problème de Cauchy linéaire dans un milieu homogène infini.

12. Recherche d'un profil progressif $F(u)$

Cherchons maintenant une solution sous la forme

$$X(r,t) = F(u), u = k \cdot r - \omega t.$$

Pour éviter toute ambiguïté de notation, nous noterons dans la suite

$$u = k \cdot r - \omega t.$$

Les dérivées sont

$$\partial_t X = -\omega F',$$

$$\nabla X = kF',$$

et

$$\Delta X = k^2 F''.$$

L'EDP devient donc

$$Dk^2 F'' + (\omega - v \cdot k)F' + RF = 0.$$

Introduisons

$$a = \omega - v \cdot k.$$

On obtient

$$Dk^2 F'' + aF' + RF = 0.$$

13. Équation caractéristique et trois régimes

En posant

$$F(u) = e^{su},$$

on obtient

$$Dk^2 s^2 + as + R = 0.$$

Les racines sont

$$s_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4Dk^2 R}}{2Dk^2}.$$

Le discriminant

$$\Delta_u = a^2 - 4Dk^2 R$$

organise les solutions.

13.1. $\Delta_u > 0$: profils exponentiels

Les racines sont réelles et distinctes :

$$F(u) = C_1 e^{s_+ u} + C_2 e^{s_- u}.$$

Le profil est monotone ou combinaison de deux exponentielles. Selon les signes des racines, il peut décroître ou croître suivant la direction u.

13.2. $\Delta_u = 0$: régime critique

La racine est double :

$$s_c = -\frac{a}{2Dk^2},$$

et

$$F(u) = \left(C_1 + C_2 u\right) e^{s_c u}.$$

La surface

$$(\omega - v \cdot k)^2 = 4Dk^2 R$$

sépare les profils exponentiels des profils oscillants.

13.3. $\Delta_u < 0$: oscillations sous enveloppe exponentielle

Les racines deviennent complexes :

$$s_\pm = -\frac{a}{2Dk^2} \pm i q_u,$$

avec

$$q_u = \frac{\sqrt{4Dk^2 R - a^2}}{2Dk^2}.$$

La solution est

$$F(u) = e^{-au/\left(2Dk^2\right)} [C_1 cos\left(q_u u\right) + C_2 sin\left(q_u u\right)).$$

Le signe de a fixe le sens d'amplification ou d'amortissement de l'enveloppe le long de u.

14. Une nuance sur l'existence des ondes progressives linéaires

L'existence formelle d'une solution $F(u)$ ne signifie pas qu'il existe une onde localisée, bornée sur toute la droite, satisfaisant n'importe quelles conditions aux limites.

Pour $a \neq 0$, la solution oscillante possède une enveloppe exponentielle et croît nécessairement dans une des deux directions de u. Les profils exponentiels présentent la même difficulté. Dans un domaine infini, une solution non triviale bornée aux deux extrémités est donc très restrictive.

Le cas

$$a = 0, \omega = v \cdot k,$$

est particulier. L'équation devient

$$Dk^2 F'' + RF = 0.$$

Si $R/D > 0$,

$$F(u) = C_1 cos\left(\sqrt{\frac{R}{Dk^2}}u\right) + C_2 sin\left(\sqrt{\frac{R}{Dk^2}}u\right),$$

et l'on obtient une oscillation bornée. Pour construire des fronts, impulsions ou ondes localisées robustes, il faut généralement conserver les non-linéarités.

15. Onde plane et relation de dispersion

Pour le problème linéaire, l'ansatz d'onde plane est souvent plus direct :

$$X(r,t) = Ae^{i(q\cdot r - \omega t)}.$$

La substitution donne

$$-i\omega = R - Dq^2 - iv \cdot q.$$

On peut aussi écrire la solution réelle sous la forme

$$X(r,t) = A_0 e^{\left(R - Dq^2\right)t} cos[q \cdot (r - vt) + \phi).$$

Le sens physique est immédiat :

$$R - Dq^2$$

contrôle le gain ou l'amortissement, tandis que

$$v \cdot q$$

contrôle la phase de propagation.

16. Rupture de l'équilibre du réseau et propagation de la perturbation

Le résultat précédent permet de reformuler le phénomène en termes de réseau. Une perturbation appliquée à l'équilibre n'excite pas un signal unique : elle excite un ensemble de modes spatiaux. Chaque composante du signal d'entrée possède un nombre d'onde q et reçoit un gain

$$G(q,t) = e^{\left(R - Dq^2\right)t}.$$

Ainsi, selon le contenu spectral de l'entrée et les paramètres internes du réseau, la perturbation peut :

- être rapidement amortie ;
- se propager presque sans perte ;
- être amplifiée ;
- changer de forme parce que ses différentes composantes spectrales ne subissent pas le même gain.

Le réseau est donc un **filtre spatio-temporel**. Son équilibre n'est pas seulement un point fixe ; il définit un état autour duquel toute perturbation est décomposée, transportée, filtrée et éventuellement amplifiée.

17. Pourquoi le régime linéaire devient insuffisant en cas d'instabilité

Si, pour un mode donné,

$$\mu(q) = R - Dq^2 > 0,$$

le modèle linéaire prévoit

$$|X_q(t)) \propto e^{\mu(q)t}.$$

Cette croissance illimitée n'est pas physiquement acceptable. Elle signifie surtout que l'hypothèse de petite perturbation a cessé d'être valide. Les termes négligés lors du développement autour de l'équilibre doivent alors être réintroduits.

Le premier mécanisme simple de saturation consiste à ajouter une non-linéarité cubique stabilisante :

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X - gX^3, g > 0.$$

Cette équation appartient à la famille des équations réelles de Ginzburg–Landau / Allen–Cahn avec transport.

18. Potentiel local à double puits

La dynamique locale

$$X^{\cdot} = RX - gX^3$$

peut s'écrire

$$X^{\cdot} = -\frac{dV}{dX},$$

avec

$$V(X) = -\frac{R}{2}X^2 + \frac{g}{4}X^4.$$

Pour $R > 0$ et $g > 0$, ce potentiel possède deux minima :

$$X_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{R}{g}},$$

et $X = 0$ devient un maximum local. Le terme cubique ne supprime donc pas l'instabilité linéaire ; il lui fournit une **amplitude finie de saturation**.

19. Réduction à une équation de Duffing pour le profil progressif

En reprenant

$$X(r,t) = F(u), u = k \cdot r - \omega t,$$

l'équation non linéaire devient

$$Dk^2F'' + (\omega - v \cdot k)F' + RF - gF^3 = 0.$$

C'est une équation de Duffing amortie pour la variable fictive u.

En posant

$$m = Dk^2, c = \omega - v \cdot k,$$

on peut l'écrire

$$mF'' + cF' + \frac{dU}{dF} = 0,$$

avec le potentiel mécanique

$$U(F) = \frac{R}{2}F^2 - \frac{g}{4}F^4.$$

Ce potentiel mécanique est l'opposé du potentiel de Lyapunov local V. Cette inversion de signe est classique dans la réduction en onde progressive et ne doit pas être confondue avec l'énergie physique du champ.

Le portrait de phase (F, F') permet alors de discuter :

- les états homogènes, associés aux points fixes ;
- les fronts, associés à des orbites hétéroclines ;
- les impulsions localisées, associées à des orbites homoclines ;
- les trains d'ondes, associés à des orbites périodiques lorsque la structure de l'équation le permet.

20. Saturation d'un mode presque monochromatique

Pour quantifier la saturation énergétique, considérons une approximation monomode :

$$X(r,t) \simeq A(t)cos(q \cdot r - \omega t).$$

Le terme cubique donne

$$X^3 = A^3cos^3\theta = \frac{3}{4}A^3cos\theta + \frac{1}{4}A^3cos3\theta.$$

En ne conservant que la projection sur le mode fondamental, on obtient l'équation d'amplitude

$$\frac{dA}{dt} = \mu(q)A - \frac{3g}{4}A^3,$$

avec

$$\mu(q) = R - Dq^2.$$

Cette équation est la forme normale de Landau d'une saturation supercritique.

Si

$$\mu(q) < 0,$$

le mode décroît vers zéro.

Si

$$\mu(q) > 0,$$

le mode croît initialement, puis atteint l'amplitude

$$A_{sat}^2(q) = \frac{4[R-Dq^2)}{3g}.$$

La diffusion ne fait donc pas seulement amortir les perturbations : elle abaisse l'amplitude de saturation des modes de nombre d'onde élevé.

21. Énergie modale et loi logistique

Définissons une énergie modale proportionnelle au carré de l'amplitude :

$$E = A^2.$$

Alors

$$\frac{dE}{dt} = 2A\frac{dA}{dt},$$

et donc

$$\frac{dE}{dt} = 2\mu E - \frac{3g}{2}E^2.$$

Pour $\mu > 0$, on peut écrire

$$\frac{dE}{dt} = 2\mu E\left(1 - \frac{E}{E_{sat}}\right),$$

avec

$$E_{sat} = \frac{4\mu}{3g} = \frac{4\left(R - Dq^2\right)}{3g}.$$

La solution explicite est

$$E(t) = \frac{E_{sat}}{1 + \left(\frac{E_{sat}}{E_0} - 1\right)e^{-2\mu t}}.$$

Au début, lorsque $E \ll E_{sat}$, l'énergie croît presque exponentiellement. Puis la non-linéarité devient comparable au gain linéaire et la croissance ralentit. Finalement,

$$E(t) \to E_{sat}.$$

La saturation énergétique apparaît donc comme l'équilibre entre un mécanisme de production linéaire et une dissipation non linéaire d'ordre quadratique en énergie.

22. Bilan énergétique global

La même idée peut être formulée sans approximation monomode. Pour

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X - gX^3,$$

considérons la norme quadratique

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} X^2 dV.$$

En multipliant l'EDP par X et en intégrant, on obtient, sous conditions périodiques ou en l'absence de flux aux frontières,

$$\frac{dE}{dt} = R\int X^2 dV - D\int |\nabla X)^2 dV - g\int X^4 dV.$$

Le terme d'advection ne contribue pas au bilan global si v est constant et si le flux de bord est nul ou périodique.

Cette identité fournit une lecture physique particulièrement claire :

$$\frac{dE}{dt} = production\ locale - dissipation\ spatiale - saturation\ non\ linéaire.$$

Le terme $R\int X^2$ injecte ou retire de l'énergie selon le signe de R. Le terme $D\int |\nabla X)^2$ pénalise les gradients et donc les petites échelles. Le terme $g\int X^4$ limite les amplitudes fortes.

23. Interprétation comme sélection d'échelles

Pour $R > 0$ et $D > 0$, seuls les modes satisfaisant

$$q < q_c = \sqrt{\frac{R}{D}}$$

sont linéairement instables. Parmi eux, l'amplitude saturée vaut

$$A_{sat}^2(q) = \frac{4R}{3g}\left(1 - \frac{q^2}{q_c^2}\right).$$

L'équation définit donc une fenêtre d'échelles actives. Les petites structures, de grand q, sont supprimées par diffusion. Les structures suffisamment grandes peuvent être amplifiées puis saturées par la non-linéarité.

Dans cette approximation simple, le maximum du gain est à $q = 0$. Une véritable sélection d'un nombre d'onde fini nécessite généralement des mécanismes supplémentaires : diffusion croisée, plusieurs champs, retard, termes d'ordre quatre, non-localité résiduelle ou couplage entre modes. Ces extensions conduisent aux équations de Turing, Swift–Hohenberg, Ginzburg–Landau complexe ou à d'autres modèles de structures dissipatives.

24. Ce qui est exact, ce qui est approché

La chaîne de raisonnement contient plusieurs niveaux qu'il est utile de distinguer.

24.1. Résultats exacts dans le cadre posé

La transformation d'une matrice dense de grande taille en opérateur intégral est exacte lorsqu'une limite de noyau existe. La solution de l'équation linéaire à coefficients constants par Fourier est exacte. Le bilan énergétique global de l'équation cubique est également exact sous les conditions aux limites indiquées.

24.2. Approximations contrôlées

Le remplacement de l'opérateur intégral par $M_0 + M_1 \cdot \nabla + \frac{1}{2}M_2 : \nabla\nabla + \cdots$ repose sur un développement de longue longueur d'onde : le champ doit varier lentement par rapport à la portée des interactions. La linéarisation autour de x_0 suppose $|X) \ll x_0$.

24.3. Fermeture phénoménologique de saturation

Le terme $-\ gX^3$ représente le premier terme impair stabilisant compatible avec une symétrie $X \mapsto -\ X$ dans une expansion locale. Il constitue une fermeture générique de type Landau ; son coefficient doit, dans un modèle dérivé d'un réseau concret, être calculé à partir des termes non linéaires d'ordre supérieur ou identifié sur les données.

24.4. Approximation monomode

L'équation logistique de l'énergie découle d'une projection sur le mode fondamental et néglige le troisième harmonique et les couplages entre modes. Elle décrit bien le mécanisme de saturation près du seuil, mais ne représente pas les transferts d'énergie complexes d'un régime fortement non linéaire.

25. Synthèse conceptuelle

L'intérêt de cette construction est qu'elle relie plusieurs descriptions qui apparaissent souvent séparées.

Au niveau discret, le réseau est décrit par un très grand système d'EDO de type Lotka–Volterra. La matrice d'interaction contient à la fois l'intensité, la portée et l'éventuelle asymétrie des couplages.

À la limite $N \to \infty$, l'état devient un champ et la matrice devient un opérateur. Le développement en moments du noyau transforme cet opérateur en une série de dérivées spatiales : le moment d'ordre zéro contribue à la réaction, le premier moment à l'advection, le second à la diffusion. Après linéarisation autour de l'équilibre, la dynamique prend la forme

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X + \cdots.$$

Une perturbation de l'équilibre se décompose alors en modes spatiaux dont le gain est

$$\gamma(q) = R - Dq^2,$$

et dont la phase est transportée par

$$\omega_{adv} = v \cdot q.$$

Le réseau agit comme un filtre : certaines composantes du signal sont amorties, d'autres peuvent être amplifiées. Si l'amplification linéaire devient positive, le modèle linéaire cesse d'être valable. Le premier terme non linéaire stabilisant conduit à

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X - gX^3,$$

et, pour une onde progressive, à une équation de Duffing amortie. Dans une approximation monomode, l'énergie satisfait

$$\dot{E} = 2\left(R - Dq^2\right)E - \frac{3g}{2}E^2,$$

et se sature à

$$E_{sat} = \frac{4\left(R - Dq^2\right)}{3g}.$$

La trajectoire conceptuelle complète peut ainsi être résumée par

$$interaction\ discrète \to opérateur\ continu \to propagation \to amplification\ sélective \to saturation\ non\ linéaire.$$

Cette lecture donne au passage du réseau vers la diffusion-réaction un sens plus profond qu'une simple analogie. Le Laplacien n'est plus un terme ajouté par convenance : il est la trace, à grande échelle, du second moment de la structure d'interaction. De même, l'advection est la trace du premier moment et donc de l'asymétrie du réseau. La dynamique macroscopique conserve ainsi, sous une forme condensée, l'information géométrique et directionnelle contenue dans le réseau microscopique.

Conclusion

À partir d'un Lotka–Volterra de grande dimension, la limite continue ne consiste pas à juxtaposer une cinétique locale et une diffusion choisie a priori. Elle consiste à changer de niveau de description. Le vecteur devient un champ ; la matrice devient un opérateur ; les moments de cet opérateur deviennent des dérivées spatiales. Le passage à une équation d'advection–diffusion–réaction apparaît alors comme une approximation de longue longueur d'onde de la dynamique collective du réseau.

Autour de l'équilibre, l'équation linéaire fournit une relation de dispersion simple qui permet de décider quels modes sont amortis ou amplifiés. La rupture de stabilité se traduit par la croissance de certaines composantes du signal. Cette croissance ne peut cependant se poursuivre indéfiniment : les non-linéarités négligées reprennent le contrôle et saturent l'amplitude. Une fermeture cubique suffit à faire apparaître un potentiel à double puits, une équation de Duffing pour les profils progressifs et une loi logistique pour l'énergie modale.

On obtient ainsi une chaîne de modèles emboîtés, allant du réseau discret à la structure dissipative continue, qui permet de suivre sans rupture conceptuelle la naissance, la propagation, l'amplification et la saturation d'une perturbation.

26. Ancrage bibliographique et portée de la construction

La chaîne de raisonnement développée dans ce chapitre ne correspond pas à un théorème unique déjà formulé sous exactement la même forme. Elle assemble plusieurs familles de résultats qui, dans la littérature, sont le plus souvent étudiées séparément : systèmes de Lotka–Volterra spatialement étendus, limites de grande population, interactions non locales, passage des noyaux intégraux aux opérateurs locaux, équations de diffusion–advection, ondes progressives, puis réduction près d'une instabilité vers une équation d'amplitude saturante.

Cette distinction est importante. La construction proposée ici doit être comprise comme une **synthèse de niveaux de description compatibles**, et non comme l'affirmation que toute matrice de Lotka–Volterra converge automatiquement vers un Laplacien. Le passage

$$A_N \to A \to a_0 I + a_1 \cdot \nabla + a_2 \Delta + \cdots$$

suppose une géométrie sous-jacente, une interaction suffisamment locale, une régularité du champ et l'existence de moments du noyau. Sous ces hypothèses, les résultats connus sur les modèles non locaux et leurs limites locales donnent un cadre naturel à l'interprétation développée dans les sections précédentes.

26.1. Des systèmes de Lotka–Volterra spatiaux aux modèles continus

Les premières références à rapprocher de notre démarche sont les travaux consacrés aux systèmes de Lotka–Volterra dans des environnements distribués, avec migration ou diffusion entre sous-populations. Ils montrent qu'un système LV ne doit pas être limité à une dynamique purement temporelle : l'espace peut être introduit par des couplages entre sites ou par des opérateurs de diffusion, et la stabilité de l'équilibre dépend alors conjointement de la cinétique locale et de la structure spatiale.

Les travaux de **Yasuhiro Takeuchi** sur les systèmes de Lotka–Volterra généralisés, rassemblés notamment dans *Global Dynamical Properties of Lotka–Volterra Systems* (World Scientific, 1996), constituent une référence classique pour cette extension. Ils analysent la stabilité globale, la permanence, la diffusion entre habitats et l'effet des retards. Pour notre construction, cette littérature montre que l'on peut considérer un LV de grande dimension comme une dynamique répartie entre sous-systèmes couplés et que le couplage spatial modifie le spectre et la stabilité de l'ensemble.

Un deuxième niveau est fourni par les modèles spatiaux stochastiques. **U. C. Täuber**, dans « Population oscillations in spatial stochastic Lotka–Volterra models: a field-theoretic perturbational analysis » (2012), part de modèles prédateur–proie définis sur un réseau spatial et construit une description de champ dans la limite continue. Cette approche est particulièrement proche de notre perspective : les degrés de liberté spatiaux et les fluctuations du réseau microscopique se condensent, à grande échelle, en coefficients effectifs de fréquence et de diffusion. Elle fournit donc un exemple explicite du passage

$$réseau\ microscopique \rightarrow champ\ continu.$$

Référence : U. C. Täuber, *Population oscillations in spatial stochastic Lotka–Volterra models: A field-theoretic perturbational analysis*, arXiv:1206.2303 (2012).

26.2. Noyaux non locaux, grande population et limite locale

L'étape la plus directement reliée à notre remplacement de la matrice A_N par un opérateur intégral est représentée par les travaux de **Joaquin Fontbona et Sylvie Méléard**. Dans « Non local Lotka–Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium », ils construisent un modèle individuel stochastique spatial puis étudient sa limite lorsque la population devient grande. La limite est un système parabolique fortement couplé comportant des nonlinearités non locales et de la diffusion croisée. Ils étudient ensuite le passage de noyaux de compétition vers une mesure de Dirac, ce qui conduit à une version locale du système.

Cette démarche fournit un support mathématique très proche de la chaîne

$$agents\ ou\ nœuds\ nombreux \rightarrow densité\ continue \rightarrow noyau\ non\ local \rightarrow interaction\ locale.$$

Elle rappelle toutefois que la limite peut produire des termes de **cross-diffusion** et pas seulement un coefficient scalaire D. Le modèle

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X$$

est donc une fermeture isotrope et simplifiée d'une classe plus générale d'opérateurs continus.

Référence : J. Fontbona et S. Méléard, « Non local Lotka–Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium », *Journal of Mathematical Biology*, 70 (2015), 829–854 ; version étendue arXiv:1303.3939.

Une autre famille récente de travaux étudie directement des **Lotka–Volterra non locaux**. D. J. Needham et collaborateurs analysent par exemple une extension du modèle de compétition dans laquelle l'interaction est décrite par un noyau spatial de portée finie. Ces modèles sont très utiles pour notre interprétation, car la convolution

$$A[x)(r) = \int K(\xi)x(r + \xi)d\xi$$

est précisément l'objet à partir duquel un développement de Taylor fait émerger les moments du noyau.

Référence : D. J. Needham et al., « The non-local Lotka–Volterra system with a top hat kernel », *Proceedings of the Royal Society A*, 2023, DOI 10.1098/rspa.2023.0381.

26.3. Le développement en moments : réaction, advection et diffusion

La littérature sur les équations non locales fournit le cadre général du développement que nous avons utilisé. Lorsque le noyau est suffisamment concentré autour de l'origine, on développe

$$x(r + \xi) = x + \xi_\alpha \partial_\alpha x + \frac{1}{2}\xi_\alpha \xi_\beta \partial_{\alpha\beta} x + \cdots.$$

L'opérateur devient alors

$$A[x) \simeq M_0 x + M_1 \cdot \nabla x + \frac{1}{2} M_2 : \nabla\nabla x + \cdots.$$

Cette formule donne une interprétation directe aux coefficients macroscopiques : le moment d'ordre zéro contribue au terme local de réaction ; le premier moment produit un transport directionnel si le noyau est asymétrique ; le second moment produit une diffusion. Dans le cas isotrope,

$$M_2 = m_2 I,$$

et le terme du second ordre devient proportionnel au Laplacien :

$$\frac{1}{2} M_2 : \nabla\nabla x \propto \Delta x.$$

Notre identification

$$asymétrie \rightarrow advection, variance\ spatiale\ des\ interactions \rightarrow diffusion$$

est donc une version physique du développement classique en moments d'un opérateur non local.

Il convient néanmoins de rappeler que, si les moments n'existent pas ou si le noyau possède une queue longue, la limite n'est plus nécessairement laplacienne. Des opérateurs non locaux ou fractionnaires peuvent alors apparaître. Le Laplacien correspond donc au régime de portée courte et de second moment fini.

26.4. Systèmes Lotka–Volterra avec diffusion et advection

L'équation obtenue après linéarisation,

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X,$$

s'inscrit dans une littérature étendue sur les systèmes de compétition diffusion–advection. Ces travaux étudient l'existence des solutions, la stabilité des états stationnaires, l'effet de l'hétérogénéité spatiale et la compétition entre stratégies de dispersion.

Par exemple, L. Chen et collaborateurs ont étudié la stabilité globale d'un système de compétition Lotka–Volterra comportant simultanément diffusion et advection dans un environnement

spatialement hétérogène. Des travaux plus récents analysent également des systèmes dans lesquels l'advection dépend de ressources dynamiques.

Référence indicative : L. Chen et al., « Global Stability of a Lotka–Volterra Competition–Diffusion–Advection System », *Axioms*, 10 (2021), article 166.

Cette littérature confirme que les trois mécanismes que nous séparons — réaction, transport et diffusion — peuvent être traités dans un même cadre dynamique. Notre contribution conceptuelle consiste surtout à les faire dériver d'un même opérateur d'interaction dans une limite de réseau.

26.5. Ondes progressives et condition d'existence

La substitution

$$X(r,t) = F(k \cdot r - \omega t)$$

est classique dans l'étude des systèmes réaction–diffusion. Pour le Lotka–Volterra diffusif, **Anthony W. Leung, Xiaojie Hou et Wei Feng** ont établi l'existence de familles d'ondes progressives et déterminé des vitesses minimales ainsi que les taux asymptotiques des profils.

Référence : A. W. Leung, X. Hou et W. Feng, « Traveling wave solutions for Lotka–Volterra system re-visited », *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 15 (2011), 171–196, DOI 10.3934/dcdsb.2011.15.171.

Cette référence est particulièrement importante pour notre discussion de l'équation de profil. Dans notre approximation linéaire,

$$Dk^2F'' + (\omega - v \cdot k)F' + RF = 0,$$

la nature des solutions est entièrement contrôlée par le discriminant

$$\Delta_c = (\omega - v \cdot k)^2 - 4Dk^2R.$$

La littérature sur les ondes LV montre toutefois que, dans le problème non linéaire complet, l'existence d'un front ne se réduit pas à ce discriminant : elle dépend aussi des états asymptotiques, de leur stabilité, de la positivité des solutions et de la vitesse de propagation. Notre calcul doit donc être lu comme l'analyse locale du profil près d'un état de référence.

26.6. De Lotka–Volterra à une équation bistable scalaire

L'introduction d'une non-linéarité cubique

$$-gX^3$$

nécessite également une interprétation précise. Elle n'est pas une conséquence universelle et exacte du modèle LV initial. Elle représente une **forme normale de saturation** obtenue lorsque l'on développe la dynamique autour d'un seuil et que les termes d'ordre supérieur deviennent nécessaires pour empêcher la croissance illimitée prédite par la théorie linéaire.

Une référence particulièrement proche de cette idée est le travail de **Martin Strugarek et Nicolas Vauchelet**, qui montrent qu'un système de réaction–diffusion 2×2 de type Lotka–Volterra peut, dans une limite singulière appropriée, être réduit à une équation scalaire fermée bistable. Ce

résultat justifie rigoureusement, dans une classe de problèmes, le passage d'un système LV multicomposante vers une description scalaire de type réaction–diffusion bistable.

Référence : M. Strugarek et N. Vauchelet, « Reduction to a single closed equation for 2 by 2 reaction-diffusion systems of Lotka–Volterra type », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76 (2016), 2068–2080.

Dans notre écriture simplifiée,

$$\partial_t X = RX - v \cdot \nabla X + D\Delta X - gX^3,$$

le potentiel local associé est

$$V(X) = -\frac{R}{2}X^2 + \frac{g}{4}X^4.$$

Pour $R > 0$ et $g > 0$, il possède deux minima

$$X_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{R}{g}},$$

ce qui rattache la fermeture à la famille des équations bistables de type Allen–Cahn ou Ginzburg–Landau réelle.

26.7. Saturation de l'énergie : de Landau à une loi logistique

La projection monomode

$$X(r,t) \simeq A(t)cos(q \cdot r - \omega t)$$

et l'identité

$$cos^3\theta = \frac{3}{4}cos\theta + \frac{1}{4}cos3\theta$$

conduisent, lorsque l'on néglige le troisième harmonique, à l'équation d'amplitude

$$A^{\cdot} = \mu(q)A - \frac{3g}{4}A^3, \mu(q) = R - Dq^2.$$

C'est la forme normale de Landau d'une instabilité supercritique saturée. Elle ne dépend plus spécifiquement de l'origine Lotka–Volterra : elle appartient à la théorie générale des bifurcations et des équations d'amplitude.

En posant

$$E = A^2,$$

on obtient

$$E^{\cdot} = 2\mu E - \frac{3g}{2}E^2$$

et donc

$$E_{sat} = \frac{4\left(R - Dq^2\right)}{3g}, R - Dq^2 > 0.$$

La saturation logistique de l'énergie est ainsi la traduction énergétique de la saturation cubique de l'amplitude. Cette dernière étape relie notre description de réseau aux méthodes classiques de Landau, Ginzburg–Landau et Allen–Cahn utilisées pour décrire l'apparition et la saturation d'un paramètre d'ordre près d'un seuil d'instabilité.

26.8. Ce qui est établi et ce qui constitue la synthèse proposée

La bibliographie permet finalement de séparer trois niveaux.

Premier niveau : résultats bien établis. Les systèmes LV peuvent être spatialement distribués ; des modèles individuels ou sur réseau possèdent des limites continues ; les interactions non locales se représentent par des noyaux ; des limites locales peuvent conduire à des EDP ; des systèmes LV diffusion–advection possèdent des états stationnaires et des ondes progressives ; des systèmes LV peuvent, sous certaines limites singulières, se réduire à une équation bistable scalaire.

Deuxième niveau : approximation de longue longueur d'onde. Notre passage

$$A \simeq M_0 + M_1 \cdot \nabla + \frac{1}{2} M_2 : \nabla\nabla + \cdots$$

est une fermeture asymptotique. Le remplacement du tenseur du second moment par un scalaire D suppose en plus une isotropie suffisante.

Troisième niveau : synthèse conceptuelle. Ce chapitre propose de lire l'ensemble des étapes sous la forme d'une même trajectoire de réduction :

$$LV\ de\ grande\ dimension \rightarrow champ\ continu \rightarrow opérateur\ non\ local \rightarrow R - v \cdot \nabla + D\Delta \rightarrow modes\ propagatifs \rightarrow c$$

Cette chaîne complète n'est pas, à notre connaissance, un résultat canonique présenté comme tel dans une seule référence. Son intérêt est surtout **pédagogique et unificateur** : elle montre comment des objets qui appartiennent à des domaines mathématiques voisins peuvent être organisés en une succession cohérente de changements d'échelle.

27. Bibliographie commentée

Fontbona, J. & Méléard, S. (2015). « Non local Lotka–Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium », *Journal of Mathematical Biology*, 70, 829–854. Version étendue : arXiv:1303.3939.
Référence majeure pour le passage d'un modèle individuel spatial à une limite de grande population décrite par un système parabolique non local. Les auteurs étudient aussi la limite où les noyaux de compétition deviennent locaux. Elle étaye directement le passage « population/réseau nombreux → champ → noyau → modèle local » et montre que la limite la plus générale peut contenir de la cross-diffusion.

Täuber, U. C. (2012). « Population oscillations in spatial stochastic Lotka–Volterra models: A field-theoretic perturbational analysis », arXiv:1206.2303.
Travail de physique statistique partant de modèles LV stochastiques sur réseau spatial. La

construction d'une théorie de champ en limite continue et le calcul de corrections effectives sur fréquence et diffusion illustrent concrètement le changement d'échelle réseau → champ.

Needham, D. J. et al. (2023). « The non-local Lotka–Volterra system with a top hat kernel », *Proceedings of the Royal Society A*, DOI 10.1098/rspa.2023.0381.
Étude d'un Lotka–Volterra explicitement non local où l'interaction est définie par un noyau spatial. Cette référence est utile pour interpréter la matrice d'interaction de grande dimension comme un opérateur de convolution avant d'effectuer une approximation locale par les moments du noyau.

Takeuchi, Y. (1996). *Global Dynamical Properties of Lotka–Volterra Systems*. World Scientific.
Ouvrage de référence sur les propriétés globales des systèmes LV : stabilité, permanence, diffusion entre sous-systèmes et retards. Il fournit le socle dynamique nécessaire pour replacer les extensions spatiales dans la théorie générale de Lotka–Volterra.

Chen, L. et al. (2021). « Global Stability of a Lotka–Volterra Competition–Diffusion–Advection System », *Axioms*, 10, 166.
Exemple explicite de système LV combinant réaction, diffusion et advection dans un environnement hétérogène. La référence montre que les trois mécanismes apparaissant dans notre équation macroscopique sont effectivement étudiés conjointement dans les modèles spatiaux de compétition.

Leung, A. W., Hou, X. & Feng, W. (2011). « Traveling wave solutions for Lotka–Volterra system re-visited », *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 15, 171–196, DOI 10.3934/dcdsb.2011.15.171.
Référence centrale pour la discussion des solutions $F(x - ct)$. Les auteurs démontrent l'existence d'ondes progressives pour le système LV classique avec diffusion, obtiennent une vitesse minimale et étudient les comportements asymptotiques. Elle complète l'analyse locale par discriminant menée dans ce chapitre.

Strugarek, M. & Vauchelet, N. (2016). « Reduction to a single closed equation for 2 by 2 reaction-diffusion systems of Lotka–Volterra type », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76, 2068–2080.
Référence particulièrement importante pour la dernière étape du raisonnement. Elle montre qu'un système de réaction–diffusion de type LV à deux composantes peut se réduire, dans une limite singulière rigoureuse, à une équation scalaire bistable. Elle fournit donc un pont mathématique vers les modèles de type Allen–Cahn utilisés pour décrire fronts, bistabilité et saturation.

Chen, C.-N. & Coti Zelati, V. (2022). « Traveling wave solutions to the Allen–Cahn equation », *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 39, 905–926, DOI 10.4171/AIHPC/23.
Cette référence replace la fermeture cubique dans la théorie des équations bistables. Elle rappelle que le potentiel double puits conduit naturellement à des fronts et à des solutions progressives reliant deux états stables.

27.1. Lecture transversale de la bibliographie

La bibliographie peut finalement être parcourue comme la succession des niveaux de notre modèle :

$$Takeuchi: dynamique\ LV\ et\ stabilité\ \downarrow\ Täuber,\ Fontbona–Méléard: réseau\ /\ individus\ vers\ continuum\ \downarrow\ Needh$$

Ce parcours confirme que les différentes étapes de la construction possèdent chacune un ancrage théorique. Ce qui est original dans la présentation adoptée ici est surtout de les disposer sur un

même axe : **partir de l'interaction d'un réseau de grande dimension et suivre, par changements successifs d'échelle, la naissance d'un champ propagatif puis la saturation de ses modes instables**.