L’art d’introduire une mémoire longue dans un système physique

De la variable d’ordre à l’opérateur temporel d’échelle

Table of Contents

1 Introduction — Du calcul d’une forme à la mémoire du système

Dans les développements précédents, nous avons posé une idée directrice : un système physique ne doit pas seulement être compris comme un objet, mais comme un domaine de transformation. On définit un système (), sa frontière (), des variables d’état (q(x,t)), des conditions initiales, des conditions aux limites et une loi d’évolution. Cette loi, une fois projetée sur des modes propres, permet de faire apparaître une ou plusieurs variables d’ordre.

La variable d’ordre est une grandeur réduite. Elle ne décrit pas toute la richesse du système, mais elle porte la forme dominante. Dans un fluide, elle peut représenter l’amplitude d’un grand vortex ; dans un marché financier, une tendance ou une instabilité collective ; dans un problème de rupture, une grandeur critique annonçant la perte de stabilité ; dans un système turbulent, une intensité d’échelle ou une amplitude de cascade.

Mais dès que l’on réduit un système complexe à une variable d’ordre, une question fondamentale apparaît : que deviennent les modes oubliés ? Ils ne disparaissent pas. Ils continuent d’agir. Leur effet peut se manifester sous forme de correction de dérive, de mémoire, de bruit, de volatilité. Dans les modèles à mémoire courte, les modes oubliés se relâchent exponentiellement. Dans les systèmes complexes, les marchés financiers, la turbulence, la rugosité ou les phénomènes critiques, cette hypothèse devient insuffisante. La mémoire n’est plus courte. Elle devient longue, parfois en loi de puissance, parfois log-périodique.

L’enjeu de ce document est donc de construire une progression claire : partir du modèle modal classique, montrer comment la mémoire et la volatilité apparaissent, comprendre pourquoi la dérivée ordinaire conduit naturellement à l’exponentielle, puis introduire une autre manière de poser le problème physique : non plus seulement avec un opérateur de temps, mais avec un opérateur d’échelle.

La phrase centrale est la suivante :

lorsque le système ne se souvient plus seulement de son passé récent, mais de la manière dont ce passé s’organise en échelles, la physique doit remplacer une mémoire exponentielle par une mémoire longue.

2 1. La variable d’ordre et les modes oubliés

On part d’un champ complet :

$$q(x,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x)$$

Les fonctions (_n(x)) représentent les modes propres du système, c’est-à-dire les formes naturelles autorisées par l’opérateur physique et par les conditions aux limites. Les coefficients (a_n(t)) représentent leurs amplitudes temporelles.

On choisit un mode dominant :

$$X(t) = a_1(t)$$

Ce mode dominant devient la variable d’ordre. Les autres modes sont regroupés comme modes cachés :

$$a_\alpha(t), \alpha \geq 2$$

La décomposition devient alors :

$$q(x,t) = X(t)\phi_1(x) + \sum_{\alpha \geq 2} a_\alpha(t)\phi_\alpha(x)$$

Cette écriture est très importante. Elle montre que la forme visible n’est jamais seule. Elle est accompagnée d’un halo de formes secondaires. La variable d’ordre porte la forme dominante ; les modes cachés portent les fluctuations, les détails, les retards, les couplages et les instabilités secondaires.

2.1 Tableau 1 — Lecture modale d’un système complexe

Élément	Écriture	Interprétation
Champ complet	(q(x,t))	État détaillé du système
Modes propres	(_n(x))	Formes naturelles du système
Amplitudes	(a_n(t))	Intensité temporelle de chaque forme
Variable d’ordre	(X(t)=a_1(t))	Mode dominant retenu
Modes cachés	(a_(t),)	Modes négligés mais encore actifs
Réduction	(q X)	Passage de la description complète à une dynamique intelligible

Ce tableau rappelle que la réduction n'est pas une suppression. Elle est une opération de sélection. On garde la forme principale, mais les formes secondaires continuent de travailler en arrière-plan.

3 2. La mémoire courte : le cas d'un mode caché exponentiel

Le modèle minimal consiste à garder une variable d'ordre (X) et un mode caché (Y). On écrit :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + bY(t)$$

$$\dot{Y}(t) = cX(t) - \gamma Y(t) + \eta(t)$$

Le coefficient (a) décrit la dynamique propre de (X). Le coefficient (b) mesure l'action de (Y) sur (X). Le coefficient (c) mesure l'action de (X) sur (Y). Le terme (-Y) signifie que le mode caché se relaxe avec un temps caractéristique (1/). Le terme ((t)) représente l'agitation interne des modes cachés plus fins.

La boucle est donc :

$$X \to Y \to X$$

Cette boucle est la source de la mémoire. Résolvons l'équation de (Y). On obtient :

$$Y(t) = e^{-\gamma t}Y(0) + c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}X(s)ds + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

On réinjecte cette expression dans l'équation de (X) :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + be^{-\gamma t}Y(0) + bc\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}X(s)ds + b\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

En négligeant le transitoire initial, on obtient la forme réduite :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + \int_0^t K(t-s)X(s)ds + \zeta(t)$$

avec :

$$K(t-s) = bce^{-\gamma(t-s)}$$

et :

$$\zeta(t) = b\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

Le noyau (K) est le noyau de mémoire déterministe. Le terme () est le bruit effectif transmis à (X) par le mode caché.

3.1 Tableau 2 — Ce que produit l'élimination du mode caché

Élément éliminé	Forme obtenue dans l'équation de (X)	Sens physique
Relaxation de (Y)	(e^{-(t-s)})	Persistance du mode caché
Boucle (XYX)	(_0^t K(t-s)X(s)ds)	Mémoire déterministe
Fluctuation de (Y)	((t))	Bruit coloré
Mémoire courte	(K()=bc e^{-})	Oubli exponentiel
Limite rapide	()	Volatilité locale approchée

L'idée essentielle est que la mémoire et le bruit ont la même origine : le mode caché. La mémoire est la réponse de (Y) à l'histoire de (X). La volatilité est la réponse de (Y) à ses propres fluctuations internes.

4 3. La volatilité comme bruit filtré par la mémoire

Si ((t)) est un bruit blanc, on peut écrire formellement :

$$\eta(t)dt = s_Y dW_t$$

Alors le bruit effectif devient :

$$\zeta(t) = bs_Y \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dW_s$$

Le bruit ressenti par (X) n'est donc pas un bruit blanc immédiat. C'est un bruit blanc filtré par la mémoire du mode caché.

Sous une forme plus générale, on écrit :

$$\zeta(t) = \int_0^t G(t - s)dW_s$$

où (G) est le noyau de filtrage stochastique. Dans le modèle simple :

$$G(\tau) = bs_Y e^{-\gamma\tau}$$

La variance instantanée de ce bruit filtré est donnée par l'isométrie d'Itô :

$$\sigma^2(t) = E[\zeta(t)^2) = \int_0^t G^2(t - s)ds$$

Dans le cas exponentiel :

$$\sigma^2(t) = b^2 s_Y^2 \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} ds$$

Donc :

$$\sigma^2(t) = \frac{b^2 s_Y^2}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right)$$

et :

$$\sigma(t) = \frac{|b)s_Y}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{1 - e^{-2\gamma t}}$$

Cette formule montre que la volatilité n'est pas nécessairement constante. Elle dépend du temps. Elle commence à zéro, puis s'accumule à mesure que les fluctuations cachées sont filtrées par le réservoir (Y), jusqu'à atteindre une valeur stationnaire lorsque (t/).

La phrase importante est :

la volatilité est la mémoire énergétique des fluctuations oubliées.

5 4. Le pont avec l'équation de variable d'ordre

L'équation réduite de la variable d'ordre peut s'écrire sous forme non locale :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + \int_0^t K(t - s)X(s)ds + \zeta(t) + s\eta_2(t)$$

où (F(X)) est la dérive moyenne, (K) le noyau de mémoire, () le bruit endogène produit par les modes cachés, et (s_2) un bruit extérieur ou résiduel.

Si la mémoire est courte, on peut condenser l'équation sous une forme d'EDS locale :

$$dX_t = - V'\left(X_t\right)dt + \sigma(t)dW_{1,t} + sdW_{2,t}$$

Le terme (-V'(X_t)dt) représente la dynamique moyenne dans un paysage de potentiel. Le terme ((t)dW_{1,t}) représente la volatilité endogène issue des modes cachés. Le terme (s dW_{2,t}) représente le bruit externe.

5.1 Tableau 3 — Lecture de l'EDS de variable d'ordre

Terme	Origine	Interprétation
(-V'(X_t)dt)	Mode dominant et correction moyenne des modes cachés	Dérive structurée, attracteurs, potentiel
((t)dW_{1,t})	Fluctuations des modes cachés filtrées par la mémoire	Volatilité endogène
(s dW_{2,t})	Perturbations externes ou résiduelles	Bruit exogène
(K(t))	Réponse temporelle des modes cachés	Mémoire déterministe
(G(t))	Canal stochastique des modes cachés	Mémoire du bruit

Dans cette lecture, ((t)) n'est pas un paramètre libre. Elle doit être calculée à partir du noyau de filtrage stochastique :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t G^2(t - s)ds$$

Si le bruit passe par le même canal que la mémoire, on peut poser :

$$G(\tau) = \kappa K(\tau)$$

Alors :

$$\sigma^2(t) = \kappa^2 \int_0^t K^2(t - s)ds$$

ou, par changement de variable :

$$\sigma^2(t) = \kappa^2 \int_0^t K^2(\tau)d\tau$$

C'est une formule très importante pour votre cadre : **la volatilité temporelle est l'énergie cumulée du noyau de mémoire.**

6 5. Pourquoi l'exponentielle ne suffit pas pour la mémoire longue

Le modèle précédent repose sur une équation ordinaire :

$$\dot{Y} = -\gamma Y + \cdots$$

La solution de cette équation contient une exponentielle :

$$e^{-\gamma t}$$

L'exponentielle est la fonction naturelle de la dérivée ordinaire :

$$\frac{df}{dt} = \lambda f \Rightarrow f(t) = e^{\lambda t}$$

Mais l'exponentielle oublie vite. Elle possède un temps caractéristique unique :

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Or certains systèmes ne fonctionnent pas avec un seul temps caractéristique. La turbulence est organisée en cascades d'échelles. Les marchés financiers présentent des paquets de volatilité, des régimes persistants, des accélérations collectives. Les ruptures peuvent s'approcher d'un point critique par événements successifs de plus en plus rapprochés. Les signaux rugueux peuvent garder la trace de leur passé à toutes les échelles.

Dans ces cas, il faut un noyau de mémoire qui ne décroît pas comme une exponentielle, mais comme une loi de puissance :

$$K(\tau) \sim \tau^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

La mémoire longue apparaît lorsque le système ne possède plus un seul temps de relaxation, mais une hiérarchie de temps emboîtés.

7 6. Introduire une mémoire longue par une dérivée fractionnaire

Une manière classique d'introduire une mémoire longue consiste à remplacer la dérivée ordinaire par une dérivée fractionnaire. Par exemple, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre (), avec (0<<1), peut s'écrire :

$$D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$$

Cette équation contient explicitement un noyau de mémoire :

$$(t - s)^{-\alpha}$$

Le présent dépend donc de toute l'histoire passée, avec un poids qui décroît lentement.

Si l'on remplace l'équation du mode caché par :

$$D_t^{\alpha} Y = -\gamma Y + cX + \eta(t)$$

alors la réponse du mode caché n'est plus exponentielle. Elle est liée à une fonction de Mittag-Leffler :

$$G_{\alpha}(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\gamma t^{\alpha}\right)$$

Le noyau de mémoire devient :

$$K_\alpha(t) = bct^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\gamma t^\alpha\right)$$

Dans certains régimes, ce noyau possède une décroissance lente, de type loi de puissance. La volatilité devient alors :

$$\sigma_\alpha^2(t) = \int_0^t G_\alpha^2(t-s)ds$$

ou, si (G_) est proportionnel à (K_) :

$$\sigma_\alpha^2(t) = \kappa^2 \int_0^t K_\alpha^2(t-s)ds$$

7.1 Tableau 4 — Dérivée ordinaire et dérivée fractionnaire

Opérateur	Équation propre	Fonction propre ou réponse	Type de mémoire
()	(f'=f)	(e^{t})	Mémoire courte
(D_t^)	(D_t^f=f)	(E_(t^))	Mémoire longue
Noyau exponentiel	(e^{-t})	temps caractéristique unique	oubli rapide
Noyau puissance	(t^{-})	hiérarchie d'échelles	oubli lent

La dérivée fractionnaire est donc une manière naturelle d'introduire de la mémoire longue dans une physique des processus.

8 7. Une autre voie : l'opérateur temporel d'échelle

Votre intuition va encore plus loin. Dans certains systèmes, notamment log-périodiques, il ne suffit pas de remplacer l'exponentielle par une fonction de Mittag-Leffler. Il faut changer l'opérateur temporel lui-même.

L'équation ordinaire :

$$\frac{df}{dt} = L(f)$$

mesure une variation sous translation du temps :

$$t \to t + \Delta t$$

Mais dans les systèmes à lois de puissance, à cascades, à autosimilarité ou à log-périodicité, le changement pertinent est plutôt une dilatation :

$$t \to \rho t$$

L'opérateur naturel devient alors :

$$t\frac{d}{dt}$$

On peut donc poser une nouvelle forme de problème physique :

$$t\frac{df}{dt} = L(f)$$

avec des conditions aux limites d'échelle.

Si l'on cherche un mode propre :

$$L(\phi) = \lambda\phi$$

et que l'on écrit :

$$f(t) = a(t)\phi$$

alors :

$$t\frac{da}{dt} = \lambda a$$

La solution est :

$$a(t) = Ct^{\lambda}$$

Ainsi, la loi de puissance apparaît comme la fonction propre de l'opérateur d'échelle :

$$t\frac{d}{dt}t^{\lambda} = \lambda t^{\lambda}$$

9 8. Valeurs propres complexes et log-périodicité

Si la valeur propre est complexe :

$$\lambda = \alpha + i\omega$$

alors :

$$t^{\lambda} = t^{\alpha+i\omega} = t^{\alpha}e^{i\omega lnt}$$

La partie réelle donne :

$$t^{\alpha}cos(\omega lnt + \varphi)$$

On obtient donc une loi log-périodique :

$$f(t) = t^{\alpha}[A + Bcos(\omega lnt + \varphi))$$

Le système n'est pas périodique en (t), mais en (t). Il ne se répète pas à intervalles de temps constants, mais à rapports d'échelle constants.

Dans le voisinage d'un temps critique (t_c), on utilise souvent :

$$\tau = t_c - t$$

et le mode devient :

$$f(\tau) = \tau^{\alpha}[A + Bcos(\omega ln\tau + \varphi))$$

Cela signifie que les oscillations se resserrent à mesure que l'on approche du point critique.

9.1 Tableau 5 — Trois formes de dynamique temporelle

Type de dynamique	Opérateur	Fonction caractéristique	Signification
Temps ordinaire	()	(e^{t})	relaxation ou croissance exponentielle
Mémoire fractionnaire	(D_t^)	(E_(t^))	relaxation lente avec mémoire longue
Temps d'échelle	(t)	(t^)	loi de puissance et autosimilarité
Échelle complexe	(t), (C)	(t^(t+))	log-périodicité

Ce tableau est le cœur de la nouvelle formulation. Il montre que l'exponentielle, la fonction de Mittag-Leffler et la loi de puissance ne sont pas seulement des formes mathématiques ; elles correspondent à trois manières différentes de penser le temps.

10 9. Conditions aux limites d'échelle

Dans un problème classique, les conditions aux limites sélectionnent des modes et des fréquences. Par exemple, une corde fixée aux deux extrémités sélectionne des sinus et des fréquences discrètes.

Dans un problème d'échelle, les conditions aux limites peuvent sélectionner des exposants. On peut poser :

$$\{t\frac{df}{dt} = L(f),\ B_0(f) = 0,\ B_1(f) = 0.\ )$$

Les conditions (B_0) et (B_1) peuvent correspondre à deux échelles :

$$t = t_0, t = t_1$$

ou à deux limites :

$$\tau \to 0, \tau = \tau_0$$

Elles sélectionnent alors les exposants admissibles :

$$\lambda_n$$

On obtient une analogie très forte :

$$onde \ + \ frontières \to fréquences\ propres$$

$$loi\ d'échelle \ + \ frontières\ d'échelle \to exposants\ propres$$

Ainsi, un système log-périodique peut être compris comme un système dont les modes propres ne sont plus des oscillations temporelles ordinaires, mais des oscillations d'échelle.

11 10. Application au noyau de mémoire et à la volatilité

Dans la formulation à mémoire longue, le noyau peut prendre la forme :

$$K(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$$

ou, si l'exposant est complexe :

$$K(\tau) \sim \tau^{-\alpha}[1 \ + \ Bcos(\omega ln\tau \ + \ \varphi))$$

La volatilité temporelle associée est alors :

$$\sigma^2(t) = \kappa^2 \int_0^t K^2(\tau) d\tau$$

Dans le cas log-périodique :

$$\sigma^2(t) = \kappa^2 \int_0^t \tau^{-2\alpha}[1 \ + \ Bcos(\omega ln\tau \ + \ \varphi))^2 d\tau$$

Cette formule montre que la volatilité conserve la signature du noyau de mémoire. Si le noyau porte une mémoire longue, la volatilité porte une mémoire longue. Si le noyau est log-périodique, la volatilité peut elle aussi présenter des modulations log-périodiques.

L'idée centrale est donc :

la volatilité n'est pas une agitation sans forme ; elle est la trace énergétique du noyau de mémoire.

12 11. Lecture pour CAC40, turbulence et systèmes complexes

Dans un marché financier comme le CAC40, la volatilité présente souvent des régimes persistants. Les périodes calmes tendent à se prolonger ; les périodes agitées se regroupent en grappes. Une mémoire courte exponentielle peut décrire certains effets transitoires, mais elle ne rend pas toujours compte de la persistance longue des régimes.

Une mémoire longue en loi de puissance permet de représenter une influence durable du passé. Une mémoire log-périodique peut être envisagée lorsque le système approche un point critique, avec des oscillations de plus en plus rapprochées dans le temps réel mais régulières en logarithme du temps restant.

Dans la turbulence, l'idée est différente mais proche. L'énergie circule d'une échelle à l'autre. Les petites structures ne sont pas de simples fluctuations indépendantes. Elles portent l'empreinte de la cascade. Le système ne se souvient pas seulement dans le temps ; il se souvient dans l'échelle.

Dans les deux cas, l'opérateur d'échelle apporte une lecture nouvelle :

$$t\frac{d}{dt} = \textit{générateur de lois de puissance}$$

et, lorsque les valeurs propres deviennent complexes :

$$t^{\lambda} = t^{\alpha}e^{i\omega lnt}$$

la dynamique devient log-périodique.

13 12. Synthèse générale

L'art d'introduire une mémoire longue dans un système physique consiste à reconnaître que l'oubli exponentiel n'est qu'un cas particulier. Il correspond à une dérivée ordinaire, à un temps caractéristique unique, à une relaxation simple.

Les systèmes complexes exigent souvent autre chose. Si les modes cachés possèdent une hiérarchie de temps de relaxation, le noyau de mémoire devient une loi de puissance. Si cette hiérarchie est discrète ou organisée par échelles privilégiées, le noyau peut devenir log-périodique. Si le système se comprend mieux par dilatation que par translation temporelle, l'opérateur naturel devient :

$$t\frac{d}{dt}$$

et les valeurs propres deviennent des exposants.

L'équation de variable d'ordre s'enrichit alors :

$$dX_t = -V'\left(X_t\right)dt + \sigma(t)dW_{1,t} + sdW_{2,t}$$

avec :

$$\sigma^2(t) = \kappa^2 \int_0^t K^2(\tau) d\tau$$

et un noyau (K) qui peut être exponentiel, fractionnaire, en loi de puissance ou log-périodique.

13.1 Tableau 6 — Les différentes manières d'introduire la mémoire

Les cinq lignes du tableau correspondent aux formes explicites suivantes :

$$K(\tau) = e^{-\gamma\tau}$$

$$K_\alpha(\tau) = \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\ \gamma\tau^\alpha\right)$$

$$K(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$$

$$K(\tau) \sim \tau^{-\alpha}[1 + Bcos(\omega ln\tau + \varphi)ight])$$

$$t\frac{d}{dt}$$

Modèle	Forme du noyau	Volatilité associée	Sens physique
Mode caché ordinaire	exponentielle	saturation rapide	mémoire courte
Mode fractionnaire	Mittag-Leffler	accumulation lente	mémoire longue
Loi de puissance	puissance négative	dépendance durable au passé	hiérarchie continue d'échelles
Loi log-périodique	puissance modulée en logarithme	volatilité modulée en log-temps	hiérarchie discrète d'échelles
Opérateur d'échelle	générateur de dilatation	exposants propres	temps organisé par dilatation

La phrase finale pourrait être :

La dérivée ordinaire décrit un système qui oublie ; la dérivée fractionnaire décrit un système qui se souvient ; l'opérateur d'échelle décrit un système qui organise sa mémoire en niveaux.