Chapitre - De la dissipation d'entropie à l'instabilité de Jeans

Bifurcation, morphogenèse cosmique et langage de René Thom

Introduction - quand une fluctuation devient une graine

L'idée centrale de ce chapitre est simple, mais profonde : une structure n'apparaît pas seulement parce qu'il existe une fluctuation. Une fluctuation existe partout : dans un fluide, dans un nuage de gaz, dans un plasma primordial, dans un champ de densité. La question décisive est différente : **dans quelles conditions une fluctuation cesse-t-elle d'être un bruit passager pour devenir une graine de forme ?**

C'est cette question qui permet de relier plusieurs niveaux de pensée. Au niveau thermodynamique, on parle de dissipation d'entropie, de gradients, de flux et de structures dissipatives. Au niveau hydrodynamique, l'exemple des cellules de Bénard montre comment un régime homogène de conduction peut devenir insuffisant et céder la place à une organisation convective. Au niveau cosmologique, l'instabilité de Jeans formalise le moment où une fluctuation de densité n'est plus simplement lissée par la pression, mais amplifiée par la gravité. Au niveau morphologique enfin, René Thom fournit un langage pour penser les seuils, les pertes de stabilité, les bifurcations et les naissances de formes.

Ce chapitre ne soutient donc pas que la morphogenèse cosmique se réduit à un seul mécanisme. Il propose plutôt une progression pédagogique : partir de la dissipation, passer par l'analogie de Bénard, poser rigoureusement le problème de Jeans, résoudre l'équation obtenue, puis montrer en quel sens cette instabilité peut être rapprochée d'une catastrophe morphogénétique au sens large, sans la confondre avec une catastrophe élémentaire de Thom au sens strict.

La phrase directrice sera la suivante :

une fluctuation devient forme lorsqu'un mécanisme d'amplification l'emporte sur les mécanismes d

1. Dissipation d'entropie : ce que signifie vraiment « l'entropie se dissipe mal »

Dire que « l'entropie se dissipe mal » peut prêter à confusion. L'entropie n'est pas un liquide qui s'écoule dans un tuyau. Elle mesure plutôt l'irréversibilité, la dispersion de l'énergie, la multiplication des états possibles, la dégradation d'une énergie disponible en énergie moins disponible. Dans un système ouvert, traversé par des flux, la question n'est pas seulement : l'entropie augmente-t-elle ? La réponse générale est oui pour le système global. La vraie question devient : **par quels chemins cette production d'entropie s'organise-t-elle ?**

Dans un régime simple, les gradients peuvent être effacés par diffusion, conduction ou homogénéisation. La chaleur se répartit, la matière se mélange, les différences locales s'atténuent. Mais lorsque les gradients deviennent trop forts, ou lorsque les contraintes du système empêchent un lissage homogène, une dissipation diffuse peut devenir insuffisante. Le système peut alors adopter une autre stratégie physique : il crée des chemins préférentiels, des cellules, des tourbillons, des filaments, des interfaces, des réseaux.

Il ne faut donc pas dire que la structure « refoule » l'entropie comme si elle la bloquait. Il vaut mieux dire qu'elle **canalise** les flux et organise la production d'entropie. Une structure dissipative n'est pas une victoire contre l'entropie ; elle est une manière locale et organisée de réaliser une dissipation globale.

la structure ne supprime pas l'entropie ; elle architecture sa circulation.

Cette idée est au coeur de la notion de structure dissipative : loin de l'équilibre, un système traversé par des flux peut produire localement de l'ordre, à condition d'exporter de l'entropie vers son environnement. Une flamme, un cyclone, une cellule vivante, une étoile ou une galaxie ne sont pas des exceptions au second principe. Ce sont des formes qui existent parce qu'elles transforment des gradients en flux organisés.

Formulation confuse	Reformulation plus précise
L'entropie se bloque.	Le régime homogène de dissipation devient insuffisant.
La structure refoule l'entropie.	La structure canalise les flux et organise la production d'entropie.
L'ordre contredit l'entropie.	L'ordre local peut accompagner une augmentation globale de l'entropie.
La forme lutte contre le désordre.	La forme peut être un chemin efficace du désordre global.

Le paradoxe apparent est donc le suivant :

l'entropie totale augmente, mais des formes locales apparaissent.

Ce paradoxe disparaît si l'on distingue le local et le global. Localement, une structure peut se maintenir. Globalement, le système et son environnement produisent de l'entropie. La forme est donc moins un refus de l'entropie qu'une manière de la faire circuler.

2. L'exemple pédagogique des cellules de Bénard

L'expérience de Rayleigh-Bénard fournit une image simple et puissante. Un fluide est chauffé par le bas. Pour un faible gradient de température, la chaleur se transmet par conduction. Le fluide reste macroscopiquement au repos ; le régime est homogène. Mais lorsque le gradient thermique dépasse un seuil critique, la conduction ne suffit plus à transporter efficacement la chaleur. Le fluide se met en mouvement. Des cellules convectives apparaissent.

Ce passage est une bifurcation : l'état homogène perd sa stabilité et une organisation spatiale devient possible.

$$conduction\ homogène \rightarrow seuil\ critique \rightarrow cellules\ de\ convection$$

Le seuil est classiquement exprimé par le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T h^3}{\nu\kappa}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, α le coefficient de dilatation thermique, ΔT la différence de température, h l'épaisseur de la couche de fluide, ν la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique.

Lorsque :

$$Ra > Ra_c$$

le régime conducteur devient instable et la convection s'organise.

Élément	Régime sous le seuil	Régime au-dessus du seuil
Transport de chaleur	conduction	convection organisée
État du fluide	homogène, immobile	cellules, rouleaux, mouvements cohérents
Rôle de la fluctuation	amortie	amplifiée
Type de forme	aucune forme macroscopique	structure dissipative
Sens thermodynamique	dissipation diffuse	dissipation organisée

L'intérêt pédagogique de Bénard est considérable : il montre qu'une forme peut apparaître non pas malgré la dissipation, mais grâce à un nouveau régime de dissipation. La cellule convective n'est pas un ornement du fluide ; elle est la réponse dynamique du fluide à un gradient devenu trop intense pour être traité par la conduction seule.

Cette image prépare l'analogie cosmologique. Dans l'Univers primordial, il ne s'agit évidemment pas de cellules chauffées par une plaque. Mais il existe également un milieu presque homogène, des gradients, des fluctuations, des mécanismes de lissage et un mécanisme d'amplification : la gravité.

3. La soupe primordiale : fluctuations, pression, gravité

On peut décrire pédagogiquement la soupe primordiale comme un milieu chaud, dense, presque homogène, composé de matière, de rayonnement, de pression, de gravité et d'expansion. Cette image d'un « océan primordial » doit être utilisée avec prudence : ce n'est pas un océan matériel au sens ordinaire, mais une façon de représenter un milieu physique où matière et lumière sont fortement couplées.

Dans ce milieu, les fluctuations de densité existent. Certaines sont très petites et peuvent être lissées par la pression, la diffusion ou l'expansion. D'autres, à certaines échelles, peuvent être amplifiées par la gravité.

La logique physique est la suivante :

$$surdensité \rightarrow attraction\ gravitationnelle\ plus\ forte \rightarrow accrétion \rightarrow surdensité\ renforcée$$

On reconnaît ici une boucle positive. Une région légèrement plus dense attire davantage de matière. Cette matière augmente encore la densité. La fluctuation initiale peut alors devenir une graine de structure.

Processus	Effet sur la fluctuation
pression	tend à lisser ou faire osciller la perturbation
diffusion photonique	amortit certaines petites échelles
expansion cosmique	dilue et freine la croissance
gravité	amplifie les surdensités
recombinaison	découple matière et rayonnement, modifiant les conditions de croissance
matière noire	fournit des puits gravitationnels précoces dans le modèle cosmologique moderne

La morphogenèse cosmique ne peut donc pas être réduite à une opposition simple entre ordre et désordre. Elle relève d'une compétition entre mécanismes : certains lissent, d'autres amplifient. C'est précisément cette compétition que l'instabilité de Jeans formalise dans sa version la plus élémentaire.

4. Poser correctement le problème de Jeans

L'instabilité de Jeans répond à une question simple : une petite fluctuation de densité dans un fluide auto-gravitant va-t-elle rester petite, osciller ou croître ?

On part d'un milieu de densité moyenne ρ_0, auquel on ajoute une petite perturbation ρ_1 :

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$$

avec :

$$|\rho_1) \ll \rho_0$$

On définit alors le contraste de densité :

$$\delta(x,t) = \frac{\rho_1(x,t)}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Le problème devient : que devient δ ?

Les équations de départ sont celles d'un fluide auto-gravitant : conservation de la masse, équation d'Euler et équation de Poisson.

4.1 Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

Cette équation signifie que la matière ne disparaît pas. Si la densité augmente en un point, c'est que de la matière converge vers ce point.

4.2 Équation d'Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi$$

Elle indique que le fluide est accéléré par deux forces principales : le gradient de pression et le champ gravitationnel.

4.3 Équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Elle relie le potentiel gravitationnel Φ à la densité ρ. C'est cette équation qui rend la gravité auto-amplificatrice : une surdensité produit un potentiel qui attire davantage de matière.

5. Linéarisation : passer du fluide au contraste de densité

On suppose que les perturbations sont petites. On écrit :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, v = v_1, p = p_0 + p_1, \Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

On garde seulement les termes du premier ordre. Les produits de petites perturbations, comme $\rho_1 v_1$ ou $(v_1 \cdot \nabla)v_1$, sont négligés.

On suppose en outre une relation acoustique linéaire :

$$p_1 = c_s^2 \rho_1$$

où c_s est la vitesse du son dans le fluide.

5.1 Conservation linéarisée

À partir de :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

on obtient, au premier ordre :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v_1 = 0$$

Comme $\rho_1 = \rho_0 \delta$, il vient :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot v_1 = 0$$

Cette équation dit que la densité augmente là où le fluide converge.

5.2 Euler linéarisée

L'équation d'Euler devient :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1$$

Or :

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 = c_s^2 \rho_0 \delta$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = c_s^2 \nabla \delta$$

Ainsi :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \delta - \nabla \Phi_1$$

5.3 Poisson linéarisée

L'équation de Poisson donne, pour la perturbation :

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

c'est-à-dire :

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_0 \delta$$

6. Démonstration de l'équation de Jeans

Nous avons maintenant :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot v_1 = 0$$

et :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla\delta - \nabla\Phi_1$$

On dérive la première équation par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$$

On remplace $\partial v_1 / \partial t$ par l'équation d'Euler linéarisée :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(-c_s^2 \nabla\delta - \nabla\Phi_1 \right) = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta - \nabla^2 \Phi_1 = 0$$

Avec Poisson :

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_0 \delta$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \delta + 4\pi G \rho_0 \delta$$

Cette équation est le coeur du raisonnement. Elle n'est pas une diffusion-réaction classique, car elle contient une dérivée seconde en temps. Elle ressemble plutôt à une équation d'onde avec terme d'amplification gravitationnelle. Mais elle possède une lecture très proche de l'intuition diffusion-réaction :

Terme	Lecture physique	Rôle morphogénétique
$\partial_t^2 \delta$	accélération de la fluctuation	inertie du changement
$c_s^2 \nabla^2 \delta$	pression acoustique	lissage, rappel, oscillation
$4\pi G \rho_0 \delta$	gravité auto-amplificatrice	réaction positive, croissance

Le rapport :

$$\frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}$$

possède la dimension d'un inverse de longueur au carré. Il définit le nombre d'onde critique de Jeans :

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}$$

7. Résolution par séparation des variables

Nous cherchons une solution sous forme séparable :

$$\delta(x,t) = \phi(t)\psi(x)$$

En substituant dans :

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = c_s^2\nabla^2\delta + 4\pi G\rho_0\delta$$

on obtient :

$$\phi''(t)\psi(x) = c_s^2\phi(t)\nabla^2\psi(x) + 4\pi G\rho_0\phi(t)\psi(x)$$

On divise par $\phi(t)\psi(x)$:

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = c_s^2\frac{\nabla^2\psi(x)}{\psi(x)} + 4\pi G\rho_0$$

On réorganise :

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} - 4\pi G\rho_0 = c_s^2\frac{\nabla^2\psi}{\psi}$$

Le membre de gauche dépend seulement du temps, le membre de droite seulement de l'espace. Ils doivent donc être égaux à une constante. On pose :

$$\frac{\nabla^2\psi}{\psi} = -k^2$$

ce qui donne l'équation spatiale :

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

C'est l'équation de Helmholtz. Dans un espace infini, les solutions naturelles sont des modes de Fourier :

$$\psi(x) = e^{ik\cdot x}$$

avec :

$$k = |k)$$

En dimension 1, on peut écrire :

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

L'équation temporelle devient alors :

$$\phi''(t) + \left(c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0\right)\phi(t) = 0$$

On définit :

$$\omega_k^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0$$

Ainsi :

$$\phi''(t) + \omega_k^2 \phi(t) = 0$$

8. Les deux régimes : oscillation ou croissance

Tout dépend du signe de ω_k^2.

8.1 Pression dominante : régime oscillant

Si :

$$c_s^2 k^2 > 4\pi G\rho_0$$

alors :

$$\omega_k^2 > 0$$

La solution temporelle est :

$$\phi(t) = A_k \cos\left(\omega_k t\right) + B_k \sin\left(\omega_k t\right)$$

La fluctuation se comporte comme une onde acoustique. La pression agit comme une force de rappel : elle empêche l'effondrement et transforme la fluctuation en oscillation.

La solution complète est alors :

$$\delta(x,t) = [A_k \cos\left(\omega_k t\right) + B_k \sin\left(\omega_k t\right))\psi_k(x)$$

8.2 Gravité dominante : régime instable

Si :

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$$

alors :

$$\omega_k^2 < 0$$

On pose :

$$\gamma_k^2 = 4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2$$

L'équation devient :

$$\phi''(t) - \gamma_k^2 \phi(t) = 0$$

Sa solution est :

$$\phi(t) = A_k e^{\gamma_k t} + B_k e^{-\gamma_k t}$$

La solution complète est donc :

$$\delta(x,t) = [A_k e^{\gamma_k t} + B_k e^{-\gamma_k t}]\psi_k(x)$$

Le terme $e^{\gamma_k t}$ est le mode croissant. C'est lui qui transforme la fluctuation initiale en graine de structure.

Condition	Signe de ω_k^2	Solution	Sens physique
$c_s^2 k^2 > 4\pi G \rho_0$	positif	oscillation	pression dominante
$c_s^2 k^2 = 4\pi G \rho_0$	nul	seuil critique	frontière de stabilité
$c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$	négatif	croissance exponentielle	gravité dominante

9. Nombre d'onde et longueur de Jeans

Le seuil est obtenu lorsque :

$$c_s^2 k_J^2 = 4\pi G \rho_0$$

Donc :

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{c_s}$$

La longueur d'onde associée est :

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$$

Donc :

$$\lambda_J = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$$

Si $\lambda < \lambda_J$, la longueur d'onde est trop petite : la pression réagit suffisamment vite pour empêcher l'effondrement. Si $\lambda > \lambda_J$, la fluctuation est assez grande : la gravité l'emporte, la fluctuation croît.

Grandeur	Expression	Interprétation
nombre d'onde critique	$k_J = \sqrt{4\pi G\rho_0}/c_s$	seuil en fréquence spatiale
longueur critique	$\lambda_J = c_s\sqrt{\pi/\left(G\rho_0\right)}$	taille minimale d'effondrement
petites échelles	$\lambda < \lambda_J$	oscillation ou lissage
grandes échelles	$\lambda > \lambda_J$	croissance gravitationnelle

La longueur de Jeans exprime donc une idée très simple : une fluctuation doit être suffisamment grande pour que sa gravité propre l'emporte sur la pression qui cherche à la lisser.

10. Solution générale par superposition

L'équation de Jeans linéaire est une équation linéaire. Toute combinaison de solutions est encore une solution. Dans un espace infini, on peut donc écrire une superposition de modes de Fourier :

$$\delta(x,t) = \int \delta_k(t) e^{ik\cdot x} d^3k$$

Pour chaque mode k, l'amplitude vérifie :

$$\ddot{\delta}_k + \left(c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0\right)\delta_k = 0$$

On peut écrire formellement :

$$\delta(x,t) = \int [A(k)e^{\lambda_+(k)t} + B(k)e^{\lambda_-(k)t})e^{ik\cdot x} d^3k$$

avec :

$$\lambda_{\pm}(k) = \pm \sqrt{4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2}$$

pour les modes instables $k < k_J$.

Pour les modes stables $k > k_J$, on écrit plutôt :

$$\lambda_{\pm}(k) = \pm\, i\sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0}$$

La solution générale contient donc trois comportements : oscillation, croissance et décroissance. La morphogenèse vient des modes croissants.

11. Version cosmologique avec expansion

Dans un Univers en expansion, l'équation est modifiée. Il faut tenir compte du facteur d'échelle $a(t)$ et du taux d'expansion :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

La forme simplifiée devient :

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho'\right)\delta_k = 0$$

Le terme $2H\dot{\delta}_k$ agit comme une friction cosmique : l'expansion freine la croissance des perturbations. Le terme k/a rappelle que le nombre d'onde physique diminue avec l'expansion.

Terme	Sens physique
$\ddot{\delta}_k$	accélération de la perturbation
$2H\dot{\delta}_k$	freinage dû à l'expansion
$c_s^2 k^2/a^2$	stabilisation par pression acoustique
$4\pi G\rho'$	amplification gravitationnelle

Cette version cosmologique montre que la morphogenèse réelle de l'Univers ne se réduit pas à l'équation statique de Jeans. La croissance des structures dépend aussi de l'expansion,

de la matière noire, du couplage matière-rayonnement, des oscillations acoustiques baryoniques, de la recombinaison et de la dynamique non linéaire ultérieure.

On peut alors formuler la situation ainsi :

Jeans donne le seuil ; la cosmologie moderne donne l'histoire complète.

12. Pourquoi ce n'est pas une diffusion-réaction classique

Il est tentant de lire l'équation :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \delta + 4\pi G \rho_0 \delta$$

comme une équation de diffusion-réaction. Cette lecture est pédagogiquement féconde, mais elle doit être précisée.

Une équation diffusion-réaction linéaire classique serait :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = D \nabla^2 \delta + r\delta$$

Après séparation des variables, elle donnerait :

$$\phi'(t) = \left(r - Dk^2\right)\phi(t)$$

et donc :

$$\phi(t) = \phi_0 e^{\left(r - Dk^2\right)t}$$

Dans Jeans, en revanche, la dérivée temporelle est seconde :

$$\phi''(t) + \left(c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0\right)\phi(t) = 0$$

Le taux de croissance du mode instable est donc :

$$\gamma_k = \sqrt{4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2}$$

et non :

$$4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2$$

Diffusion-réaction classique	Équation de Jeans
dérivée première en temps	dérivée seconde en temps
dynamique dissipative	dynamique inertielle et acoustique
diffusion irréversible	propagation de perturbations de pression

Diffusion-réaction classique	Équation de Jeans
croissance $e^{\left(r-Dk^2\right)t}$	croissance $e^{\sqrt{4\pi G\rho_0-c_s^2k^2}t}$
seuil $r = Dk^2$	seuil $4\pi G\rho_0 = c_s^2k^2$

La bonne formulation serait donc : **l'équation de Jeans n'est pas une diffusion-réaction classique, mais elle possède une structure conceptuelle analogue : un terme de lissage s'oppose à un terme d'amplification.**

13. Bénard, Jeans, Hopf : trois figures du seuil

Les cellules de Bénard, l'instabilité de Jeans et la bifurcation de Hopf appartiennent à une même famille d'idées : un état initial perd sa stabilité lorsqu'un paramètre critique est franchi. Mais elles ne sont pas identiques.

Figure	État initial	Seuil	Ce qui apparaît	Type de dynamique
Rayleigh-Bénard	fluide conducteur homogène	$Ra = Ra_c$	cellules convectives	instabilité dissipative spatiale
Jeans	gaz ou plasma auto-gravitant	$k = k_J$ ou $\lambda = \lambda_J$	croissance de surdensités	instabilité gravitationnelle
Hopf	état fixe stable	changement de signe de stabilité complexe	oscillation auto-entretenue	cycle limite
Thom	paysage de potentiel	changement de forme du potentiel	nouvelle forme ou basculement	catastrophe morphologique

La tentation de rapprocher Jeans de Hopf vient du fait qu'il existe une frontière entre oscillation et croissance. Mais Hopf, au sens strict, désigne l'apparition d'un cycle limite. Jeans décrit d'abord la transition entre oscillation acoustique et amplification gravitationnelle. La parenté est donc dynamique et pédagogique, non identitaire.

14. Le lien avec René Thom

La question devient alors : l'instabilité de Jeans est-elle une catastrophe au sens de René Thom ?

La réponse doit être nuancée. Dans sa forme linéaire simple, l'instabilité de Jeans n'est pas une catastrophe élémentaire de Thom. Elle ne décrit pas directement un paysage de

potentiel non linéaire dont le nombre de minima change sous l'effet de paramètres de contrôle. Elle décrit un changement de signe dans un coefficient de stabilité :

$$\omega_k^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0$$

Lorsque :

$$\omega_k^2 > 0$$

le mode est stable et oscillant. Lorsque :

$$\omega_k^2 < 0$$

le mode est instable et croissant.

Ce n'est donc pas une catastrophe de Thom au sens strict. Mais c'est un seuil morphogénétique très proche de l'esprit de Thom : un paramètre de contrôle franchit une valeur critique, l'état homogène perd sa stabilité, et une forme devient possible.

On peut écrire un potentiel effectif pour le mode δ_k :

$$U(\delta_k) = \frac{1}{2}\omega_k^2 \delta_k^2$$

Si $\omega_k^2 > 0$, le potentiel est un bol stable. La fluctuation revient vers zéro. Si $\omega_k^2 < 0$, le bol devient une colline inversée. La position $\delta_k = 0$ devient instable.

$$bol\ stable \rightarrow colline\ instable$$

C'est une perte de stabilité élémentaire. Pour obtenir une catastrophe morphologique plus complète, il faut ajouter des termes non linéaires capables de stabiliser de nouveaux états.

15. Un prolongement non linéaire de type morphogénétique

On peut introduire, de manière schématique, une équation non linéaire pour le mode :

$$\ddot{\delta}_k = \mu\delta_k - \lambda\delta_k^3$$

avec :

$$\mu = 4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2$$

et :

$$\lambda > 0$$

Le potentiel effectif correspondant peut s'écrire :

$$U\left(\delta_k; \mu\right) = -\frac{1}{2}\mu\delta_k^2 + \frac{1}{4}\lambda\delta_k^4$$

Les équilibres vérifient :

$$\frac{dU}{d\delta_k} = 0$$

soit :

$$-\ \mu\delta_k + \lambda\delta_k^3 = 0$$

Donc :

$$\delta_k = 0$$

ou :

$$\delta_k = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$$

Si $\mu < 0$, l'état homogène $\delta_k = 0$ est stable. Si $\mu > 0$, deux états non nuls deviennent possibles. On obtient alors une vraie bifurcation de forme :

$$état\ homogène \rightarrow états\ structurés$$

Ce modèle n'est pas la cosmologie complète. C'est un schéma pédagogique qui montre comment l'instabilité linéaire de Jeans peut devenir le noyau d'une lecture morphogénétique plus proche de Thom.

Niveau	Interprétation
Jeans linéaire	seuil physique de perte de stabilité
Jeans non linéaire	entrée dans la formation de structures
Thom	langage des changements qualitatifs de forme
Morphogenèse cosmique	passage d'une fluctuation à une architecture

La formule synthétique est :

Jeans donne le seuil physique ; Thom donne le langage des formes qui naissent au seuil.

16. Ce que la cosmologie moderne ajoute

La formation des structures cosmiques n'est pas expliquée uniquement par l'instabilité de Jeans classique. Celle-ci fournit un noyau conceptuel : la compétition entre pression et gravité. Mais l'histoire réelle inclut plusieurs couches :

1. des fluctuations primordiales ;
2. l'expansion de l'Univers ;
3. le rôle de la matière noire ;
4. les oscillations acoustiques du plasma baryon-photon ;
5. la recombinaison et le découplage lumière-matière ;
6. la croissance gravitationnelle après découplage ;
7. la dynamique non linéaire des halos, galaxies, étoiles et rétroactions.

Niveau cosmologique	Rôle de l'instabilité
fluctuations initiales	Jeans ne les crée pas, mais aide à comprendre leur destin
plasma primordial	pression et gravité sont en compétition
CMB	trace des oscillations et fluctuations avant recombinaison
matière noire	croissance gravitationnelle de puits de potentiel
gaz baryonique	chute dans les puits après découplage
galaxies et étoiles	régimes non linéaires, refroidissement, effondrement, rétroactions

Il faut donc éviter une simplification excessive. L'instabilité de Jeans ne dit pas tout de l'Univers. Mais elle dit quelque chose d'essentiel : **il existe une échelle à partir de laquelle une fluctuation peut devenir morphogénétique.**

17. Synthèse narrative

On peut maintenant remettre toute la progression en ordre.

Au départ, il y a un milieu presque homogène, traversé par des gradients. Tant que les mécanismes de lissage suffisent, les fluctuations demeurent des rides passagères. Elles apparaissent, oscillent, se dissipent ou s'effacent. Le système reste proche de l'homogène.

Mais lorsqu'un seuil est franchi, la situation change. Dans les cellules de Bénard, le gradient thermique devient trop intense pour que la conduction seule assure le transport de chaleur. Le fluide bifurque vers des cellules convectives. Dans le cas cosmologique, certaines fluctuations de densité deviennent suffisamment grandes, ou suffisamment étendues, pour que la gravité l'emporte sur la pression. La fluctuation n'est plus seulement une onde ; elle devient une graine.

L'équation de Jeans donne la forme mathématique de ce seuil. Elle montre que chaque mode spatial est soumis à une compétition entre deux termes : un terme acoustique de lissage, $c_s^2 k^2$, et un terme gravitationnel d'amplification, $4\pi G\rho_0$. Lorsque le premier domine, le mode oscille. Lorsque le second domine, le mode croît. La morphogenèse commence là où la croissance devient possible.

René Thom permet alors de donner un langage à ce passage. Une catastrophe n'est pas ici un désastre, mais un changement qualitatif de forme. L'instabilité de Jeans linéaire n'est pas une catastrophe de Thom complète ; elle est le seuil, la porte, le moment où le paysage de stabilité change de nature. Si l'on ajoute les non-linéarités qui stabilisent les formes nouvelles, alors l'instabilité devient le noyau d'une véritable morphogenèse gravitationnelle.

La phrase finale pourrait être :

la structure cosmique naît lorsque l'Univers cesse de lisser certaines fluctuations et commence à *les*

Ou encore :

une ride devient une graine lorsque la gravité transforme l'écart en destin morphologique.

18. Bibliographie indicative

- Jeans, James Hopwood. « The Stability of a Spherical Nebula », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 1902.
- Jeans, James Hopwood. *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge University Press, 1928.
- Peebles, P. J. E. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.
- Peebles, P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- Padmanabhan, T. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- Dodelson, Scott. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- Binney, James, et Tremaine, Scott. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2008.
- Mo, Houjun, van den Bosch, Frank, et White, Simon. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- Thom, René. *Stabilité structurelle et morphogenèse*. InterÉditions, 1972.
- Thom, René. *Paraboles et catastrophes*. Flammarion, 1983.
- Thom, René. *Prédire n'est pas expliquer*. Flammarion, 1991.
- Arnold, Vladimir I. *Catastrophe Theory*. Springer, 1984.
- Poston, Tim, et Stewart, Ian. *Catastrophe Theory and Its Applications*. Pitman, 1978.
- Gouda, Naoteru, et Nakamura, Takashi. « Non-Linear Growth of Cosmological Density Fluctuation and Type of Singularity », *Progress of Theoretical Physics*, 1988.

- Gouda, Naoteru, et Nakamura, Takashi. « Non-Linear Growth of One-Dimensional Cosmological Density Fluctuation and Catastrophe Theory », *Progress of Theoretical Physics*, 1989.
- Kremer, G. M., Richarte, M. G., et Teston, F. « Jeans Instability in a Universe with Dissipation », 2018.