De la non-linéarité à la mémoire et à la volatilité

Couplage modal, variable d'ordre et modes cachés dans une physique des processus

Introduction générale

Dans une physique des processus, le problème fondamental n'est pas seulement de décrire un objet, mais de comprendre comment une forme apparaît, se maintient, se déforme ou se transforme. On définit un système, un domaine, une frontière, des variables d'état, des conditions initiales et une loi d'évolution. Puis l'on cherche à comprendre comment cette loi produit une forme dynamique.

Mais, dans un système réel, cette forme n'est presque jamais portée par un seul mécanisme. Elle résulte d'une interaction entre plusieurs modes. Certains modes sont visibles, dominants, structurants ; d'autres sont secondaires, rapides, cachés, négligés ou volontairement éliminés de la description. Pourtant, ces modes oubliés ne disparaissent pas. Ils continuent d'agir sur la variable principale. Leur action réapparaît sous trois formes : une correction de dérive, un terme de mémoire et un terme de volatilité.

Le but de ce texte est de montrer, de manière progressive, comment cette idée se démontre. On partira d'un problème physique non linéaire, on définira la variable d'ordre comme amplitude d'un mode particulier, on montrera comment les modes se couplent, puis on ramènera le problème à une équation linéaire minimale à deux variables : une variable visible X et une variable cachée Y. L'élimination de Y fera apparaître naturellement un noyau de mémoire $K(t)$ et un bruit effectif $\zeta(t)$. Enfin, on montrera que ce bruit effectif peut s'écrire comme la convolution d'un noyau de mémoire par un bruit blanc représentant les fluctuations des modes oubliés.

La phrase directrice est la suivante :

la mémoire est la trace temporelle de la boucle entre le mode visible et les modes cachés ; la volatilité est la trace statistique des fluctuations de ces modes cachés.

1. Le problème physique non linéaire

On considère un système physique défini sur un domaine Ω, avec une frontière $\partial\Omega$. La variable d'état est un champ :

$$q(x, t)$$

Ce champ peut représenter une vitesse, une température, une pression, une densité, une concentration, une amplitude mécanique, une fonction d'onde, ou toute autre grandeur décrivant l'état du système.

La loi d'évolution peut être écrite sous la forme :

$$\partial_t q = Aq + N(q)$$

où A est la partie linéaire de l'opérateur de transformation, et $N(q)$ est la partie non linéaire.

La partie linéaire Aq représente ce que l'on peut généralement analyser par modes propres : diffusion, propagation, relaxation, oscillation, instabilité linéaire. La partie non linéaire $N(q)$ représente les interactions internes du système : saturation, advection, réaction, couplage, transfert d'énergie entre échelles, rétroaction entre formes.

On suppose que l'opérateur linéaire A, avec les conditions aux limites imposées sur $\partial\Omega$, possède des modes propres :

$$A\phi_n = \lambda_n \phi_n$$

Les fonctions ϕ_n sont les formes naturelles du système linéarisé. Les nombres λ_n indiquent leur destin temporel : amortissement, croissance, oscillation ou neutralité.

2. Décomposition modale du champ

On décompose le champ sur cette base de modes :

$$q(x,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x)$$

Les coefficients $a_n(t)$ sont les amplitudes temporelles des modes. Dans une lecture physique, chaque amplitude mesure combien une forme propre est présente dans le système à l'instant t.

Si le problème était purement linéaire, chaque mode évoluerait séparément :

$$\dot{a_n} = \lambda_n a_n$$

Chaque mode raconterait alors sa propre histoire. Un mode stable décroîtrait, un mode instable croîtrait, un mode oscillant vibrerait. Il n'y aurait pas de conversation entre les modes.

Mais dans un système réel, la non-linéarité fait communiquer les modes. Elle transforme la décomposition modale en réseau dynamique.

3. Projection de l'équation sur les modes

On introduit un produit scalaire adapté au problème :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

ou, pour des fonctions complexes :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Si les modes sont orthonormés :

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

l'amplitude du mode n est obtenue par projection :

$$a_n(t) = \langle \phi_n, q(\cdot, t) \rangle$$

En dérivant :

$$\dot{a}_n(t) = \langle \phi_n, \partial_t q \rangle$$

Or :

$$\partial_t q = Aq + N(q)$$

Donc :

$$\dot{a}_n = \langle \phi_n, Aq \rangle + \langle \phi_n, N(q) \rangle$$

La partie linéaire donne :

$$\langle \phi_n, Aq \rangle = \lambda_n a_n$$

La partie non linéaire est le lieu du couplage modal.

4. Apparition des couplages quadratiques et cubiques

Supposons d'abord que la non-linéarité soit quadratique :

$$N(q) = B(q, q)$$

où B est une forme bilinéaire. En remplaçant q par sa décomposition modale, on obtient :

$$B(q, q) = B\left(\sum_i a_i \phi_i, \sum_j a_j \phi_j \right)$$

Par bilinéarité :

$$B(q,q) = \sum_{i,j} a_i a_j B\left(\phi_i, \phi_j\right)$$

En projetant sur le mode n :

$$\langle \phi_n, B(q,q) \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle \phi_n, B\left(\phi_i, \phi_j\right) \rangle$$

On définit le coefficient de couplage :

$$C_{nij} = \langle \phi_n, B\left(\phi_i, \phi_j\right) \rangle$$

On obtient alors :

$$\dot{a}_n = \lambda_n a_n + \sum_{i,j} C_{nij} a_i a_j$$

Si la non-linéarité est cubique :

$$N(q) = T(q,q,q)$$

avec T trilinéaire, alors :

$$\dot{a}_n = \lambda_n a_n + \sum_{i,j} C_{nij} a_i a_j + \sum_{i,j,k} D_{nijk} a_i a_j a_k + \cdots$$

avec :

$$D_{nijk} = \langle \phi_n, T\left(\phi_i, \phi_j, \phi_k\right) \rangle$$

Ce résultat est essentiel. Il montre que la non-linéarité transforme une famille de modes indépendants en réseau de couplages.

Élément	Forme mathématique	Sens physique
Mode propre	$A\phi_n = \lambda_n \phi_n$	forme naturelle du système linéaire
Amplitude modale	$a_n(t)$	intensité temporelle du mode
Couplage quadratique	$C_{nij} a_i a_j$	deux modes contribuent à un troisième
Couplage cubique	$D_{nijk} a_i a_j a_k$	saturation, rétroaction, interaction de triplets
Variable d'ordre	$X(t) = a_1(t)$	mode dominant retenu explicitement

Élément	Forme mathématique	Sens physique
Modes cachés	$a_2, a_3, \ldots$	formes secondaires éliminées ou résumées

Ce tableau mérite une remarque : les coefficients C_{nij} et D_{nijk} ne sont pas des paramètres arbitraires. Ils sont calculés par projection. Ils mesurent la capacité de certaines formes propres à en engendrer d'autres sous l'action de la non-linéarité.

5. Exemple intuitif : deux modes qui en créent un troisième

Dans une base de Fourier :

$$\phi_k(x) = e^{ikx}$$

on a :

$$e^{ipx} e^{irx} = e^{i(p+r)x}$$

Donc, si la non-linéarité est q^2, deux modes de nombres d'onde p et r créent un mode de nombre d'onde :

$$k = p + r$$

La relation de couplage devient :

$$\dot{a}_k = \lambda_k a_k + \sum_{p+r=k} a_p a_r$$

Cette formule est l'image la plus claire du couplage modal : la non-linéarité permet aux formes de se composer, de se recombiner et de produire de nouvelles formes.

6. La variable d'ordre comme mode dominant

Dans beaucoup de problèmes, un mode domine les autres. Il peut s'agir du mode le plus instable, du moins amorti, du plus lent, du plus fortement excité, ou du plus visible à l'échelle d'observation.

On définit alors une variable d'ordre :

$$X(t) = a_1(t)$$

Le champ complet devient :

$$q(x,t) = X(t)\phi_1(x) + \sum_{n\geq 2} a_n(t)\phi_n(x)$$

La variable X porte la forme dominante. Les autres modes forment un halo dynamique :

$$r(x,t) = \sum_{n\geq 2} a_n(t)\phi_n(x)$$

La réduction consiste à suivre $X(t)$ explicitement et à éliminer, résumer ou modéliser statistiquement les modes secondaires.

Mais l'élimination n'est pas une suppression physique. Les modes secondaires continuent d'agir sur X. Ils peuvent modifier sa dérive, produire une mémoire, ou générer une volatilité.

7. Réduction à un modèle linéaire minimal à deux variables

Pour comprendre proprement cette apparition de la mémoire et de la volatilité, on introduit un modèle minimal. On ne garde que deux variables :

$$X(t)$$

variable visible, variable d'ordre, mode principal ;

$$Y(t)$$

variable cachée, mode secondaire ou résumé collectif des modes oubliés.

On pose le système linéaire couplé :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + bY(t)$$

$$\dot{Y}(t) = cX(t) - \gamma Y(t) + \eta(t)$$

Les constantes ont le sens suivant.

Coefficient	Rôle	Interprétation
a	dynamique propre de X	croissance, décroissance ou instabilité du mode principal
b	influence de Y sur X	rétroaction du mode caché sur la variable d'ordre
c	influence de X sur Y	excitation du mode caché par le mode visible
γ	relaxation de Y	vitesse d'oubli du mode caché
$\eta(t)$	agitation cachée	bruit blanc représentant les fluctuations des modes oubliés

Ce système contient une boucle :

$$X \to Y \to X$$

Cette boucle est le mécanisme fondamental de la mémoire.

8. Résolution de la variable cachée

L'équation de Y s'écrit :

$$\dot{Y} + \gamma Y = cX + \eta(t)$$

Sa solution est :

$$Y(t) = e^{-\gamma t}Y(0) + c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}X(s)ds + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

Cette expression montre trois contributions :

Terme	Signification
$e^{-\gamma t}Y(0)$	souvenir transitoire de l'état initial caché
$c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}X(s)ds$	mémoire de l'action passée de X sur Y
$\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$	bruit caché filtré par la dynamique de Y

Le mode caché Y agit donc comme un réservoir dynamique. Il reçoit l'influence de X, la conserve pendant un temps caractéristique $1/\gamma$, puis la renvoie vers X.

9. Élimination de la variable cachée

On réinjecte $Y(t)$ dans :

$$\dot{X} = aX + bY$$

On obtient :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + be^{-\gamma t}Y(0) + bc\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}X(s)ds + b\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

En négligeant le transitoire initial lorsque t est assez grand, on obtient :

$$X^{\cdot}(t) = aX(t) + \int_0^t K(t - s)X(s)ds + \zeta(t)$$

avec :

$$K(t - s) = bce^{-\gamma(t-s)}$$

et :

$$\zeta(t) = b\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\eta(s)ds$$

Cette équation est le résultat central :

$$X^{\cdot}(t) = aX(t) + \int_0^t K(t - s)X(s)ds + \zeta(t)$$

Elle montre que l'élimination d'un mode caché produit une équation réduite contenant une dérive locale, une mémoire et un bruit effectif.

10. Interprétation de la mémoire

Le noyau de mémoire est :

$$K(\tau) = bce^{-\gamma\tau}, \tau \geq 0$$

Il exprime la boucle :

$$X(s) \to Y(t) \to X(t)$$

Le terme c mesure l'influence de X sur Y. Le facteur $e^{-\gamma(t-s)}$ mesure la persistance de cette influence dans Y. Le facteur b mesure le retour de Y sur X.

On peut donc écrire en langage physique :

$$mémoire = excitation\,du\,mode\,caché \times persistance \times rétroaction$$

La mémoire n'est donc pas ajoutée artificiellement. Elle est la conséquence mécanique de l'élimination d'une variable cachée couplée à la variable visible.

11. Le bruit effectif comme convolution d'un noyau et d'un bruit blanc

On suppose maintenant que les fluctuations des modes oubliés sont représentées par un bruit blanc :

$$\eta(t) = \sigma_Y W^{\cdot}_t$$

Alors le bruit effectif ressenti par X est :

$$\zeta(t) = b\sigma_Y \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dW_s$$

On peut écrire cette expression sous forme de convolution :

$$\zeta(t) = \int_0^t G(t - s) dW_s$$

avec :

$$G(\tau) = b\sigma_Y e^{-\gamma\tau}$$

Ainsi :

$$\zeta = G * dW$$

ou, de manière formelle, si η désigne le bruit blanc :

$$\zeta = G * \eta$$

Cette formule est très importante :

la volatilité ressentie par la variable d'ordre n'est pas un bruit brut ; c'est un bruit filtré par la mémoire du mode caché.

12. Corrélation temporelle du bruit effectif

Parce que $\zeta(t)$ est une convolution, il n'est pas blanc. Il est coloré, c'est-à-dire temporellement corrélé.

Sa covariance est donnée par :

$$E[\zeta(t)\zeta(t')) = \int_0^{min(t,t')} G(t - s)G(t' - s) ds$$

Dans le cas où $G(\tau) = b\sigma_Y e^{-\gamma\tau}$ et dans un régime stationnaire, on obtient une corrélation de type exponentiel :

$$E[\zeta(t)\zeta(t + \tau)) \propto e^{-\gamma|\tau)}$$

Donc le même paramètre γ qui mesure la durée de mémoire du mode caché mesure aussi le temps de corrélation du bruit transmis à X.

On peut dire :

le mode caché colore le hasard.

Le bruit blanc des modes oubliés devient un bruit corrélé parce qu'il traverse un réservoir dynamique avant d'atteindre la variable d'ordre.

13. Relation entre noyau de mémoire et noyau de volatilité

Dans le modèle minimal, le noyau de mémoire est :

$$K(\tau) = bce^{-\gamma\tau}$$

Le noyau qui filtre le bruit est :

$$G(\tau) = b\sigma_Y e^{-\gamma\tau}$$

Ils ne sont pas identiques, car l'un contient c et l'autre contient σ_Y. Mais ils ont la même structure temporelle :

$$K(\tau) \propto e^{-\gamma\tau}$$

$$G(\tau) \propto e^{-\gamma\tau}$$

Cela signifie que mémoire et volatilité ont la même origine dynamique : la relaxation du mode caché Y.

Élément	Expression	Origine	Sens
Mémoire	$K(\tau) = bce^{-\gamma\tau}$	boucle $X \to Y \to X$	influence retardée de X sur lui-même via Y
Bruit effectif	$\zeta(t) = \int_0^t G(t-s)dW_s$	fluctuations de Y transmises à X	volatilité colorée
Noyau de bruit	$G(\tau) = b\sigma_Y e^{-\gamma\tau}$	filtre dynamique de Y	coloration temporelle du bruit
Temps de mémoire	$1/\gamma$	relaxation de Y	durée de persistance des effets cachés

La mémoire est la réponse du mode caché à l'histoire de X. La volatilité est la réponse du mode caché à l'agitation des modes oubliés.

14. Généralisation à un noyau de mémoire quelconque

Dans un système réel, il n'y a pas un seul mode caché, mais une famille de modes secondaires. On peut écrire :

$$Y = \left(a_2, a_3, \ldots\right)$$

Chaque mode caché possède son propre temps de relaxation, son propre couplage à X, sa propre fluctuation. L'élimination de tous ces modes donne un noyau de mémoire plus général :

$$K(t - s) = \sum_{n \geq 2} b_n c_n e^{-\gamma_n (t-s)}$$

Dans la limite continue, cette somme peut devenir :

$$K(\tau) = \int_0^\infty \rho(\gamma) b(\gamma) c(\gamma) e^{-\gamma \tau} d\gamma$$

Le bruit effectif devient également une superposition de bruits filtrés :

$$\zeta(t) = \sum_{n \geq 2} b_n \sigma_n \int_0^t e^{-\gamma_n (t-s)} dW_n(s)$$

ou, sous forme compacte :

$$\zeta(t) = \int_0^t G(t - s) dW_s$$

Le cas général est donc :

$$X^{\cdot}(t) = F(X(t)) + \int_0^t K(t - s) X(s) ds + \zeta(t)$$

avec :

$$\zeta(t) = \int_0^t G(t - s) dW_s$$

Ici, K est le noyau de mémoire déterministe, et G est le noyau de filtrage du bruit. Dans les modèles les plus simples, ils ont la même structure temporelle. Dans les modèles plus généraux, ils sont reliés par la dynamique des modes cachés et par leurs corrélations.

15. Approximation de mémoire courte et volatilité locale

Si les modes cachés sont très rapides, leurs temps de relaxation sont très courts. Le noyau $K(\tau)$ est alors concentré près de $\tau = 0$.

On peut approximer :

$$\int_0^t K(t-s)X(s)ds \approx \kappa X(t)$$

avec :

$$\kappa = \int_0^\infty K(\tau)d\tau$$

De même, le bruit coloré peut être remplacé par un bruit blanc effectif :

$$\zeta(t) \approx \sigma_{eff} W_t^{\cdot}$$

On obtient alors une équation stochastique locale :

$$dX = F_{eff}(X)dt + \sigma_{eff} dW_t$$

Dans ce régime, la mémoire a été absorbée dans la dérive effective, et le bruit corrélé a été remplacé par une volatilité locale.

Mais cette approximation n'est valable que si la variable d'ordre évolue beaucoup plus lentement que les modes cachés.

16. Hypothèses nécessaires

Il est important d'expliciter les hypothèses de cette réduction.

Hypothèse	Rôle	Conséquence
Décomposition modale possible	écrire $q = \sum a_n \phi_n$	description du champ par amplitudes
Mode dominant identifiable	définir $X = a_1$	variable d'ordre
Modes secondaires couplés à X	boucle $X \leftrightarrow Y$	apparition de mémoire
Modes cachés dissipatifs	$\gamma > 0$	mémoire décroissante
Fluctuations internes des modes cachés	présence de $\eta(t)$	bruit transmis à X
Nombreux modes oubliés ou agitation non résolue	approximation statistique	bruit effectif
Séparation d'échelles éventuelle	Y plus rapide que X	volatilité locale possible
Corrélations contrôlées	covariance finie	définition de σ_{eff}

Ces hypothèses montrent que la volatilité n'est pas une simple hypothèse ajoutée. Elle apparaît lorsque l'on choisit de décrire le système par une variable d'ordre tout en éliminant les degrés de liberté secondaires.

17. Lecture finale dans la physique des processus

Dans une physique des processus, le système complet est un champ $q(x, t)$ évoluant sous l'action d'une loi non linéaire. La non-linéarité couple les modes. Parmi ces modes, l'un peut devenir dominant : il devient variable d'ordre. Les autres modes constituent un environnement interne. Ils ne sont plus suivis explicitement, mais ils continuent d'agir.

Leur action déterministe devient mémoire. Leur agitation devient volatilité. Leur relaxation donne la durée de corrélation. Leur couplage à la variable d'ordre donne l'intensité de l'effet.

La forme réduite du problème est donc :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + \int_0^t K(t - s)X(s)ds + \zeta(t)$$

avec :

$$\zeta(t) = \int_0^t G(t - s)dW_s$$

Cette équation dit que le devenir de la variable d'ordre n'est pas seulement gouverné par sa tendance locale. Il est aussi travaillé par son passé et agité par les modes oubliés.

Conclusion

Le chemin parcouru peut être résumé ainsi :

$$système\ non\ linéaire \rightarrow couplage\ des\ modes \rightarrow mode\ dominant \rightarrow variable\ d'ordre \rightarrow modes\ cachés$$

La non-linéarité crée les couplages. Les couplages créent des boucles entre modes. L'élimination des modes cachés transforme ces boucles en mémoire. Les fluctuations des modes cachés, filtrées par leur propre dynamique, deviennent un bruit coloré. Ce bruit coloré est la convolution d'un noyau de réponse par un bruit blanc.

La phrase forte est donc :

La variable d'ordre porte la forme visible ; le noyau de mémoire porte la trace de ses interactions passées avec les modes cachés ; la volatilité porte l'ombre statistique des fluctuations de ces modes oubliés.

Ou encore :

La volatilité n’est pas un hasard pur : c’est un hasard filtré par la mémoire des formes que le modèle a choisi de ne plus suivre.