Calcul de la volatilité temporelle à partir des modes cachés

De la dynamique modale à l'EDO stochastique de la variable d'ordre

Introduction — Calculer la forme, puis comprendre ses fluctuations

Lorsqu'un système physique réel est décrit par une équation d'évolution, le premier objectif est souvent de calculer la forme qui apparaît : une trajectoire, un champ de température, un écoulement, une vibration, une onde, une concentration, une structure émergente. Mais dès que le système devient complexe, cette forme n'est jamais le produit d'un seul mécanisme. Elle naît d'une composition de modes, d'interactions et de rétroactions.

On peut alors chercher une représentation plus intelligible : au lieu de suivre toutes les variables du système, on conserve une variable d'ordre, c'est-à-dire un mode dominant, et l'on regroupe les autres modes dans une dynamique cachée. Cette opération est très féconde, mais elle a un prix : les modes éliminés ne disparaissent pas. Ils reviennent sous trois formes : une correction de la dérive, un terme de mémoire, et une volatilité effective.

Le but de ce texte est de montrer comment cette volatilité peut se calculer, non comme une constante arbitraire, mais comme une grandeur dépendant du temps, issue des modes cachés et du noyau de mémoire. On partira du problème modal complet, on introduira le couplage entre modes, puis on réduira le système à une variable d'ordre. On montrera ensuite comment le noyau de mémoire apparaît, comment il filtre le bruit blanc des modes oubliés, et comment cela conduit à une volatilité temporelle dans l'équation différentielle stochastique de la variable d'ordre.

La phrase directrice est la suivante :

la volatilité n'est pas une constante extérieure au modèle ; elle est l'énergie fluctuante des modes oubliés, filtrée par leur mémoire.

---

1. Le problème physique non linéaire

Considérons un système physique défini sur un domaine spatial Ω, avec une frontière $\partial\Omega$, des conditions initiales et des conditions aux limites. La variable d'état du système est un champ $q(x, t)$, qui peut représenter une température, une concentration, une vitesse, une pression, un champ électromagnétique, une déformation ou toute autre grandeur physique.

On écrit l'équation d'évolution sous la forme générale :

$$\partial_t q = Aq + N(q).$$

Dans cette écriture, A désigne la partie linéaire de l'opérateur de transformation. Elle contient par exemple la diffusion, la propagation linéaire, l'élasticité linéaire, la relaxation

ou la partie diagonalisable du problème. Le terme $N(q)$ contient les effets non linéaires : interaction entre modes, saturation, advection, réaction, couplage entre champs, effets géométriques ou rétroactions internes.

Lorsque la non-linéarité est bilinéaire, on peut écrire :

$$N(q) = B(q, q),$$

où B est une application bilinéaire. Cela signifie que l'effet non linéaire dépend du produit de deux états du système. Cette situation est très fréquente : en mécanique des fluides, le terme convectif $(v \cdot \nabla)v$ est bilinéaire ; dans de nombreux modèles de réaction, d'interaction ou de transfert, les produits de variables créent des couplages entre formes.

Le problème physique peut alors être résumé ainsi :

$$\partial_t q = Aq + B(q, q).$$

Cette équation dit que le devenir du système possède deux niveaux. Le premier est linéaire : chaque forme propre peut évoluer selon son propre rythme. Le second est non linéaire : les formes ne restent plus séparées, elles interagissent et peuvent s'engendrer mutuellement.

---

2. Décomposition en modes et définition de la variable d'ordre

Supposons que la partie linéaire A possède des modes propres $\phi_n(x)$:

$$A\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

Les valeurs propres λ_n indiquent le destin temporel des modes : croissance, décroissance, oscillation ou stabilité marginale. On développe alors le champ $q(x, t)$ sur cette base de modes :

$$q(x, t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x).$$

Les coefficients $a_n(t)$ sont les amplitudes modales. Ils disent combien chaque forme propre est présente dans la configuration globale du système.

Dans une lecture de physique des processus, les modes propres sont les formes naturelles que le système peut prendre sous l'action de sa loi et de sa frontière. Mais, dans un système complexe, tous les modes ne jouent pas le même rôle. Certains sont dominants, d'autres secondaires, d'autres encore très rapides ou faiblement observables.

On choisit alors une variable d'ordre :

$$X(t) = a_1(t).$$

Cette variable représente le mode principal, la forme dominante, le degré de liberté que l'on décide de suivre explicitement. Les autres modes sont notés :

$$a_\alpha(t), \alpha \geq 2.$$

Ils constituent le monde caché du modèle réduit. Ils ne sont pas supprimés physiquement ; ils sont simplement éliminés de la description explicite.

On a donc :

$$q(x,t) = X(t)\phi_1(x) + \sum_{\alpha \geq 2} a_\alpha(t)\phi_\alpha(x).$$

Cette formule est fondamentale. Elle sépare la forme visible, portée par $X(t)\phi_1(x)$, et le halo des formes secondaires, porté par les modes $a_\alpha(t)\phi_\alpha(x)$.

---

3. Projection de l'équation non linéaire sur les modes

On projette l'équation :

$$\partial_t q = Aq + B(q,q)$$

sur chaque mode. Dans le cas le plus simple, les modes sont orthonormés. Dans un cas non auto-adjoint, on doit utiliser les modes adjoints ψ_n, mais le principe reste le même.

Les coefficients de couplage bilinéaire sont définis par :

$$C_{nij} = \langle \psi_n, B(\phi_i, \phi_j) \rangle.$$

Alors les amplitudes modales vérifient :

$$\dot{a}_n = \lambda_n a_n + \sum_{i,j} C_{nij} a_i a_j.$$

Cette équation est la clé du couplage modal. Elle montre que le mode n n'évolue pas seulement selon sa valeur propre λ_n. Il reçoit aussi l'influence de tous les couples de modes (i,j) capables de produire une projection dans sa direction.

On peut lire cette relation ainsi :

la non-linéarité transforme une collection de modes indépendants en un réseau d'interactions entre formes.

Tableau 1 — Signification des termes modaux

Terme	Signification mathématique	Sens physique
$\lambda_n a_n$	évolution linéaire du mode n	croissance, amortissement, oscillation
$C_{nij} a_i a_j$	interaction des modes i et j vers le mode n	deux formes en alimentent une troisième
$C_{n11} X^2$	auto-interaction du mode dominant	saturation ou amplification propre
$C_{n1\alpha} X a_\alpha$	interaction entre X et un mode caché	couplage visible-caché
$C_{n\alpha\beta} a_\alpha a_\beta$	action collective des modes cachés	bruit interne, correction, rétroaction

Ce tableau montre que les coefficients C_{nij} ne sont pas de simples constantes techniques. Ils mesurent la manière dont les formes propres se parlent. Si $C_{nij} = 0$, l'interaction considérée est interdite ou absente ; si $C_{nij} \neq 0$, les modes i et j peuvent nourrir le mode n.

---

4. Équation exacte du mode dominant

Prenons maintenant $n = 1$, c'est-à-dire l'équation du mode dominant $X = a_1$. On obtient :

$$\dot{X} = \lambda_1 X + \sum_{i,j} C_{1ij} a_i a_j.$$

En séparant les contributions selon qu'elles impliquent le mode dominant ou les modes cachés, on a :

$$\dot{X} = \lambda_1 X + C_{111} X^2 + 2 \sum_{\alpha \geq 2} C_{11\alpha} X a_\alpha + \sum_{\alpha,\beta \geq 2} C_{1\alpha\beta} a_\alpha a_\beta.$$

On définit alors la force modale cachée exercée sur X :

$$R(t) = 2 \sum_{\alpha \geq 2} C_{11\alpha} X(t) a_\alpha(t) + \sum_{\alpha,\beta \geq 2} C_{1\alpha\beta} a_\alpha(t) a_\beta(t).$$

L'équation devient :

$$\dot{X} = \lambda_1 X + C_{111} X^2 + R(t).$$

Le terme $R(t)$ contient toute l'action des modes cachés sur le mode dominant. Il est le lieu où se trouvent la correction du potentiel, la mémoire et la volatilité.

5. Effet moyen et fluctuation : naissance du potentiel effectif

On décompose la force cachée $R(t)$ en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$R(t) = \langle R|X\rangle + \xi(t),$$

avec :

$$\xi(t) = R(t) - \langle R|X\rangle.$$

La moyenne conditionnelle $\langle R|X\rangle$ désigne l'effet moyen des modes cachés lorsque la variable d'ordre vaut X. Elle corrige la dérive du mode dominant.

On définit alors :

$$F_{eff}(X) = \lambda_1 X + C_{111}X^2 + \langle R|X\rangle.$$

L'équation de X devient :

$$\dot{X} = F_{eff}(X) + \xi(t).$$

Si la dérive effective peut s'écrire comme une force issue d'un potentiel, alors :

$$F_{eff}(X) = -\frac{dV}{dX}.$$

On obtient :

$$\dot{X} = -\frac{dV}{dX} + \xi(t).$$

Le potentiel $V(X)$ n'est donc pas seulement le potentiel du mode dominant isolé. Il contient déjà l'effet moyen des modes cachés. Les modes oubliés modifient le relief dans lequel évolue la variable d'ordre.

6. Pourquoi une mémoire apparaît : boucle entre mode visible et mode caché

Pour faire apparaître proprement la mémoire, il faut regarder la dynamique d'un mode caché. Prenons un mode caché représentatif $a_\alpha(t)$. Son équation, linéarisée autour de la dynamique lente de X, peut s'écrire :

$$\dot{a}_\alpha = \lambda_\alpha a_\alpha + h_\alpha X + s_\alpha \eta_\alpha(t),$$

avec :

$$\lambda_\alpha < 0.$$

Le mode caché est donc amorti. Le terme $h_\alpha X$ représente l'excitation déterministe du mode caché par la variable d'ordre. Le terme $s_\alpha \eta_\alpha(t)$ représente les fluctuations internes qui agitent ce mode.

La solution de cette équation est :

$$a_\alpha(t) = e^{\lambda_\alpha t} a_\alpha(0) + \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} h_\alpha X(u)du \; + s_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} \eta_\alpha(u)du.$$

Cette expression contient trois contributions : la mémoire de l'état initial caché, la mémoire de l'action passée de X, et la mémoire des fluctuations internes.

Lorsque le mode caché rétroagit sur X avec un coefficient b_α, il produit un terme :

$$b_\alpha a_\alpha(t).$$

La partie déterministe donne alors :

$$b_\alpha h_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} X(u)du.$$

En sommant sur les modes cachés, on obtient un terme de mémoire :

$$\int_0^t K(t \; - \; u)X(u)du,$$

avec :

$$K(\tau) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha h_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau}, \tau \geq 0.$$

Cette formule donne le noyau de mémoire calculé à partir des modes cachés.

Tableau 2 — Origine du noyau de mémoire

Élément	Rôle	Contribution au noyau
h_α	excitation de a_α par X	entrée de la boucle $X \to a_\alpha$
$e^{\lambda_\alpha \tau}$	relaxation du mode caché	durée de mémoire
b_α	retour de a_α vers X	sortie de la boucle $a_\alpha \to X$
$\lambda_\alpha < 0$	stabilité du mode caché	décroissance du souvenir
somme sur α	ensemble des modes cachés	mémoire globale

Le noyau $K(\tau)$ est donc la trace temporelle des boucles cachées. Chaque mode caché contribue par une exponentielle décroissante dont la durée caractéristique est :

$$\tau_\alpha = \frac{1}{|\lambda_\alpha)}.$$

Plus $|\lambda_\alpha)$ est petit, plus le mode caché se relaxe lentement, et plus il contribue à une mémoire longue.

---

7. Le bruit effectif : convolution du noyau par un bruit blanc

Le même mode caché porte également une fluctuation :

$$s_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} \eta_\alpha(u) du.$$

Lorsque cette fluctuation rétroagit sur X avec le coefficient b_α, elle produit :

$$b_\alpha s_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} \eta_\alpha(u) du.$$

En sommant sur les modes cachés, on obtient le bruit effectif :

$$\xi(t) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha s_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} \eta_\alpha(u) du.$$

Si l'on écrit les fluctuations sous forme de bruits blancs $dW_{\alpha,u}$, alors :

$$\xi(t) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha s_\alpha \int_0^t e^{\lambda_\alpha (t-u)} dW_{\alpha,u}.$$

On peut définir un noyau stochastique :

$$G(\tau) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha s_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau}.$$

Dans le cas où les bruits peuvent être regroupés en un bruit blanc effectif dW_u, on écrit :

$$\xi(t) = \int_0^t G(t - u) dW_u.$$

La fluctuation ressentie par X n'est donc pas un bruit blanc direct. C'est un bruit blanc filtré par un noyau de mémoire.

Si le canal stochastique est proportionnel au canal déterministe, on peut poser :

$$G(\tau) = \alpha K(\tau).$$

Alors :

$$\xi(t) = \alpha \int_0^t K(t - u) dW_u.$$

Cette équation est centrale :

le bruit effectif est la convolution du noyau de mémoire par un bruit blanc.

---

8. Volatilité temporelle : calcul par l'isométrie d'Itô

Si :

$$\xi(t) = \int_0^t G(t - u) dW_u,$$

alors la variance instantanée de ce bruit effectif est donnée par l'isométrie d'Itô :

$$E[\xi(t)^2) = \int_0^t G^2(t - u) du.$$

On définit donc la volatilité temporelle par :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t G^2(t - u) du.$$

Par changement de variable $\tau = t - u$, on obtient :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t G^2(\tau) d\tau.$$

Si $G(\tau) = \alpha K(\tau)$, alors :

$$\sigma^2(t) = \alpha^2 \int_0^t K^2(\tau) d\tau.$$

Cette formule est le pont précis entre le noyau de mémoire et la volatilité temporelle.

Elle signifie que la volatilité n'est pas une constante. Elle est l'énergie cumulée du noyau de mémoire jusqu'au temps t.

---

9. Exemple avec un seul mode caché

Prenons le cas minimal : une variable d'ordre X et un mode caché Y.

$$\dot{X} = aX + bY,$$

$$dY = (cX - \gamma Y)dt + s_Y dW_t.$$

Ici $\gamma > 0$ est le taux de relaxation de Y. L'équation de Y se résout sous la forme :

$$Y(t) = e^{-\gamma t}Y(0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}cX(u)du + s_Y \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}dW_u.$$

En réinjectant dans l'équation de X, on obtient :

$$\dot{X}(t) = aX(t) + be^{-\gamma t}Y(0) + bc\int_0^t e^{-\gamma(t-u)}X(u)du + bs_Y \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}dW_u.$$

On identifie le noyau de mémoire :

$$K(\tau) = bce^{-\gamma\tau}.$$

Et le noyau de bruit :

$$G(\tau) = bs_Y e^{-\gamma\tau}.$$

La volatilité temporelle vaut :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t b^2 s_Y^2 e^{-2\gamma\tau}d\tau.$$

Donc :

$$\sigma^2(t) = \frac{b^2 s_Y^2}{2\gamma}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right).$$

Et :

$$\sigma(t) = \frac{|b)s_Y}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{1 - e^{-2\gamma t}}.$$

Cette formule montre que la volatilité commence à zéro, puis croît jusqu'à une valeur asymptotique :

$$\sigma_\infty^2 = \frac{b^2 s_Y^2}{2\gamma}.$$

La constante de temps de cette montée est $1/\gamma$. Ainsi, la volatilité temporelle est directement gouvernée par le temps de mémoire du mode caché.

10. Cas général avec plusieurs modes cachés

Avec plusieurs modes cachés indépendants, on écrit :

$$G(\tau) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha s_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau}, \lambda_\alpha < 0.$$

Si les bruits associés aux modes cachés sont indépendants, la variance s'additionne :

$$\sigma^2(t) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha^2 s_\alpha^2 \int_0^t e^{2\lambda_\alpha \tau} d\tau.$$

Comme $\lambda_\alpha < 0$, on obtient :

$$\sigma^2(t) = \sum_{\alpha \geq 2} \frac{b_\alpha^2 s_\alpha^2}{-2\lambda_\alpha} \left(1 - e^{2\lambda_\alpha t}\right).$$

À long terme :

$$\sigma_\infty^2 = \sum_{\alpha \geq 2} \frac{b_\alpha^2 s_\alpha^2}{-2\lambda_\alpha}.$$

Cette formule est très importante. Elle montre que la volatilité dépend de trois facteurs : le couplage de retour b_α, l'intensité de fluctuation s_α, et le temps de relaxation du mode caché, mesuré par $1/|\lambda_\alpha|$.

Tableau 3 — Lecture physique de la volatilité modale

Grandeur	Signification	Effet sur la volatilité
b_α	retour du mode caché vers X	plus il est fort, plus $\sigma(t)$ augmente
s_α	agitation interne du mode caché	plus elle est forte, plus $\sigma(t)$ augmente
$\lambda_\alpha < 0$	relaxation du mode caché	plus $\lvert\lambda_\alpha\rvert$ est petit, plus la mémoire est longue
$1/\lvert\lambda_\alpha\rvert$	temps de mémoire	une mémoire longue renforce la persistance des fluctuations
$e^{\lambda_\alpha t}$	décroissance temporelle	contrôle la montée vers la volatilité asymptotique

Ce tableau montre que la volatilité n'est pas un paramètre arbitraire. Elle peut être reliée aux propriétés spectrales des modes cachés.

11. Volatilité corrélée par le noyau de mémoire

Le bruit effectif :

$$\xi(t) = \int_0^t G(t - u)dW_u$$

est un bruit coloré. Sa covariance est :

$$E[\xi(t)\xi(t')) = \int_0^{min(t,t')} G(t - u)G(t' - u)du.$$

Cette formule montre que deux valeurs du bruit effectif à deux instants différents restent corrélées si leurs histoires passées se recouvrent à travers le noyau G.

Dans le cas stationnaire et pour un noyau exponentiel :

$$G(\tau) = bs_\gamma e^{-\gamma\tau},$$

la covariance décroît comme :

$$C_\xi(\Delta) \propto e^{-\gamma|\Delta)}.$$

Donc le même paramètre γ contrôle à la fois la mémoire déterministe et la corrélation de la volatilité. La volatilité n'est pas seulement une amplitude : elle possède une structure temporelle.

Si G est proportionnel à K, alors :

$$E[\xi(t)\xi(t')) = \alpha^2 \int_0^{min(t,t')} K(t - u)K(t' - u)du.$$

Le noyau de mémoire intervient donc deux fois : il filtre le bruit et il fixe sa corrélation.

12. Pont avec votre EDO de variable d'ordre

Votre équation s'écrit :

$$dX_t = -\frac{dV}{dX}\left(X_t\right)dt + \sigma(t)dW_{1,t} + sdW_{2,t}.$$

Dans le cadre construit ci-dessus, elle est la forme locale réduite d'une équation plus complète :

$$\dot{X}(t) = -\frac{dV}{dX}(X(t)) + \int_0^t K(t-u)X(u)du + \xi(t) + s\eta_2(t).$$

avec :

$$\xi(t) = \int_0^t G(t-u)dW_{1,u}.$$

Si l'on condense le bruit coloré $\xi(t)$ en une approximation locale, on écrit :

$$\xi(t)dt \approx \sigma(t)dW_{1,t}.$$

La volatilité temporelle est alors :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t G^2(t-u)du.$$

Si $G = \alpha K$, alors :

$$\sigma^2(t) = \alpha^2 \int_0^t K^2(t-u)du.$$

On voit donc précisément comment le noyau de mémoire calculé à partir des modes cachés intervient dans votre EDO : il détermine l'intensité temporelle de la volatilité endogène.

Tableau 4 — Correspondance entre la réduction modale et votre EDO

Terme dans la réduction modale	Terme dans votre EDO	Interprétation
mode dominant $X = a_1$	X_t	variable d'ordre
dérive moyenne $F_{eff}(X)$	$-V'(X_t)dt$	potentiel effectif
noyau $K(t)$	influence sur $\sigma(t)$	mémoire des modes cachés
bruit filtré $\xi(t)$	$\sigma(t)dW_{1,t}$	volatilité endogène
bruit extérieur	$sdW_{2,t}$	perturbation exogène ou résiduelle
modes cachés a_α	non observés directement	source de mémoire et de volatilité

Ce tableau donne la lecture complète : votre EDO n'est pas une équation posée empiriquement. Elle peut être interprétée comme la réduction d'un système modal non linéaire dans lequel les modes cachés ont été éliminés mais continuent d'agir sous forme de mémoire et de volatilité.

13. Hypothèses nécessaires

Pour que cette construction soit valide, plusieurs hypothèses doivent être explicitées.

Tableau 5 — Hypothèses du passage modes cachés vers volatilité temporelle

Hypothèse	Rôle	Limite
Décomposition modale possible	écrire $q = \sum a_n \phi_n$	nécessite une base adaptée ou une approximation
Existence d'un mode dominant	définir $X = a_1$	peut échouer si plusieurs modes sont également dominants
Modes cachés amortis	avoir $\lambda_\alpha < 0$	si un mode caché devient instable, il doit être gardé explicitement
Couplages faibles/modérés	linéariser les modes cachés autour de X	couplages forts peuvent nécessiter plusieurs variables d'ordre
Fluctuations modélisables par bruit blanc	écrire dW_α	approximation valable à l'échelle réduite
Mémoire représentable par noyau	écrire $K(t)$	peut être multi-échelle ou non exponentielle
Condensation locale possible	passer de $\xi(t)$ à $\sigma(t)dW_t$	approximation si l'on accepte une EDS locale
Proportionnalité éventuelle $G = \alpha K$	relier directement mémoire et volatilité	pas toujours vraie ; mêmes temps mais amplitudes différentes

Ces hypothèses montrent que la construction est rigoureuse dans son principe, mais qu'elle doit être adaptée au système étudié. Dans certains cas, le bruit reste coloré et ne doit pas être remplacé trop vite par un bruit blanc local. Dans d'autres cas, plusieurs variables d'ordre doivent être conservées.

14. Conclusion — La volatilité comme mémoire énergétique des modes oubliés

Le chemin parcouru peut être résumé ainsi. On part d'un système non linéaire dont la dynamique est décrite par :

$$\partial_t q = Aq + B(q, q).$$

On décompose le champ en modes :

$$q(x,t) = X(t)\phi_1(x) + \sum_{\alpha \geq 2} a_\alpha(t)\phi_\alpha(x).$$

La variable d'ordre X est le mode dominant. Les modes a_α sont les modes cachés. Par le couplage bilinéaire, ces modes cachés rétroagissent sur X. Leur effet moyen modifie le potentiel ; leur réponse temporelle produit un noyau de mémoire ; leurs fluctuations produisent un bruit effectif.

Le noyau de mémoire est :

$$K(\tau) = \sum_{\alpha \geq 2} b_\alpha h_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau}.$$

Le bruit effectif est :

$$\xi(t) = \int_0^t G(t-u)dW_u.$$

Et la volatilité temporelle est :

$$\sigma^2(t) = \int_0^t G^2(t-u)du.$$

Si le canal de bruit suit le noyau de mémoire :

$$G = \alpha K,$$

alors :

$$\sigma^2(t) = \alpha^2 \int_0^t K^2(t-u)du.$$

On obtient ainsi le lien avec votre EDO :

$$dX_t = -V'(X_t)dt + \sigma(t)dW_{1,t} + sdW_{2,t}.$$

Le terme $-V'(X_t)dt$ porte la dynamique moyenne de la forme dominante. Le terme $\sigma(t)dW_{1,t}$ porte la volatilité endogène issue des modes cachés et structurée par la mémoire. Le terme $sdW_{2,t}$ porte le bruit extérieur ou résiduel.

La phrase finale pourrait être :

le potentiel décrit le destin moyen de la variable d'ordre ; le noyau de mémoire décrit la persistance des modes oubliés ; la volatilité temporelle mesure l'énergie fluctuante que cette mémoire transmet au présent.