De Vlasov aux structures dissipatives : de la trajectoire à la forme

Synthèse pédagogique et raisonnée

30 juillet 2026

Introduction — Le problème : comment une forme se transforme-t-elle ?

Une structure dissipative n'est pas une forme immobile. Elle est une organisation qui se maintient parce qu'elle est traversée par des flux de matière, d'énergie ou d'information. Une flamme conserve une forme reconnaissable alors que le combustible et les gaz qui la constituent sont continuellement renouvelés. Un vortex persiste alors que les molécules qui le traversent changent sans cesse. Une cellule vivante maintient son organisation en échangeant en permanence matière et énergie avec son milieu. De même, une structure convective de Bénard existe uniquement tant qu'un flux thermique traverse le fluide.

Cette observation conduit à une question centrale : **comment un système déjà organisé se transforme-t-il lorsqu'on modifie ses contraintes extérieures ?**

Le schéma intuitif est simple :

> état initial → contrainte ou source extérieure → perte de stabilité → réorganisation → nouvelle forme.

Mais ce schéma laisse ouverte une difficulté essentielle. À quel niveau décrire la transformation ? Faut-il suivre chaque constituant ? Faut-il travailler directement avec une densité macroscopique ? Où apparaît exactement la forme nouvelle ?

Le rapprochement développé ici propose une réponse en distinguant trois niveaux emboîtés :

1. **les trajectoires individuelles**, qui décrivent les constituants ;
2. **la distribution des états**, qui décrit la population de constituants ;
3. **la forme macroscopique**, qui apparaît à travers les moments de cette distribution ou une variable d'ordre réduite.

L'équation de Vlasov occupe alors une place intermédiaire décisive. Elle n'est pas, à elle seule, une théorie universelle des structures dissipatives. Mais une version généralisée, enrichie de diffusion, de friction, de sources et éventuellement de mémoire, peut servir de **pont cinétique** entre les trajectoires microscopiques et les équations macroscopiques de diffusion, d'agrégation et de réaction.

La chaîne que nous allons reconstruire pas à pas est la suivante :

$$trajectoires\ stochastiques \rightarrow Fokker\text{–}Planck \rightarrow McKean\text{–}Vlasov \rightarrow Vlasov\text{–}Fokker\text{–}Planck \rightarrow Smoluchowski\ /\ agrég$$

Cette chaîne n'est pas automatique : chaque flèche correspond à des hypothèses précises. Son intérêt est justement de rendre visibles ces hypothèses et de montrer comment des théories souvent enseignées séparément peuvent être articulées dans une même physique des processus.

1. Premier niveau : les trajectoires individuelles

1.1 Un constituant possède un état et une trajectoire

Commençons par le niveau le plus simple. Un constituant mécanique est décrit par sa position $x(t)$ et sa vitesse $v(t)$. Sa cinématique vérifie :

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

et sa dynamique :

$$\frac{dv}{dt} = A.$$

La première équation signifie simplement que la vitesse est la variation temporelle de la position. La seconde dit que l'accélération est la variation de la vitesse.

Dans un système simple, A peut être une force extérieure prescrite. Mais dans un système collectif, chaque constituant peut être influencé par tous les autres. L'accélération dépend alors de l'état de la population entière.

C'est le premier mécanisme d'auto-organisation :

> les constituants créent un champ collectif, et ce champ agit en retour sur les constituants.

On peut symboliquement écrire :

$$A = A[f].$$

Cette écriture anticipe déjà le rôle de la distribution f qui sera introduite au niveau suivant.

1.2 Pourquoi le niveau individuel devient vite insuffisant

Pour dix particules, suivre les trajectoires est possible. Pour des millions ou des milliards d'éléments, la description individuelle devient non seulement impraticable, mais surtout peu informative. Ce que l'on cherche n'est plus la trajectoire de chaque élément, mais la manière dont la population entière se répartit entre différentes positions, vitesses ou états.

C'est le passage fondamental de la mécanique des trajectoires à la théorie cinétique.

2. Deuxième niveau : la distribution dans l'espace des états

2.1 La fonction de distribution

On introduit une fonction :

$$f(x, v, t).$$

La quantité $f(x, v, t)dxdv$ représente le nombre, ou la proportion, de constituants qui se trouvent autour de la position x et possèdent une vitesse voisine de v à l'instant t.

Cette fonction vit dans **l'espace des phases** : un espace plus riche que l'espace physique, puisqu'il contient simultanément position et vitesse.

Il faut insister sur cette idée : la forme visible dans l'espace ordinaire n'est pas encore f. La distribution f contient une information beaucoup plus détaillée. Elle constitue une sorte de cartographie statistique de toutes les possibilités dynamiques du système.

2.2 L'équation de Vlasov comme transport dans l'espace des phases

Dans sa forme conservative, l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + A[f] \cdot \nabla_v f = 0.$$

Chaque terme possède une signification simple.

Le terme $\partial f/\partial t$ mesure la variation locale de la distribution.

Le terme $v \cdot \nabla_x f$ représente le transport dans l'espace physique : les constituants changent de position parce qu'ils ont une vitesse.

Le terme $A[f] \cdot \nabla_v f$ représente le transport dans l'espace des vitesses : les constituants changent de vitesse parce qu'ils subissent un champ collectif.

Ainsi, Vlasov peut se lire comme une équation de **réorganisation continue de la population dans l'espace des états**.

2.3 La boucle de champ moyen

Le point décisif n'est pas seulement qu'une distribution évolue. Il est que le champ qui fait évoluer la distribution dépend lui-même de cette distribution :

$$f \to A[f] \to trajectoires \to f.$$

Cette rétroaction est familière en astrophysique. La distribution des étoiles fournit une densité :

$$\rho(x,t) = \int f(x,v,t)dv.$$

Cette densité produit un potentiel gravitationnel :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho,$$

et le potentiel engendre l'accélération :

$$A = -\nabla\Phi.$$

La population produit donc son propre environnement dynamique.

Cette idée est immédiatement généralisable : le champ collectif peut représenter gravitation, électromagnétisme, attraction, répulsion, alignement, interaction sociale ou toute autre influence de champ moyen.

3. Introduire la contrainte extérieure : le chemin vers l'instabilité

3.1 Le paramètre de contrôle

Pour relier Vlasov à la transformation d'une structure dissipative, il faut introduire un paramètre extérieur λ. Celui-ci peut représenter une différence de température, un champ appliqué, une pression, une intensité de pompage, un flux imposé ou une autre contrainte environnementale.

Le champ collectif devient :

$$A = A[f, \lambda).$$

L'équation de transport devient alors :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + A[f, \lambda) \cdot \nabla_v f = 0.$$

Le sens physique est simple : la population continue de produire son propre champ, mais les règles de cette interaction sont modifiées par l'environnement.

3.2 Un état stationnaire et sa perturbation

Supposons qu'avant la modification de la contrainte, le système possède une distribution stationnaire f_0. On perturbe légèrement cet état :

$$f = f_0 + \delta f.$$

La question n'est plus de connaître exactement la trajectoire de chaque constituant, mais de savoir ce que devient δf.

Si la perturbation décroît, l'état initial est stable. Si elle croît, l'état initial est instable.

Après linéarisation, on obtient symboliquement :

$$\partial_t \delta f = L(\lambda)\delta f.$$

On cherche des modes sous la forme :

$$\delta f = \phi e^{st},$$

ce qui conduit à une équation aux valeurs propres :

$$L(\lambda)\phi = s\phi.$$

Si la partie réelle de s est négative, la perturbation disparaît. Si elle est positive, elle grandit. Le seuil est atteint lorsque la partie réelle traverse zéro.

Cette étape donne une signification précise à l'idée d'émergence : **une contrainte extérieure peut changer la stabilité de la distribution et sélectionner un mode qui devient dominant**.

4. De l'instabilité à la nouvelle forme

4.1 Le mode critique

Près du seuil, une très grande partie de la complexité du système peut être dominée par un petit nombre de modes lents. Si un mode critique ϕ_c domine, on peut écrire :

$$f \simeq f_0 + A(t)\phi_c + \cdots.$$

Le mode ϕ_c indique la géométrie de la déformation de la distribution ; $A(t)$ indique son amplitude.

On peut alors résumer :

la forme émergente possède une géométrie, donnée par un mode, et une intensité, donnée par une amplitude.

4.2 Pourquoi l'amplitude ne diverge pas

L'analyse linéaire prédit une croissance exponentielle lorsqu'un mode devient instable. Mais cette croissance ne peut pas se poursuivre indéfiniment. Dès que l'amplitude devient suffisamment grande, les non-linéarités modifient la dynamique.

Près du seuil, une forme réduite classique est :

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - gA^3.$$

Le terme μA représente l'amplification du mode lorsque la contrainte a franchi son seuil. Le terme $-gA^3$ représente la saturation non linéaire.

Les états stationnaires sont obtenus lorsque $dA/dt = 0$, soit :

$$A\left(\mu - gA^2\right) = 0.$$

On obtient :

$$A = 0,$$

ou, pour $\mu > 0$:

$$A = \pm\sqrt{\frac{\mu}{g}}.$$

La bifurcation traduit donc le passage d'une organisation unique à de nouvelles organisations possibles.

5. La forme visible comme projection de la distribution

La distribution f n'est pas directement la forme que nous observons. Pour faire apparaître des grandeurs physiques, on prend ses moments.

La densité est :

$$\rho(x,t) = \int f dv.$$

Le flux ou la quantité de mouvement moyenne est :

$$\rho u = \int v f dv.$$

Le tenseur de dispersion ou de pression est :

$$\Pi_{ij} = \int \left(v_i - u_i\right)\left(v_j - u_j\right) f dv.$$

Quand f se réorganise, ses moments se réorganisent. Une modification invisible dans l'espace des phases devient alors visible sous forme de densité, de champ de vitesse, de concentration ou de motif spatial.

On peut donc formuler un principe pédagogique essentiel :

la forme macroscopique peut être comprise comme la projection, par les moments, d'une réorganisation de la distribution dans l'espace des états.

6. Pourquoi Vlasov pure ne suffit pas à décrire une structure dissipative

L'équation de Vlasov pure est essentiellement conservative. Elle décrit le transport et les interactions de champ moyen, mais pas à elle seule l'irréversibilité d'un système ouvert.

Une structure dissipative, au sens thermodynamique, suppose au minimum un apport et une dissipation. Il faut donc enrichir l'équation :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + A[f, \lambda) \cdot \nabla_v f = C[f) + S.$$

Ici, $C[f)$ représente collisions, friction, relaxation ou diffusion, tandis que S représente une source ou un puits.

Cette écriture est plus proche d'une véritable dynamique hors équilibre :

$$transport + interaction + source - dissipation.$$

7. Deux façons pour l'extérieur d'agir : paramètre de contrôle et source

7.1 Modifier la force

La première voie consiste à modifier λ, donc le champ $A[f, \lambda)$. L'environnement agit alors sur la loi de mouvement elle-même.

Schématiquement :

$$\lambda \to A[f, \lambda) \to trajectoires \to f.$$

7.2 Injecter de la matière ou de l'énergie

La seconde voie consiste à introduire une source :

$$S[f, \lambda).$$

Elle peut représenter une injection de particules, un chauffage, un apport de réactif, un pompage énergétique, une création ou destruction locale.

Le mécanisme devient :

$$S \to f \to A[f) \to réorganisation.$$

7.3 Dans les systèmes réels, les deux voies sont souvent liées

Le chauffage de Bénard l'illustre parfaitement. L'apport de chaleur est une source énergétique. Cette source crée une différence de température. Cette différence devient un paramètre de contrôle, souvent condensé dans le nombre de Rayleigh. Le gradient modifie la force de flottabilité. Lorsque le seuil critique est franchi, l'état conducteur devient instable et une organisation convective apparaît.

La chaîne la plus réaliste est donc souvent :

$$source \to paramètre\ de\ contrôle \to champ\ dynamique \to instabilité \to forme.$$

Cette distinction évite une confusion fréquente : la source fournit ce qui traverse le système ; le paramètre de contrôle mesure l'état imposé par cette source ; le champ traduit cette contrainte en dynamique.

8. Le rôle spécifique de la dissipation

La dissipation ne signifie pas seulement destruction de l'ordre. Dans un système hors équilibre, elle contribue à sélectionner les régimes durables.

Une structure dissipative vit d'un bilan dynamique :

$$apport\ extérieur \rightarrow organisation\ interne \rightarrow dissipation.$$

Si l'apport cesse, la structure finit généralement par disparaître. Si la dissipation est trop forte, la structure ne peut pas émerger. Si le pompage domine sans saturation, le système peut s'emballer. Une forme stable apparaît lorsque le forçage, les interactions et la dissipation trouvent un régime compatible.

C'est pourquoi la dynamique de Vlasov doit être complétée, lorsqu'on veut parler de structures dissipatives, par des termes irréversibles.

9. Le pont stochastique : de l'EDS à Fokker–Planck

9.1 La trajectoire stochastique

Considérons maintenant un système individuel soumis à une dérive et à un bruit :

$$dX_t = F(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t.$$

Cette équation différentielle stochastique décrit une réalisation particulière. F représente la tendance déterministe ; σ mesure l'intensité du bruit ; W_t est un mouvement brownien.

Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on obtient une densité de probabilité $p(x, t)$.

9.2 L'équation de Fokker–Planck

En convention d'Itô, la densité satisfait :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[F(x,t)p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(x,t)p).$$

Cette équation est la traduction statistique de l'EDS. Le premier terme transporte la probabilité selon la dérive ; le second diffuse la probabilité sous l'effet des fluctuations.

Lorsque σ est constante et que l'on pose $D = \sigma^2/2$, on obtient :

$$\partial_t p = -\partial_x(Fp) + D\partial_x^2 p.$$

Cette formule contient déjà les deux mécanismes de base qui réapparaîtront plus tard : **transport** et **diffusion**.

10. De Fokker–Planck à McKean–Vlasov : lorsque la distribution agit en retour

La Fokker–Planck classique suppose que la dérive est donnée. Le pas décisif consiste à supposer que la dérive ressent la distribution de la population elle-même :

$$dX_t = F\left(X_t, \rho_t\right)dt + \sigma\left(X_t, \rho_t\right)dW_t,$$

où :

$$\rho_t = Law\left(X_t\right).$$

La densité satisfait alors une Fokker–Planck non linéaire :

$$\partial_t \rho = -\partial_x[F(x,\rho)\rho) + \frac{1}{2}\partial_x^2[\sigma^2(x,\rho)\rho).$$

Le mécanisme est maintenant auto-cohérent :

$$\rho \to F[\rho) \to trajectoires \to \rho.$$

C'est précisément l'esprit de McKean–Vlasov.

Cette étape révèle le chaînon qui manquait entre la théorie stochastique d'une trajectoire et la théorie cinétique d'une population : **Fokker–Planck devient Vlasov-like lorsque la dérive dépend de la loi elle-même**.

11. Vlasov–Fokker–Planck : la version cinétique dissipative

Si l'état comprend position et vitesse, on peut écrire :

$$dX_t = V_t dt,$$

$$dV_t = [A[f_t)\left(X_t, V_t\right) - \gamma V_t)dt + \sigma dW_t.$$

La densité dans l'espace des phases satisfait alors une équation de Vlasov–Fokker–Planck :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(A[f) - \gamma v)f) = D_v \Delta_v f.$$

On reconnaît quatre mécanismes :

- transport spatial ;
- interaction collective ;
- friction ou relaxation ;
- diffusion en vitesse due aux fluctuations.

Cette équation fournit une base particulièrement naturelle pour une description cinétique d'une structure dissipative, à laquelle on peut encore ajouter une source :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot [(A[f) - \gamma v)f) = D_v \Delta_v f + S[f).$$

12. Du cinétique au macroscopique : éliminer les vitesses rapides

12.1 La densité spatiale

La densité macroscopique est obtenue en intégrant sur les vitesses :

$$\rho(x,t) = \int f(x,v,t)dv.$$

En intégrant l'équation cinétique, on obtient une équation de conservation :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot J = R(\rho),$$

où :

$$J = \int v f dv$$

est le flux macroscopique, et $R(\rho)$ provient des termes de source ou de transformation après intégration.

12.2 La fermeture du flux

Si les vitesses relaxent beaucoup plus vite que la densité, on peut les considérer comme variables rapides. Dans une limite fortement dissipative ou suramortie, le flux peut être approché par :

$$J = -D\nabla\rho + \rho U[\rho].$$

Le premier terme est une diffusion de Fick ; le second est une dérive collective héritée du champ de Vlasov.

En substituant cette fermeture dans l'équation de conservation, on obtient :

$$\partial_t \rho = D\Delta\rho - \nabla \cdot (\rho U[\rho)) + R(\rho).$$

C'est une étape essentielle : **une équation cinétique dans l'espace position-vitesse devient une équation de densité dans l'espace physique**.

13. Le terme de Vlasov devient une interaction non locale

Supposons que le champ collectif dérive d'un potentiel d'interaction :

$$U[\rho] = -\chi\nabla(W * \rho),$$

où :

$$(W * \rho)(x) = \int W(x-y)\rho(y)dy.$$

L'équation macroscopique devient :

$$\partial_t \rho = D\Delta\rho + \chi\nabla \cdot [\rho\nabla(W * \rho)) + R(\rho).$$

Le premier terme homogénéise. Le second représente attraction, répulsion ou agrégation non locale. Le troisième décrit création, destruction ou transformation locale.

Cette équation constitue une forme générale de **diffusion–interaction–réaction**.

Elle révèle ce que Vlasov ajoute à une diffusion–réaction classique : la possibilité qu'un point soit influencé par l'état collectif du système, éventuellement à longue distance.

14. Comment apparaît la réaction ?

Le terme de réaction peut provenir de sources, de puits, de transformations ou d'interactions locales dans la description cinétique.

Par exemple, si une source cinétique possède une croissance et une saturation :

$$S[f) = \alpha f - \beta f^2,$$

alors, après intégration et fermeture, on peut obtenir approximativement :

$$R(\rho) = \alpha\rho - \beta_{eff}\rho^2.$$

C'est une réaction logistique.

On peut écrire :

$$R(\rho) = r\rho\left(1 - \frac{\rho}{K}\right).$$

Une équation de diffusion–réaction de type Fisher–KPP apparaît alors :

$$\partial_t\rho = D\Delta\rho + r\rho\left(1 - \frac{\rho}{K}\right).$$

Il faut cependant rester précis : toutes les réactions macroscopiques ne se déduisent pas automatiquement d'un simple terme quadratique en f. La forme exacte de R dépend de la structure du modèle cinétique et des hypothèses de fermeture.

15. Diffusion–réaction : une description condensée de la morphogenèse

Une équation de diffusion–réaction classique s'écrit symboliquement :

$$\partial_t u = D\Delta u + R(u).$$

Elle ne suit plus la distribution dans les vitesses. Elle ne conserve qu'un champ macroscopique $u(x,t)$: concentration, densité, température effective, variable d'ordre, etc.

La diffusion tend à lisser les différences. La réaction tend à créer, amplifier, détruire ou saturer certaines valeurs locales.

Lorsque plusieurs espèces ou plusieurs variables interagissent, on obtient par exemple :

$$\partial_t u = D_u\Delta u + R_u(u,v),$$

$$\partial_t v = D_v\Delta v + R_v(u,v).$$

C'est le cadre classique de Turing : la compétition entre réaction et diffusion peut déstabiliser un état homogène et produire un motif spatial.

Ainsi, la morphogenèse peut apparaître comme la manifestation macroscopique d'une instabilité qui, à un niveau plus profond, peut être reliée à la réorganisation d'une distribution cinétique.

16. Le lien avec les équations d'agrégation, Keller–Segel et Cahn–Hilliard

Le passage Vlasov–Fokker–Planck vers des équations macroscopiques n'est pas seulement une analogie. Dans des régimes appropriés, des limites suramorties conduisent effectivement à des équations de Smoluchowski ou d'agrégation–diffusion.

Une équation de Keller–Segel combine diffusion et attraction chimiotactique. Une équation de Cahn–Hilliard décrit la séparation de phases et la formation de domaines. Ces familles illustrent différentes manières dont diffusion, interaction et énergie libre peuvent sélectionner des motifs.

Le lien conceptuel peut être résumé ainsi :

$$champ\ moyen\ cinétique \rightarrow dérive\ collective\ macroscopique,$$

$$fluctuations\ et\ friction \rightarrow diffusion\ effective,$$

$$sources\ et\ transformations \rightarrow réaction.$$

17. Le point de vue énergétique

On peut aussi écrire certaines dynamiques macroscopiques comme des descentes d'énergie libre.

Considérons une fonctionnelle :

$$F[\rho] = \int [\frac{\kappa}{2}|\nabla\rho)^2 + V(\rho))dx + \frac{1}{2}\iint W(x-y)\rho(x)\rho(y)dxdy.$$

La dynamique dissipative peut prendre la forme :

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot [M(\rho)\nabla\frac{\delta F}{\delta\rho}) + R(\rho).$$

Le terme non local $W * \rho$ est l'héritage naturel d'une interaction de champ moyen. Le terme de gradient décrit la relaxation dissipative. Le terme de réaction représente les transformations qui ne sont pas contenues dans la simple redistribution conservatrice.

Ce point de vue relie trois langages :

- Vlasov pour l'interaction collective ;
- Fokker–Planck/Smoluchowski pour la relaxation et la diffusion ;
- diffusion–réaction pour la morphogenèse macroscopique.

18. Le rôle de l'équation d'amplitude et de Ginzburg–Landau

Près d'un seuil d'instabilité, il peut devenir inutile de conserver toute la distribution ou même tous les champs macroscopiques. Un petit nombre de modes critiques domine.

On introduit alors une amplitude spatiale $A(x,t)$. Une forme canonique est :

$$\partial_t A = \mu A + D\Delta A - g|A)^2 A.$$

Le premier terme mesure la distance au seuil. Le second couple les régions voisines. Le troisième sature la croissance.

Lorsque la structure possède également une phase ou une oscillation, A devient complexe et l'on obtient une équation de Ginzburg–Landau complexe :

$$\partial_t A = (\mu + i\omega)A + \left(D_R + iD_I\right)\Delta A - \left(g_R + ig_I\right)|A)^2 A.$$

La chaîne de réduction devient alors :

$$Vlasov\ généralisé \rightarrow moments\ /\ hydrodynamique \rightarrow diffusion\text{–}réaction\text{–}interaction \rightarrow mode\ critique \rightarrow Ginzburg\text{–}$$

Cette hiérarchie explique pourquoi des systèmes microscopiquement très différents peuvent partager les mêmes équations d'amplitude près d'une bifurcation.

19. La mémoire : ce qui revient lorsque l'on élimine des variables

Réduire une description signifie éliminer des degrés de liberté. Or ceux-ci ne disparaissent pas toujours sans laisser de trace.

Si les variables éliminées relaxent très vite, leur effet peut être approximé par des coefficients instantanés : friction, diffusion, viscosité.

Si leur relaxation est plus lente, elles laissent une mémoire. Une équation réduite peut alors contenir un noyau temporel :

$$\partial_t f + L[f] = \int_0^t K(t - s)C[f(s))ds.$$

Une équation d'amplitude avec mémoire peut prendre la forme :

$$\partial_t A = \mu A + D\Delta A - \int_0^t G(t - s)|A(s))^2 A(s)ds.$$

Le présent dépend alors du chemin suivi par le système.

Cette idée rejoint le formalisme de Mori–Zwanzig : lorsqu'on projette une dynamique complète sur quelques variables observées, les variables cachées réapparaissent sous la forme de **mémoire** et de **force fluctuante**.

20. La mémoire stochastique et la volatilité variable

Le même principe apparaît dans une EDS de la forme :

$$dX_t = -U'\left(X_t\right)dt + h_t dW_{1,t} + \sigma dW_{2,t}.$$

Si h_t est une fonction extérieure du temps, ce terme représente seulement un bruit d'intensité variable.
Il devient véritablement porteur de mémoire si h_t dépend de l'histoire du processus, par exemple :

$$h_t^2 = h_0^2 + \int_0^t K_h(t - s)G\left(X_s\right)ds.$$

Dans ce cas, le bruit brownien reste local, mais son amplitude porte l'empreinte du passé.

Cette remarque est importante méthodologiquement : **mémoire et bruit ne sont pas identiques**, même si une réduction de variables peut les faire apparaître simultanément.

21. La bifurcation vue par Fokker–Planck

La connexion entre trajectoire stochastique et morphogenèse peut être illustrée par un potentiel à deux puits.

Considérons :

$$dX_t = -U'(X_t, \lambda)dt + \sigma dW_t,$$

avec :

$$U(x, \lambda) = -\frac{\mu(\lambda)}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4.$$

Sans bruit, la dynamique est :

$$\dot{x} = \mu x - gx^3.$$

C'est exactement l'équation d'amplitude de la bifurcation.

Avec bruit, Fokker–Planck décrit non plus une seule trajectoire, mais la distribution des amplitudes possibles. La distribution stationnaire, lorsque les conditions de courant nul sont remplies et que la diffusion est constante, est proportionnelle à :

$$p_{st}(x) \propto exp[-\frac{U(x)}{D}).$$

Les minima du potentiel correspondent aux états les plus probables ; le bruit permet les transitions entre ces états.

Ainsi, le passage déterministe « une forme devient instable et deux formes apparaissent » devient, dans le langage probabiliste, « une distribution centrée se réorganise et développe plusieurs régions de probabilité élevée ».

22. Une hiérarchie des niveaux de description

Niveau	Variable principale	Équation typique	Question posée
Microscopique	trajectoires individuelles	équations de Newton / EDS	Que fait chaque constituant ?
Stochastique	X_t	EDS	Comment fluctue une trajectoire ?
Probabiliste	$p(x,t)$	Fokker–Planck	Comment se répartissent les états ?
Champ moyen	$\rho(x,t)$ dépendant d'elle-même	McKean–Vlasov	Comment la population agit-elle sur elle-même ?
Cinétique	$f(x,v,t)$	Vlasov–Fokker–Planck	Comment la distribution position–vitesse se réorganise-t-elle ?
Macroscopique	$\rho(x,t)$, $u(x,t)$	Smoluchowski / hydrodynamique	Quels champs observables émergent ?

Niveau	Variable principale	Équation typique	Question posée
Morphogénétique	$u, v, \ldots$	diffusion–réaction / agrégation	Comment un motif se forme-t-il ?
Près du seuil	$A(x,t)$	Ginzburg–Landau	Quel mode critique domine ?

Ce tableau montre que ces équations ne sont pas nécessairement concurrentes. Elles peuvent être les descriptions d'un même processus à différentes résolutions.

23. Tableau de correspondance des mécanismes

Mécanisme physique	Niveau cinétique	Niveau macroscopique	Effet sur la forme
Transport	$v \cdot \nabla_x f$	advection / flux	déplacement de la matière ou de l'information
Interaction collective	$A[f]$	dérive non locale, $W * \rho$	attraction, répulsion, alignement, agrégation
Fluctuations	diffusion en vitesse / bruit	diffusion effective	dispersion, exploration des états
Friction / relaxation	terme dissipatif	mobilité, viscosité, relaxation	élimination des mouvements rapides
Source extérieure	$S[f]$	S_{ext}	alimentation de la structure
Transformation locale	source/puits cinétique	$R(\rho)$	croissance, saturation, réaction
Mémoire	noyau temporel, variables cachées	convolution, coefficients historiques	hystérésis, persistance, retard
Instabilité	changement du spectre de L	perte de stabilité homogène	naissance d'un motif
Non-linéarité	couplage entre modes	saturation	stabilisation de la nouvelle forme

24. Le cas exemplaire de Bénard comme fil conducteur

La convection de Bénard permet de raconter toute la chaîne sans confusion.

Au départ, un fluide est chauffé par dessous. Le chauffage constitue une **source d'énergie**. Cette source crée un gradient de température. Le gradient devient une contrainte macroscopique, caractérisée notamment par le nombre de Rayleigh. Cette contrainte modifie la force de flottabilité exercée sur les éléments fluides.

À faible gradient, les fluctuations de vitesse sont amorties. L'état conducteur reste stable.

Lorsque le seuil critique est dépassé, certaines perturbations deviennent croissantes. Un mode convectif est sélectionné. Les non-linéarités empêchent son amplitude de diverger et conduisent à un régime fini : les rouleaux de convection.

Dans une lecture cinétique, on peut dire que la distribution des vitesses et des positions s'est réorganisée. Dans une lecture hydrodynamique, on dit que le champ de vitesse possède désormais une structure convective. Dans une lecture d'équation d'amplitude, on dit qu'un mode critique a acquis une amplitude non nulle.

Ces trois formulations ne se contredisent pas. Elles correspondent à trois résolutions différentes du même processus.

25. Ce qui est établi et ce qui relève du cadre unificateur

Il est essentiel de distinguer les niveaux de certitude.

Plusieurs passages sont solidement établis dans la littérature mathématique et physique :

- une EDS markovienne possède, sous les hypothèses usuelles, une équation de Fokker–Planck associée ;
- les processus de McKean–Vlasov conduisent à des Fokker–Planck non linéaires de champ moyen ;
- Vlasov–Fokker–Planck combine transport de champ moyen, friction et diffusion ;
- dans certains régimes suramortis, Vlasov–Fokker–Planck converge vers des équations de Smoluchowski ou d'agrégation–diffusion ;
- des équations d'agrégation–diffusion, Keller–Segel, Cahn–Hilliard et diffusion–réaction décrivent effectivement la formation de structures dans de nombreux contextes ;
- près d'une bifurcation, des réductions en équations d'amplitude de type Ginzburg–Landau sont classiques.

En revanche, la proposition selon laquelle **toute structure dissipative** devrait être pensée comme une bifurcation d'une distribution de type Vlasov est trop générale pour être considérée comme un résultat établi.

La formulation prudente mais féconde est la suivante :

> lorsqu'un système complexe peut être décrit par une population d'éléments interagissant à travers un champ collectif, un cadre de type Vlasov–Fokker–Planck peut fournir un niveau mésoscopique naturel. Dans des régimes appropriés, ce niveau peut se réduire à des équations macroscopiques de diffusion, d'agrégation et de réaction qui décrivent directement la morphogenèse.

26. La chaîne générale de transformation d'une structure dissipative

Nous pouvons maintenant reconstruire tout le processus en dix étapes.

1. Une structure existe déjà. Elle correspond à une distribution f_0 et à des champs macroscopiques associés.

2. Une source extérieure change. Elle injecte davantage ou moins d'énergie, de matière ou d'information.

3. Cette source modifie un paramètre de contrôle. Température, gradient, pression, champ, concentration ou autre grandeur macroscopique se déplace.

4. Le champ dynamique est modifié. La manière dont les constituants se déplacent change.

5. La distribution se déforme. Les trajectoires individuelles changent, donc la population se redistribue dans l'espace des états.

6. Un seuil de stabilité peut être franchi. Une perturbation qui était amortie devient amplifiée.

7. Un mode critique est sélectionné. La réorganisation n'est pas arbitraire : certaines formes sont dynamiquement privilégiées.

8. La non-linéarité sature la croissance. La structure trouve une amplitude finie.

9. La dissipation élimine ou amortit les mouvements incompatibles avec le régime entretenu. La forme devient stable ou métastable tant que le flux extérieur persiste.

10. La nouvelle distribution se projette en une nouvelle forme macroscopique. Les moments, champs ou variables d'ordre rendent l'organisation visible.

Cette séquence donne une lecture cinétique de la morphogenèse.

27. De la trajectoire à la forme : le pont central

Le résultat conceptuel le plus important peut être résumé par trois flèches.

La première :

$$trajectoire \rightarrow distribution.$$

Elle est incarnée par le passage EDS → Fokker–Planck.

La deuxième :

$$distribution \rightarrow champ\ collectif \rightarrow distribution.$$

Elle est incarnée par McKean–Vlasov et Vlasov.

La troisième :

$$distribution\ cinétique \rightarrow champs\ macroscopiques \rightarrow forme.$$

Elle est incarnée par les moments, les limites hydrodynamiques, les équations d'agrégation–diffusion et les équations de diffusion–réaction.

Ces trois flèches forment ensemble un pont continu entre microdynamique, statistique et morphogenèse.

28. Une équation générique de transition entre les niveaux

Comme écriture de synthèse au niveau macroscopique, on peut retenir :

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot [D(\rho)\nabla\rho + \rho\nabla(W * \rho)) + R(\rho) + S_{ext}.$$

Cette équation n'est pas « l'équation universelle » de toutes les structures dissipatives. Elle est un modèle de synthèse qui rassemble quatre mécanismes :

- $D(\rho)$: diffusion et dissipation effective ;
- $W * \rho$: interaction collective non locale héritée du champ moyen ;
- $R(\rho)$: transformation ou réaction interne ;

- S_{ext} : apport extérieur.

Elle constitue un pont très lisible entre la théorie cinétique et la morphogenèse.

29. Synthèse finale : une physique des processus en trois étages

Le développement permet de proposer une architecture générale.

Étage 1 — Les trajectoires

Chaque élément possède une dynamique. Elle peut être déterministe ou stochastique. L'EDS décrit le mouvement d'une réalisation individuelle.

Étage 2 — Les distributions

Fokker–Planck transforme l'ensemble des trajectoires stochastiques en une densité de probabilité. McKean–Vlasov ajoute l'auto-interaction de la distribution. Vlasov–Fokker–Planck enrichit cette dynamique par les vitesses, la friction et la diffusion.

Étage 3 — Les formes

Les moments de la distribution produisent les champs macroscopiques. Lorsque les variables rapides sont éliminées, apparaissent des équations de Smoluchowski, d'agrégation–diffusion ou de diffusion–réaction. Près du seuil, une équation d'amplitude peut condenser la dynamique de la forme en quelques variables.

La correspondance générale est donc :

$$trajectoires \rightarrow distributions \rightarrow formes$$

et, du point de vue du processus :

$$source\ /\ contrainte \rightarrow instabilité \rightarrow réorganisation \rightarrow émergence$$

Conclusion — Une proposition de lecture unifiée

Le rapprochement construit ici ne consiste pas à dire que Vlasov et diffusion–réaction sont deux écritures identiques. Ils n'opèrent pas au même niveau et n'ont pas le même domaine de validité.

L'idée plus profonde est qu'ils peuvent appartenir à **une même chaîne de réduction**.

Au niveau des trajectoires, un constituant suit une dynamique déterministe ou stochastique. Au niveau statistique, Fokker–Planck décrit la distribution des réalisations. Lorsque la trajectoire dépend de la population elle-même, on entre dans le domaine de McKean–Vlasov. En ajoutant position et vitesse, champ moyen, friction et diffusion, on obtient un cadre de Vlasov–Fokker–Planck adapté à des populations interactives hors équilibre. Lorsque les vitesses se relaxent rapidement, la description se réduit à une dynamique de densité : diffusion, agrégation, dérive et réaction apparaissent. Enfin, lorsque cette dynamique perd sa stabilité, un motif ou une variable d'ordre peut émerger et être décrit près du seuil par une équation d'amplitude.

La proposition centrale peut donc être formulée ainsi :

> **Une structure dissipative peut, dans une classe importante de systèmes, être comprise comme la manifestation macroscopique d'une réorganisation de la distribution des états sous l'effet d'une source ou d'une contrainte, d'interactions collectives, de fluctuations et de**

dissipation. Le cadre de Vlasov généralisé décrit cette réorganisation au niveau cinétique ; les équations de diffusion–réaction, d'agrégation ou de séparation de phases peuvent en constituer, dans certains régimes, des descriptions macroscopiques réduites.

Cette formulation permet de relier sans les confondre la mécanique des trajectoires, la physique statistique, la théorie cinétique, la thermodynamique hors équilibre, la théorie des bifurcations et la morphogenèse.

Le véritable pont n'est donc pas une équation unique. Il est une **architecture de niveaux et de transformations** :

$$microdynamique \rightarrow cinétique \rightarrow hydrodynamique\ /\ diffusion\text{–}réaction \rightarrow forme\ émergente$$

C'est cette architecture qui donne une cohérence générale au raisonnement et qui peut constituer un chapitre central d'une physique des processus.

Bibliographie détaillée et commentée

Cette bibliographie est organisée selon les étapes du raisonnement développé dans le texte. Elle ne prétend pas montrer qu'une unique « équation universelle de Vlasov des structures dissipatives » existe déjà dans la littérature. Elle rassemble plutôt les travaux qui établissent les différents maillons du pont : dynamique stochastique et Fokker–Planck, champ moyen de type McKean–Vlasov, Vlasov–Fokker–Planck, limites suramorties vers des équations de densité, morphogenèse par diffusion–réaction, bifurcations et équations d'amplitude, enfin mémoire issue de la réduction de variables.

> **Conseil de lecture :** pour comprendre rapidement le cœur du rapprochement, commencer par Chavanis (2006), Chavanis (2004), Choi & Tse (2022), Turing (1952), Cross & Hohenberg (1993), puis Mori (1965).

A. Fondements : de la trajectoire stochastique à Fokker–Planck et McKean–Vlasov

Risken, H. (1989). The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications, 2e éd., Springer.

Ouvrage de référence pour le passage d'une équation différentielle stochastique à l'équation de Fokker–Planck. Il expose les termes de dérive et de diffusion, les distributions stationnaires, les problèmes de franchissement de barrières et les régimes hors équilibre. Dans notre raisonnement, il justifie le premier changement de niveau : de la trajectoire aléatoire individuelle à l'évolution d'une densité de probabilité.

Gardiner, C. W. (2004). Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 3e éd., Springer.

Complément général sur les processus de Markov, les équations de Langevin et de Fokker–Planck, le bruit multiplicatif et les méthodes de réduction. Il est particulièrement utile pour comprendre dans quelles conditions une description probabiliste locale en temps est valide et ce qui change lorsque les coefficients dépendent de variables cachées ou de l'histoire.

McKean, H. P. Jr. (1966). "A Class of Markov Processes Associated with Nonlinear Parabolic Equations", Proceedings of the National Academy of Sciences, 56(6), 1907–1911. DOI : 10.1073/pnas.56.6.1907.

Texte fondateur pour les processus aujourd'hui qualifiés de McKean–Vlasov. L'idée essentielle est que la loi de la population peut intervenir dans la dynamique de chaque élément. C'est le maillon conceptuel qui transforme une Fokker–Planck classique en une Fokker–Planck non linéaire de champ moyen : la distribution n'est plus seulement un résultat, elle agit en retour sur les trajectoires.

B. Vlasov, interactions collectives et cinétique des systèmes à longue portée

Chavanis, P.-H. (2004). "Generalized Kinetic Equations and Effective Thermodynamics", Banach Center Publications, 66(1), 79–101.

Référence très proche de la perspective unificatrice du document. Chavanis introduit des équations cinétiques et de Fokker–Planck non locales associées à des interactions de longue portée et montre qu'elles peuvent décrire transitions de phase, agrégation et phénomènes d'effondrement dans des domaines très différents. Ce travail soutient l'idée qu'un même langage mésoscopique peut relier des systèmes auparavant étudiés séparément.

Chavanis, P.-H. (2004). "Hamiltonian and Brownian Systems with Long-Range Interactions", arXiv:cond-mat/0409641.

Ce texte compare explicitement le cas hamiltonien et le cas brownien. Dans la limite de grand nombre de particules, le premier conduit à Vlasov ; le second à une équation de Kramers non locale, puis, en forte friction, à une équation de Smoluchowski non locale. Il fournit donc une articulation directe entre réorganisation collective conservative, dissipation et réduction vers une dynamique macroscopique de densité.

Chavanis, P.-H. (2006). "Nonlinear Mean-Field Fokker–Planck Equations and Their Applications in Physics, Astrophysics and Biology", Comptes Rendus Physique, 7(3–4), 318–330. DOI : 10.1016/j.crhy.2006.01.004.

Probablement la référence de synthèse la plus proche de notre démarche. L'auteur montre qu'une classe générale d'équations de Fokker–Planck non linéaires en champ moyen relie systèmes auto-gravitants, turbulence bidimensionnelle, milieux poreux, chimiotaxie, modèle brownien de champ moyen et équations de Cahn–Hilliard. Elle documente directement le caractère transversal du triptyque interaction collective–diffusion–dissipation.

Chavanis, P.-H. (2007). "Hamiltonian and Brownian Systems with Long-Range Interactions: IV. General Kinetic Equations from the Quasilinear Theory", arXiv:0705.4579.

Cette étude part de l'équation de Klimontovich et développe une théorie cinétique qui tient explicitement compte des effets de mémoire. Elle montre aussi comment des termes de diffusion et de friction peuvent être reliés à des corrélations, de type Kubo. C'est une référence utile pour relier le cadre cinétique à la mémoire et aux descriptions non markoviennes évoquées dans le texte.

Chavanis, P.-H. (2008). "Hamiltonian and Brownian Systems with Long-Range Interactions: V. Stochastic Kinetic Equations and Theory of Fluctuations", arXiv:0803.0263.

Le travail étudie les fluctuations autour d'états de champ moyen et leur comportement au voisinage d'un point critique. Il illustre concrètement comment une phase homogène peut perdre sa stabilité au profit d'une phase inhomogène et comment l'amplitude des fluctuations augmente près du seuil. C'est un appui direct à notre lecture « contrainte → instabilité → nouvelle organisation ».

C. Passage cinétique → densité : Vlasov–Fokker–Planck, Smoluchowski et agrégation–diffusion

Huang, H. (2021). "Quantitative Estimate of the Overdamped Limit for the Vlasov–Fokker–Planck Systems", Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 4, 100186. DOI : 10.1016/j.padiff.2021.100186.

Ce travail établit quantitativement une limite suramortie de Vlasov–Fokker–Planck vers une équation d'agrégation–diffusion, à partir notamment des EDS de type McKean. Il justifie mathématiquement un passage central de notre chaîne : lorsque l'inertie ou la variable vitesse devient rapide, la description cinétique peut se réduire à une équation macroscopique de densité.

Choi, Y.-P. & Tse, O. (2022). "Quantified Overdamped Limit for Kinetic Vlasov–Fokker–Planck Equations with Singular Interaction Forces", Journal of Differential Equations, 330, 150–207. DOI : 10.1016/j.jde.2022.05.008.

Référence moderne et rigoureuse sur le même passage. Les auteurs donnent des bornes quantitatives entre la densité spatiale issue de Vlasov–Fokker–Planck et l'équation limite d'agrégation–diffusion/McKean–Vlasov, y compris pour des interactions gravitationnelles ou électrostatiques. Ce résultat consolide l'idée que la diffusion–agrégation peut être un niveau macroscopique réduit d'une dynamique cinétique plus riche.

Keller, E. F. & Segel, L. A. (1970). "Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability", Journal of Theoretical Biology, 26, 399–415. DOI : 10.1016/0022-5193(70)90092-5.

Texte fondateur sur l'agrégation chimiotactique comprise comme une instabilité. Il fournit un exemple emblématique où diffusion et attraction collective entrent en compétition et produisent une structure spatiale. Dans notre architecture, Keller–Segel illustre parfaitement le niveau macroscopique où l'interaction collective héritée du niveau cinétique devient un terme d'agrégation dans une équation de densité.

D. Diffusion–réaction, morphogenèse et formation de structures

Turing, A. M. (1952). "The Chemical Basis of Morphogenesis", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, 237(641), 37–72.

Texte fondateur de la morphogenèse par diffusion–réaction. Turing montre qu'un état homogène stable en l'absence de diffusion peut devenir instable lorsque des espèces couplées diffusent à des vitesses différentes. Cette référence établit le rôle de l'instabilité dans la sélection de motifs spatiaux et fournit le modèle canonique de la transformation « homogénéité → instabilité → forme ».

Cahn, J. W. & Hilliard, J. E. (1958). "Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy", The Journal of Chemical Physics, 28(2), 258–267.

Référence fondatrice pour la description des systèmes non uniformes par une énergie libre incluant un coût de gradient. Elle permet de comprendre comment une dynamique dissipative peut organiser des interfaces, des domaines et des séparations de phase. Dans notre texte, Cahn–Hilliard représente le pont entre champ moyen non local, énergie libre et morphogenèse macroscopique.

Cross, M. C. & Hohenberg, P. C. (1993). "Pattern Formation Outside of Equilibrium", Reviews of Modern Physics, 65, 851–1112. DOI : 10.1103/RevModPhys.65.851.

Grande synthèse sur la formation de structures hors équilibre. Les auteurs relient instabilités, bifurcations, modes critiques et équations d'amplitude dans la convection, les réactions chimiques, les fronts de solidification, l'optique non linéaire et d'autres systèmes. C'est la référence majeure pour comprendre pourquoi, près d'un seuil, des systèmes microscopiquement différents peuvent être décrits par les mêmes équations d'amplitude.

Cross, M. & Greenside, H. (2009). Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems, Cambridge University Press.

Ouvrage pédagogique et approfondi sur les mécanismes de formation de motifs dans les systèmes hors équilibre. Il développe les analyses de stabilité linéaire, les bifurcations, les équations d'amplitude et les structures spatio-temporelles. Il est particulièrement adapté pour prolonger la lecture du présent document au niveau de la morphogenèse macroscopique.

Kuramoto, Y. (1984; rééd. 2003). Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer / Dover.

Ouvrage classique reliant réactions chimiques, oscillations, ondes, turbulence et réductions de type Ginzburg–Landau. Il montre comment des équations d'amplitude complexes apparaissent à proximité d'instabilités oscillatoires. Il éclaire le passage de la cinétique détaillée à une variable d'ordre décrivant amplitude et phase de la structure émergente.

E. Structures dissipatives, bifurcations et auto-organisation

Nicolis, G. & Prigogine, I. (1977). Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations, Wiley.

Référence fondamentale pour la notion de structure dissipative. Elle développe l'idée qu'un système maintenu loin de l'équilibre par des flux peut subir des instabilités et sélectionner de nouvelles organisations. Dans notre raisonnement, elle fournit le cadre thermodynamique général dans lequel les sources, les flux, la dissipation et les fluctuations prennent leur sens.

Haken, H. (1983). Synergetics: An Introduction, 3e éd., Springer.

Haken développe le principe d'asservissement : près d'une instabilité, quelques variables lentes ou paramètres d'ordre peuvent gouverner une multitude de degrés de liberté rapides. Ce principe donne un fondement conceptuel au passage « distribution très riche → quelques modes critiques → équation d'amplitude ». Il complète ainsi le lien entre description cinétique et forme émergente.

F. Mémoire, variables éliminées et dynamique réduite

Mori, H. (1965). "Transport, Collective Motion, and Brownian Motion", Progress of Theoretical Physics, 33(3), 423–455. DOI : 10.1143/PTP.33.423.

Texte fondateur de la formulation par projection menant à une équation de Langevin généralisée. L'élimination de variables microscopiques produit simultanément un terme de mémoire et une force fluctuante. Il justifie le mécanisme évoqué dans le document : les degrés de liberté que l'on ne conserve plus ne disparaissent pas nécessairement ; ils réapparaissent comme mémoire et bruit.

Zwanzig, R. (2001). Nonequilibrium Statistical Mechanics, Oxford University Press.

Synthèse moderne de la mécanique statistique hors équilibre, des méthodes de projection et des équations à mémoire. L'ouvrage est une excellente entrée pour comprendre la relation entre réduction de dimension, dynamique non markovienne et fluctuations. Il permet de prolonger le pont cinétique–macroscopique lorsque la séparation des échelles de temps n'est pas suffisamment forte pour justifier une fermeture markovienne simple.

G. Comment lire cette bibliographie par rapport au modèle proposé ?

Les références ci-dessus ne décrivent pas toutes le même objet. Leur intérêt réside précisément dans leur complémentarité. McKean, Risken et Gardiner établissent le passage des trajectoires stochastiques aux distributions. Chavanis relie champ moyen, Vlasov, Kramers, Fokker–Planck, thermodynamique effective et interactions de longue portée. Huang et Choi–Tse montrent mathématiquement comment une dynamique Vlasov–Fokker–Planck peut se réduire à une dynamique d'agrégation–diffusion. Keller–Segel, Cahn–Hilliard et Turing montrent comment des équations macroscopiques de densité peuvent produire agrégation, séparation de phases et motifs. Cross–Hohenberg, Haken et Kuramoto décrivent ensuite la sélection de modes et les équations d'amplitude près des seuils. Mori et Zwanzig expliquent enfin pourquoi la réduction de variables peut laisser subsister mémoire et fluctuations.

> **La littérature établit donc solidement plusieurs maillons de la chaîne.** La proposition plus générale selon laquelle ces maillons peuvent être assemblés en une architecture commune de transformation des structures dissipatives — trajectoire → distribution → instabilité → réduction → forme — doit être présentée comme une synthèse conceptuelle et un programme de modélisation, et non comme un théorème universel déjà démontré pour toute structure dissipative.