Du modèle d'Ising financier à une dynamique de Vlasov multi-résolution

Construction du champ de prix, retournements probabilistes, autosimilarité, Monte-Carlo et formulation cinétique

Ce document reprend pas à pas une construction exploratoire : un réseau d'agents de type Ising, soumis à un champ social et à un champ de prix, produit des phases acheteuses et vendeuses. La maturité des régimes est contrôlée par une loi d'échelle reliant pente initiale et durée. La superposition de plusieurs valeurs de l'échelle C, pondérées et déphasées, engendre un signal multi-résolution dont l'autospectre présente une loi de puissance. La dernière partie montre comment cette architecture peut être reformulée comme une famille d'équations de McKean–Vlasov–Fokker–Planck, ou comme une seule équation cinétique enrichie par une coordonnée d'échelle.

Les valeurs numériques sont illustratives et ne constituent pas encore un calibrage du CAC 40.

Sommaire

1. 1. Le marché comme réseau d’orientations
2. 2. Construction du champ de prix et du mécanisme de retournement
3. 3. Première simulation probabiliste du réseau
4. 4. Pentes initiales aléatoires et durée des régimes
5. 5. Passage à la multi-résolution par le facteur d’échelle C
6. 6. Pondérations gaussiennes et déphasages aléatoires
7. 7. Monte-Carlo sur les pentes initiales
8. 8. Autospectre et signature autosimilaire
9. 9. Passage de l’Ising à Vlasov
10. 10. Interprétation, limites et programme de recherche
11. 11. Bibliographie commentée

1. Le marché comme réseau d'orientations

Le point de départ est une représentation volontairement minimale du marché. Les agents ne sont pas décrits par leur identité, leur portefeuille ou leur institution d'appartenance, mais par une orientation instantanée : acheter ou vendre. Ils sont insérés dans un réseau de relations par lequel circulent information, confiance, imitation et peur. Le prix n'est plus une donnée extérieure : il résulte de l'orientation agrégée du réseau, puis revient agir sur celui-ci. Le modèle forme donc une boucle auto-cohérente.

$$y_i(t) \in \{-1, +1\}, \quad -1 = vendeur, \quad +1 = acheteur$$

Chaque agent i reçoit un champ local composé de deux contributions : un champ social provenant de ses voisins et un champ global provenant du prix. Dans la version minimale, le réseau est une grille périodique et chaque agent est influencé par quatre voisins. Cette géométrie n'est pas essentielle ; elle pourrait être remplacée par un réseau social, professionnel ou informationnel hétérogène.

$$H_i(t) = J \cdot (1/k_i)\, \Sigma_j\, A_ij\, y_j(t) + H_prix(t) + \eta_i(t)$$

Le coefficient J mesure la force de l'imitation. A_ij indique si les agents i et j sont reliés. Le terme η_i représente les informations privées ou les fluctuations individuelles. La mise à jour des orientations suit une loi de Glauber : plus le champ total est positif, plus l'agent a de chances de devenir acheteur.

$$P[y_i(t + \Delta t) = +1 \mid H_i(t)] = 1 / (1 + exp(-2\gamma H_i(t)))$$

La grandeur macroscopique centrale est la magnétisation financière, c'est-à-dire le déséquilibre moyen entre acheteurs et vendeurs. Elle joue le rôle d'une variable d'ordre.

$$m(t) = (1/N)\, \Sigma_i\, y_i(t)$$

Lorsque m est proche de +1, le réseau est presque unanimement acheteur ; lorsqu'il est proche de −1, il est presque unanimement vendeur. L'excès de demande et le log-prix sont alors couplés à cette variable collective.

$$ED(t) = qN\, m(t)$$

$$X(t + 1) - X(t) = \lambda m(t) + \sigma\eta(t), \quad avec\, X = ln\, P$$

2. Construction du champ de prix et du mécanisme de retournement

Un Ising soumis uniquement au mimétisme tend à rester bloqué dans un état collectif. Il faut donc un mécanisme qui soutienne une tendance pendant un certain temps, puis la rende progressivement fragile. L'hypothèse centrale consiste à relier la pente initiale du régime, sa durée et une constante d'échelle C.

$$a_0\text{^}\alpha\, \tau\text{^}\beta = C$$

La pente initiale a_0 est estimée au début d'un nouvel épisode de hausse ou de baisse ; τ est l'âge du régime. Pour α et β positifs, une pente initiale élevée correspond à une durée critique plus courte. La quantité C règle l'échelle du phénomène.

$$\tau_c(a_0, C) = (C / a_0\text{^}\alpha)\text{^}(1/\beta)$$

On introduit une variable sans dimension de maturité. Elle vaut 1 au seuil statistique moyen et augmente au-delà.

$$R(t) = a_0\text{^}\alpha\, \tau(t)\text{^}\beta / C = [\tau(t)/\tau_c]\text{^}\beta$$

Le retournement ne doit pas être imposé à une date exacte. La relation d'échelle est interprétée comme une frontière de fragilité. Une fonction logistique transforme R en probabilité instantanée de retournement.

$$p_rev(t) \;=\; 1 \,/\, \{1 \;+\; exp[-\;\theta(R(t) \;-\; 1)]\}$$

Lorsque R est très inférieur à 1, la probabilité est faible. À R=1, elle vaut un demi. Au-delà, le régime devient de plus en plus vulnérable. Le champ moyen du prix peut alors être écrit comme la différence entre la probabilité de continuation et la probabilité de retournement.

$$H_prix(t) \;=\; H_max\;\varepsilon(t)[1 \;-\; 2p_rev(t)]$$

$$1 \;-\; 2p_rev(t) \;=\; \;-\; tanh\{(\theta/2)[R(t) \;-\; 1]\}$$

Le signe ε vaut +1 pendant une hausse et −1 pendant une baisse. Au début d'une hausse, le champ favorise les achats ; lorsqu'elle devient mature, il s'annule puis devient vendeur. Le même mécanisme produit un rebond après une baisse excessive. Pour éviter un basculement parfaitement régulier, on ajoute un bruit dont l'intensité est maximale près du seuil.

$$H_prix(t) \;=\; H_prix(t) \;+\; \sigma_H(R)\;\zeta(t)$$

$$\sigma_H(R) \;=\; \sigma_H, 0 \;+\; \sigma_H, pic \cdot 4p_rev(t)[1 \;-\; p_rev(t)]$$

Le facteur 4p(1−p) est nul lorsque p est proche de 0 ou de 1 et maximal à p=1/2. Il représente une zone de décision collective incertaine. Le retournement devient alors un phénomène de nucléation : quelques agents changent d'orientation, puis le réseau amplifie cette perturbation.

Élément	Hypothèse	Interprétation
Population	N agents binaires	Chaque agent est acheteur ou vendeur.
Réseau	Interactions locales A_ij	L'information et la confiance se propagent entre voisins.
Imitation	Coefficient J	Le consensus local favorise la persistance du régime.
Prix	X=ln P	Le rendement est proportionnel à la magnétisation.
Maturité	R=a₀^ατ^β/C	La pente initiale et la durée déterminent la fragilité.
Retournement	Probabilité logistique	Le seuil R=1 est statistique, non déterministe.
Bruit du champ	Maximum près de R=1	La décision collective devient instable à maturité.

Tableau 1 – Hypothèses constitutives du modèle d'Ising financier.

3. Première simulation probabiliste du réseau

La première simulation utilise 1 024 agents sur une grille 32×32 et 1 024 unités de temps. Les paramètres sont choisis pour produire des régimes métastables : le champ du prix initie la tendance, le réseau la prolonge, puis le retournement probabiliste la déstabilise.

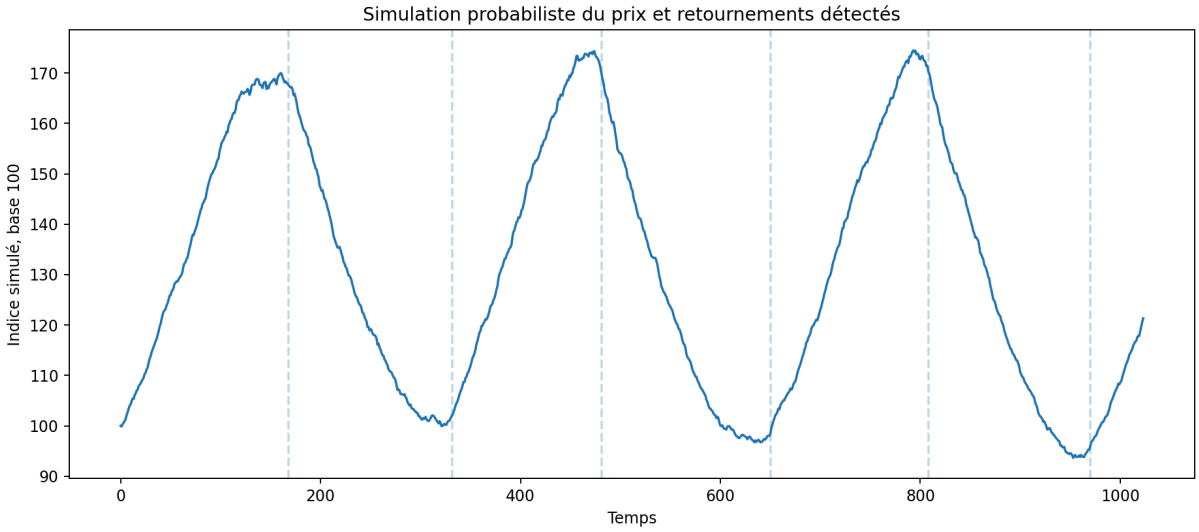


Figure 1 – Prix simulé avec champ de retournement probabiliste. Les lignes verticales indiquent les changements de régime détectés.

La courbe présente des phases de hausse et de baisse de durée comparable, mais non identique. Les retournements se produisent vers t = 168, 332, 481, 650, 808 et 970. Ils ne coïncident pas exactement avec R=1 : le consensus du réseau retarde parfois le basculement, tandis que le bruit peut parfois l'anticiper.

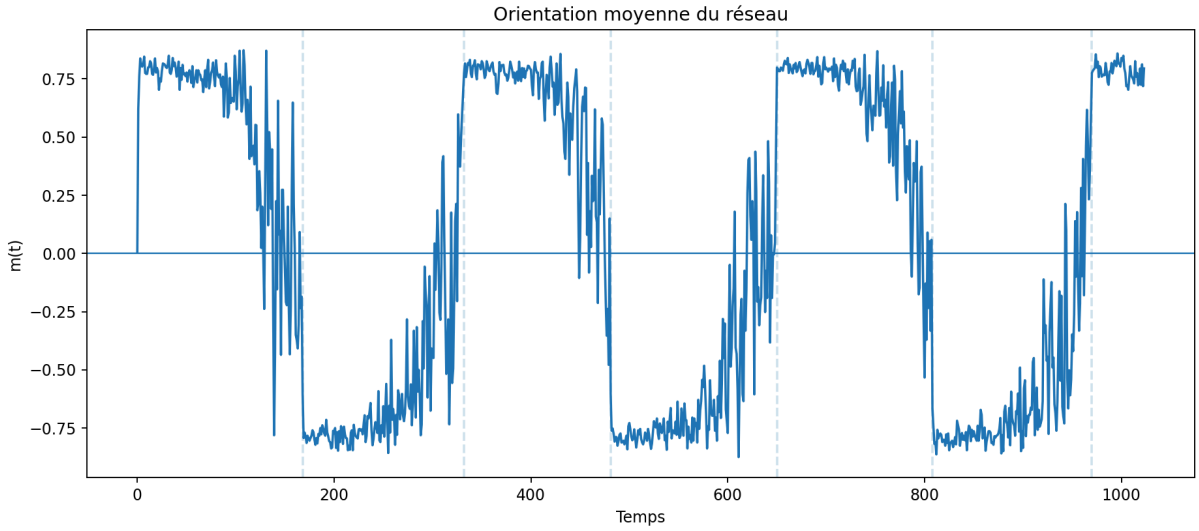


Figure 2 – Magnétisation financière. Les plateaux positifs correspondent à une majorité d'acheteurs, les plateaux négatifs à une majorité de vendeurs.

La magnétisation atteint souvent des valeurs proches de ±0,8. Avant chaque retournement, les fluctuations augmentent : le champ de prix moyen s'affaiblit, le bruit du champ croît et la cohérence du réseau diminue. Le passage d'un plateau à l'autre est brusque, ce qui traduit une transition collective plutôt qu'un glissement uniforme de tous les agents.

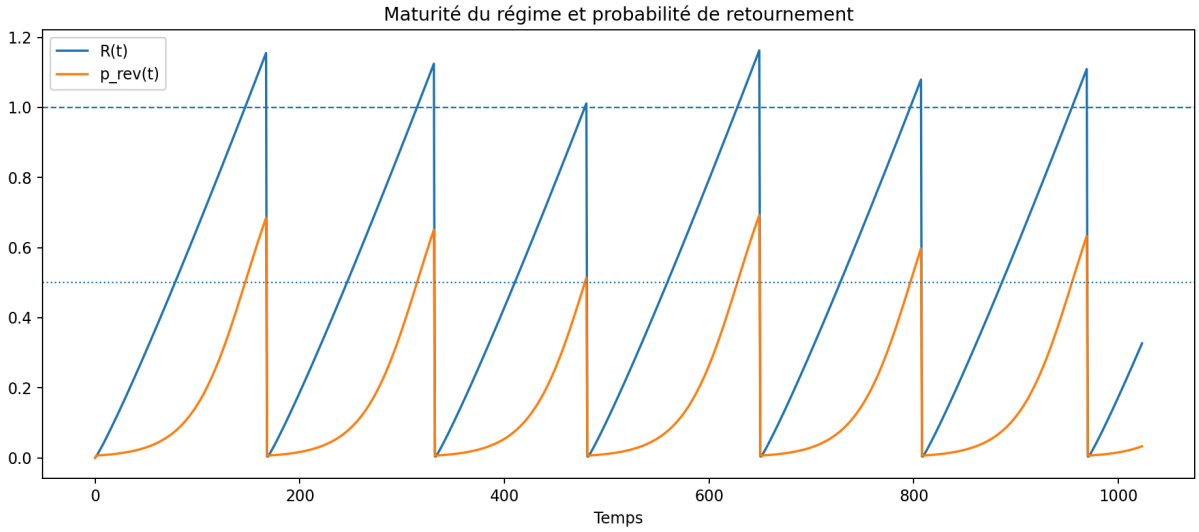


Figure 3 – Maturité R(t) et probabilité de retournement p_rev(t). À chaque changement de régime, la maturité est remise à zéro.

Indicateur	Valeur
Pas de temps	1024.0000
Nombre d'agents	1024.0000
Indice initial	100.0000
Indice final	121.3461
Indice minimum	93.6383
Indice maximum	174.4836
Volatilité des rendements	0.0046
Nombre de retournements détectés	6.0000
Magnétisation absolue moyenne	0.6382
Probabilité moyenne de retournement	0.1613

Tableau 2 – Résultats de la simulation probabiliste mono-échelle.

Ces valeurs n'ont pas vocation à reproduire directement un indice réel. Elles montrent seulement que la boucle Ising–prix–maturité suffit à engendrer des régimes, des retournements et une volatilité collective sans imposer de cycle déterministe.

4. Pentes initiales aléatoires et durée des régimes

Dans une série financière réelle, les épisodes ne commencent pas tous avec la même pente. La simulation suivante tire donc un nouveau a_0 au début de chaque régime. Une loi lognormale tronquée est retenue, car elle garantit $a_0>0$ tout en autorisant des épisodes exceptionnellement rapides.

$$a_0 \sim LogNormale(\mu_a, \sigma_a), \quad a_min \leq a_0 \leq a_max$$

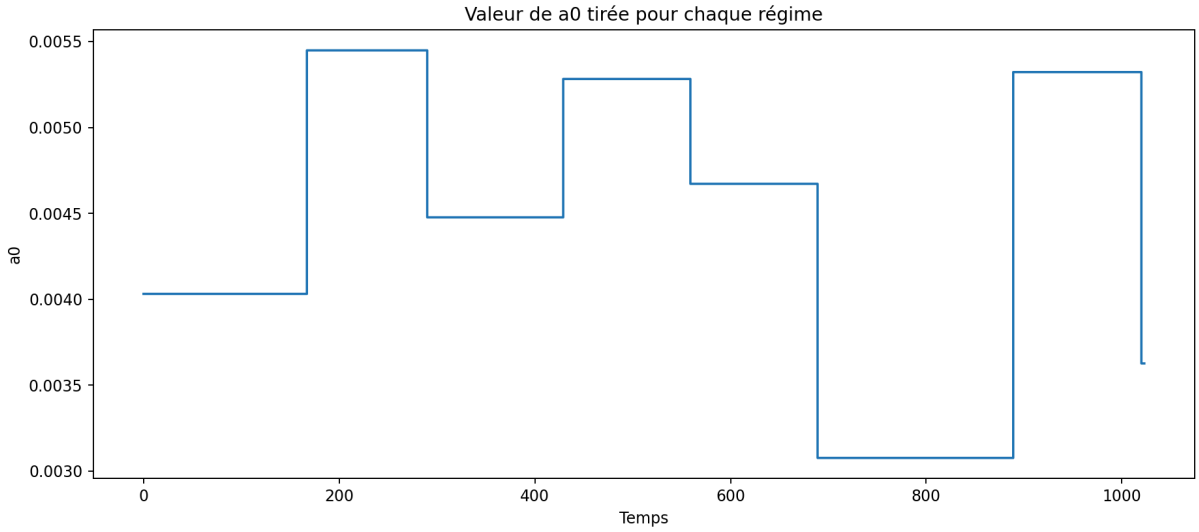


Figure 4 – Valeurs de a_0 tirées à chaque régime. Les changements de niveau produisent des durées critiques différentes.

Régime	Signe	a_0 tiré	Durée critique	Durée observée	Rapport observé/théorique
0.0000	1.0000	0.00403	145.4	167	1.15
1.0000	-1.0000	0.00545	110.6	123	1.11
2.0000	1.0000	0.00448	132.2	139	1.05
3.0000	-1.0000	0.00528	113.8	130	1.14
4.0000	1.0000	0.00467	127.2	130	1.02
5.0000	-1.0000	0.00308	185.9	200	1.08
6.0000	1.0000	0.00532	113.0	131	1.16

Tableau 3 – Effet des pentes initiales aléatoires sur la durée des régimes complets.

Le régime ayant $a_0 \approx 0{,}00308$ possède une durée critique proche de 186 unités et dure 200 unités. À l'inverse, un régime avec $a_0 \approx 0{,}00545$ possède une durée critique proche de 111 unités et dure 123 unités. La relation inverse entre pente et durée apparaît clairement, tout en laissant subsister une dispersion liée au réseau et au bruit.

5. Passage à la multi-résolution par le facteur d'échelle C

La constante C est maintenant interprétée comme un facteur d'échelle. On construit une famille dyadique de modèles :

$$C_n \;=\; C_0 \,/\, 2\text{^}n, \quad n \;=\; 0, \ldots, N \;-\; 1$$

À pente comparable, la durée critique varie selon :

$$\tau_c, n \;=\; \tau_c, 0 \cdot 2\text{^}(-\; n/\beta)$$

Chaque valeur de C produit une courbe de prix avec la même architecture dynamique – croissance, maturité, retournement – mais avec un temps caractéristique différent. Les simulations ont été réalisées avec les mêmes chocs aléatoires pour isoler l'effet de C.

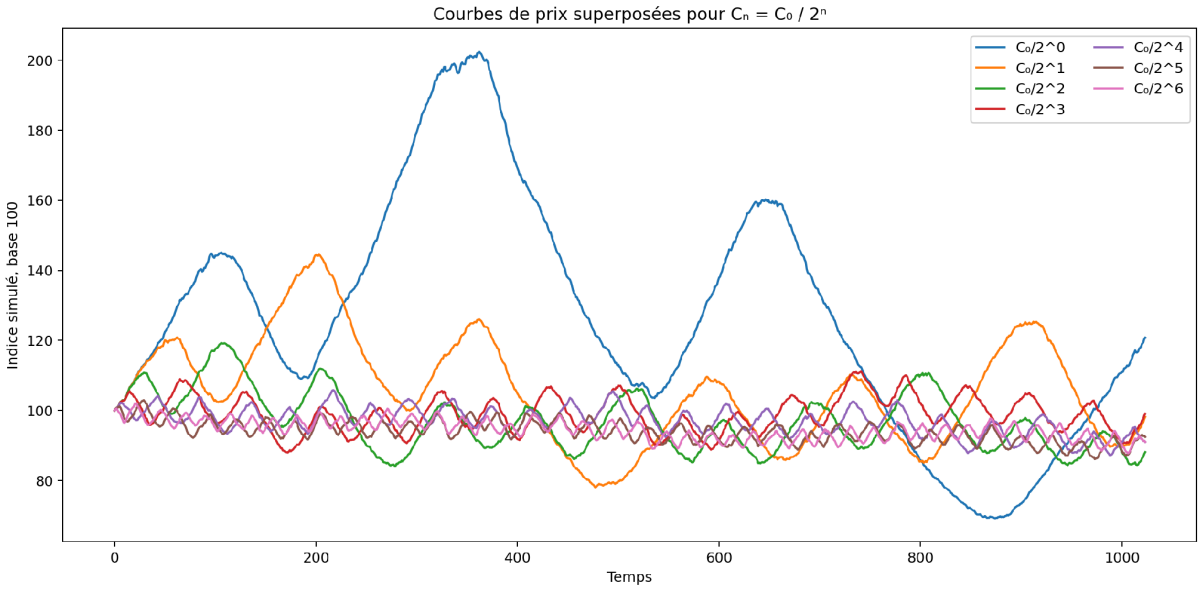


Figure 5a – Courbes de prix superposées pour C□=C₀/2ⁿ. Les grandes échelles portent les mouvements lents ; les petites échelles oscillent rapidement.

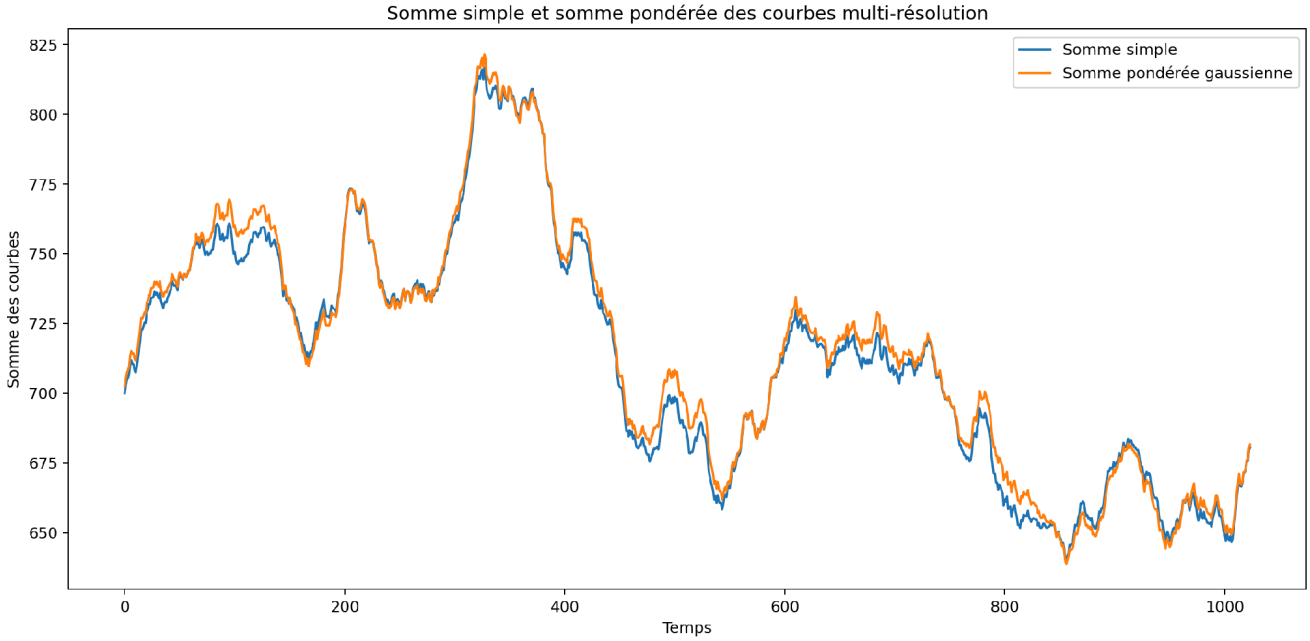


Figure 5b – Log-prix superposés sans déphasage pour les sept valeurs de C. La représentation logarithmique permet de comparer directement les amplitudes relatives et fait apparaître l'accélération des oscillations lorsque C diminue.

Cette seconde représentation temporelle complète la courbe des prix normalisés. La grande échelle C_0 porte les mouvements de fond, tandis que les composantes $C_0/2^n$ ajoutent des oscillations de plus en plus rapides. Avant tout déphasage, certaines phases restent alignées parce que les réalisations partagent les mêmes innovations aléatoires ; cette synchronisation volontaire sert de situation de référence pour mesurer ensuite l'effet propre des retards aléatoires.

n	C/C₀	Retournements	Durée moyenne	Volatilité
0.0000	1.00000	6.0000	146.3	0.00467
1.0000	0.50000	12.0000	78.8	0.00460
2.0000	0.25000	21.0000	46.5	0.00458
3.0000	0.12500	34.0000	29.3	0.00476

n	C/C₀	Retournements	Durée moyenne	Volatilité
4.0000	0.06250	49.0000	20.5	0.00474
5.0000	0.03125	68.0000	14.8	0.00490
6.0000	0.01562	86.0000	11.8	0.00508

Tableau 4 – Modification de la fréquence des retournements lorsque C est divisé successivement par deux.

Le nombre de retournements passe de 6 à 86 tandis que la durée moyenne des régimes tombe de 146 à environ 12 unités. Le paramètre C sélectionne donc bien une résolution temporelle. La somme des courbes peut être vue comme un signal composé de structures emboîtées.

$$X_multi(t) \;=\; \Sigma_n\, X_n(t)$$

6. Pondérations gaussiennes et déphasages aléatoires

Une simple somme synchronisée produit des renforcements artificiels. Deux enrichissements sont introduits. Premièrement, chaque échelle reçoit un poids gaussien centré autour de 1 :

$$w_n \;=\; 1 \;+\; \sigma_w\, Z_n, \quad Z_n \;\sim\; N(0,1)$$

Deuxièmement, chaque courbe est déphasée d'un retard aléatoire δ□. Pour éviter les effets de bord, les trajectoires sont d'abord simulées sur 2 048 unités, puis une fenêtre commune de 1 024 unités est extraite.

$$X_obs, n(t) \;=\; w_n\, X_n(t \;+\; \delta_n)$$

$$X_multi(t) \;=\; \Sigma_n\, w_n\, X_n(t \;+\; \delta_n)$$

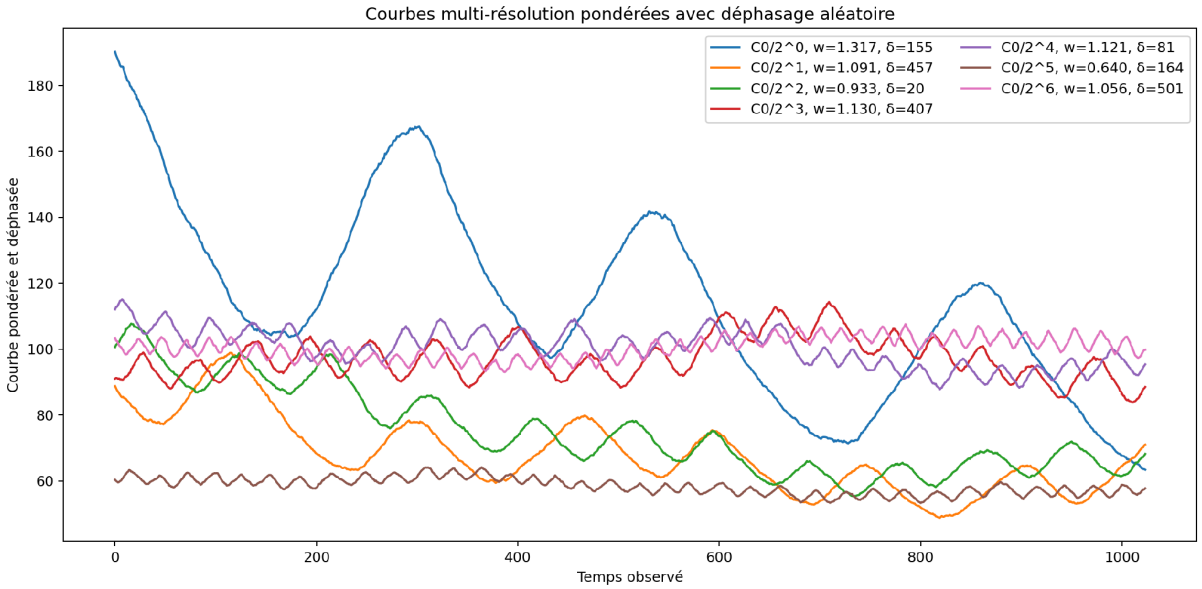


Figure 6 – Courbes multi-résolution pondérées et déphasées. Les phases des différentes échelles ne coïncident plus.

Le déphasage détruit l'alignement artificiel des maxima et des minima. Une grande échelle peut être en baisse pendant qu'une échelle plus rapide est en hausse. La somme devient alors le résultat d'interférences constructives et destructives entre horizons de décision.

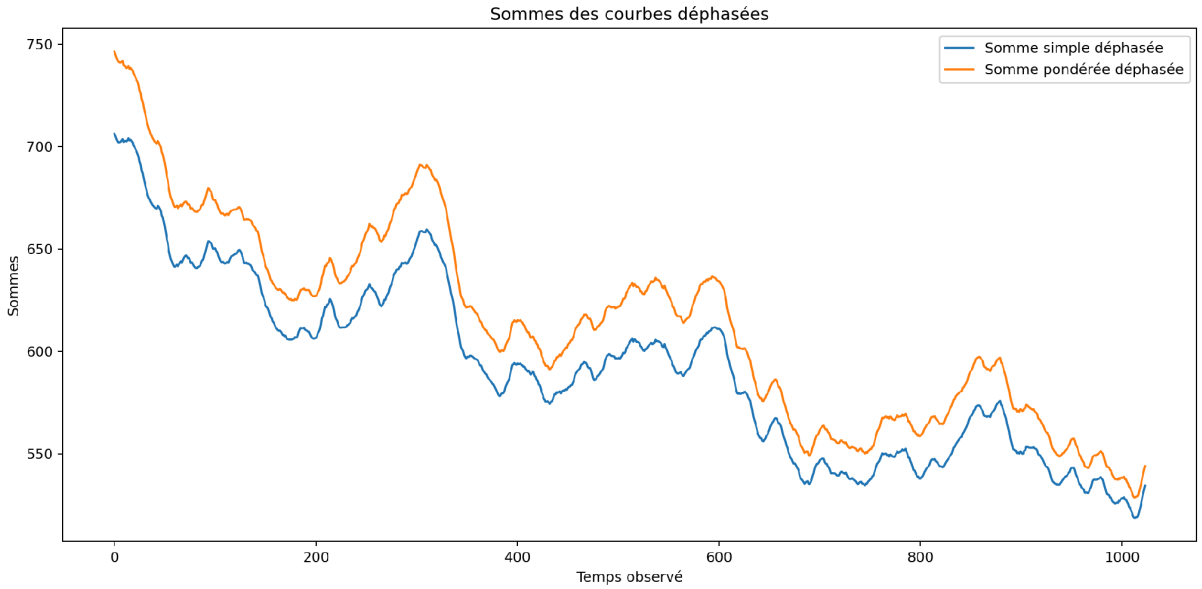


Figure 7 – Somme simple déphasée et somme pondérée déphasée. Les poids modifient l'importance relative des échelles sans supprimer l'organisation globale.

7. Monte-Carlo sur les pentes initiales

L'incertitude sur a_0 se propage aux durées critiques, aux dates de retournement et finalement à la somme multi-résolution. Un Monte-Carlo de 200 réalisations a donc été effectué. Les valeurs de C, les poids et les déphasages sont conservés ; les pentes a_0 sont retirées à chaque régime. Pour rendre le calcul possible, le réseau spatial est remplacé par une approximation de champ moyen à 1 024 agents.

$$H_soc, n(t) \approx J_n \, m_n(t)$$

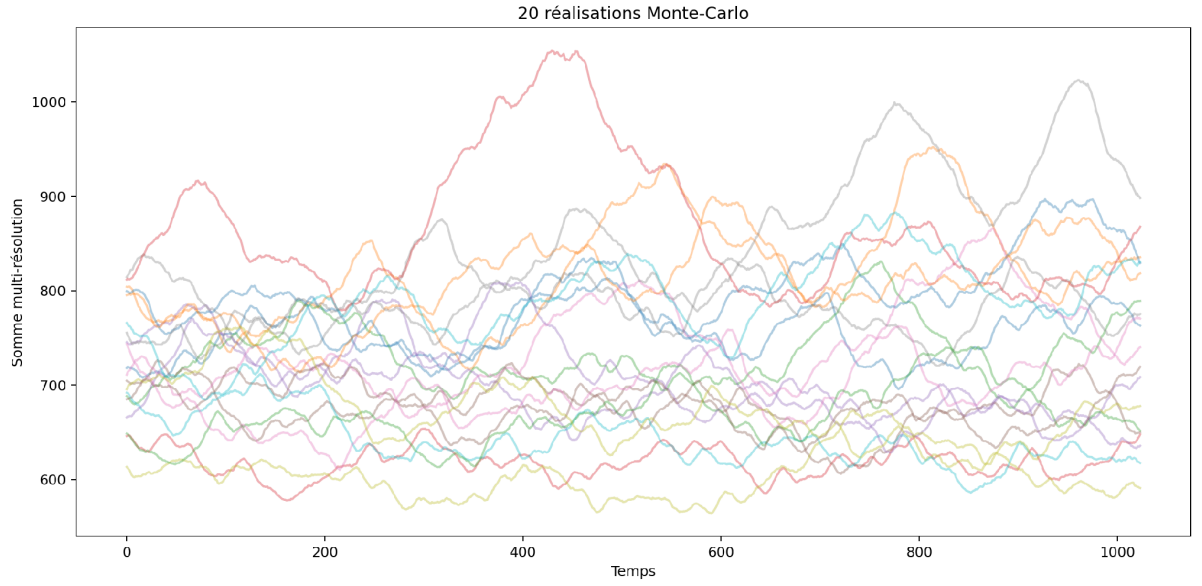


Figure 8a – Vingt trajectoires temporelles tirées parmi les 200 réalisations Monte-Carlo. Les paramètres d'échelle, les poids et les déphasages sont conservés, tandis que les pentes initiales a_0 sont retirées à chaque régime.

Ces trajectoires montrent ce que l'enveloppe quantile résume ensuite. Les écarts restent d'abord modérés, puis les dates de retournement se désynchronisent. Une faible différence de pente initiale modifie la durée critique, décale le changement de régime à chaque échelle et produit, par accumulation, une dispersion importante de la somme multi-résolution.

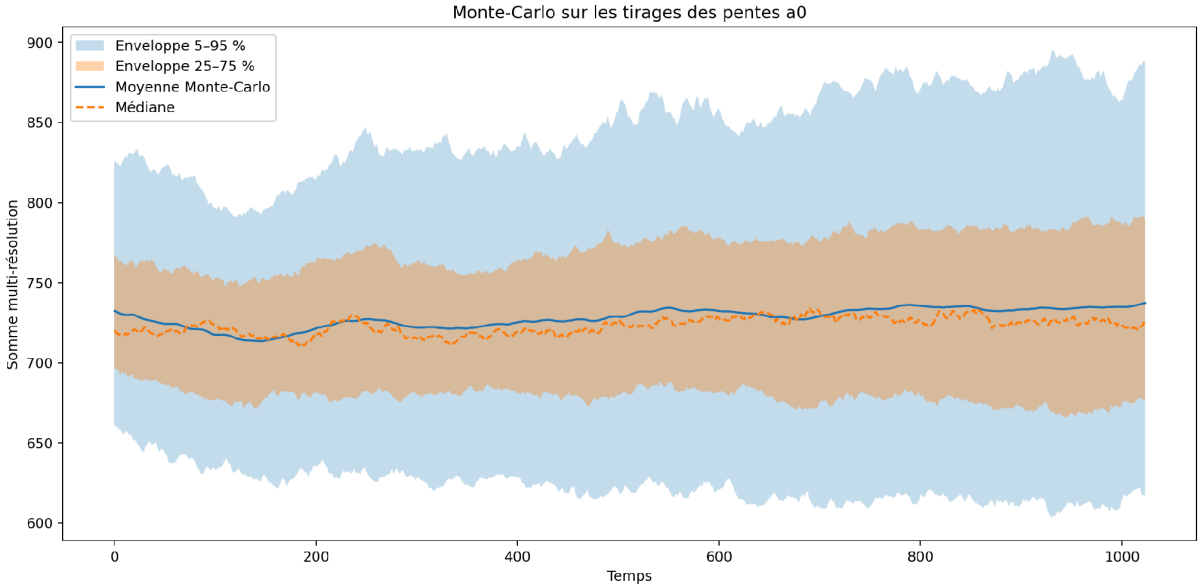


Figure 8b – Moyenne, médiane et enveloppes quantiles de la somme multi-résolution sur 200 réalisations Monte-Carlo.

La moyenne reste relativement régulière, mais l'enveloppe 5–95 % s'élargit avec le temps. Les petites différences de pente initiale modifient les phases des composantes et se transforment en une dispersion importante du signal agrégé. Il s'agit d'une sensibilité de phase plutôt que d'une simple amplification locale du bruit.

Indicateur	Valeur
Nombre de réalisations Monte-Carlo	200.0000
Nombre d'échelles	7.0000
Horizon observé	1024.0000
a0 moyen sur les réalisations	0.0051
Écart-type de a0 moyen	0.0001
Nombre moyen de retournements cumulés	419.6500
Écart-type du nombre de retournements	3.9210
Valeur finale moyenne de la somme	737.3030
Écart-type de la valeur finale	87.2664
Quantile 5 % de la valeur finale	617.2006
Médiane de la valeur finale	726.4909
Quantile 95 % de la valeur finale	887.1588

Tableau 5 – Résultats globaux du Monte-Carlo sur les pentes initiales.

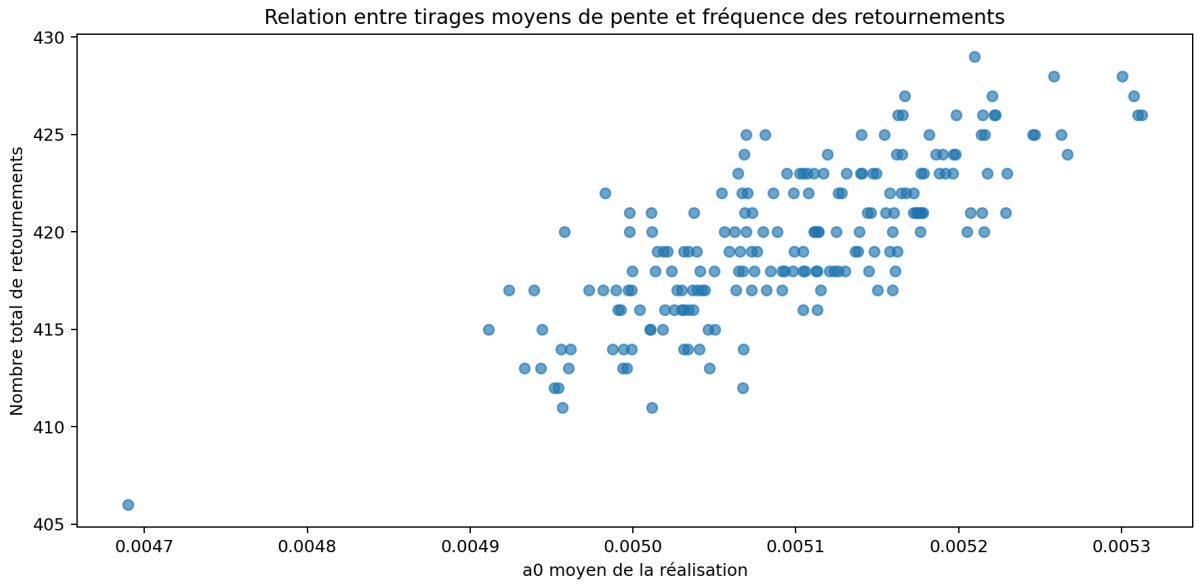


Figure 9 – Relation entre la pente initiale moyenne et le nombre cumulé de retournements. Une pente plus élevée raccourcit les régimes.

8. Autospectre et signature autosimilaire

La présence de structures similaires à différentes échelles doit laisser une trace dans le domaine fréquentiel. L'autospectre est calculé par transformée de Fourier rapide après retrait de la moyenne. Pour une série x□ de longueur N :

$$X_k \;=\; \Sigma_(t\;=\;0)\^(N\;-\;1)\;[x_t\;-\;\bar{x}]\;exp(-\;2\pi ikt/N)$$

$$S(f_k) \;=\; (\Delta t/N)|X_k|^2$$

Le spectre est tracé en coordonnées logarithmiques. Une relation approximativement linéaire correspond à une loi de puissance :

$$S(f) \;\propto\; f\^(-\;\beta_s)$$

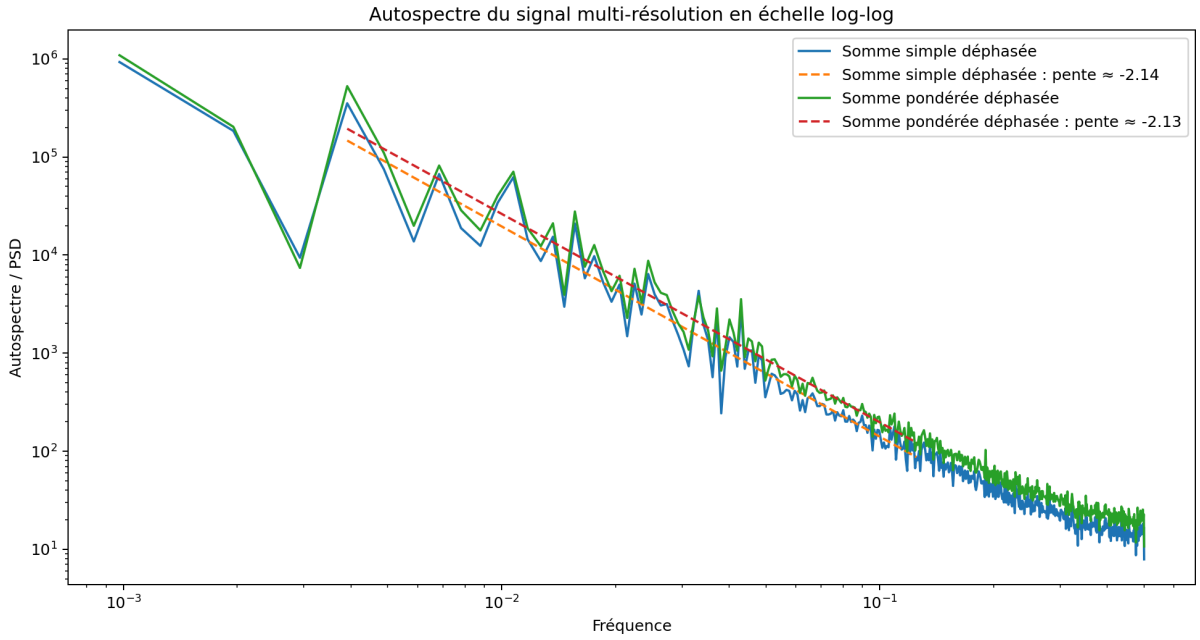


Figure 10 – Autospectre log–log de la somme simple et de la somme pondérée déphasées.

Signal	f min	f max	β spectral estimé
Somme simple déphasée	0.003906	0.125	2.144
Somme pondérée déphasée	0.003906	0.125	2.125

Tableau 6 – Pentes spectrales ajustées sur la bande [1/256, 1/8].

Les deux estimations sont proches de 2,13. Le signal possède donc un spectre rouge, dominé par les basses fréquences, compatible avec une dynamique intégrée et corrélée. Cette pente n'est pas une constante universelle : elle dépend de la bande d'ajustement, du nombre d'échelles, des poids et des déphasages. Néanmoins, sa stabilité face à la pondération suggère que la loi de puissance provient surtout de l'architecture multi-échelle.

9. Passage de l'Ising à une dynamique de Vlasov

Le modèle d'Ising est microscopique : il suit des orientations individuelles discrètes. Pour obtenir une description mésoscopique, on remplace la population d'agents par une densité continue d'orientations. À chaque échelle C□, on introduit une variable y∈[−1,1] et une densité f□(y,t).

$$\int_(-\ 1)\text{^}1\ f_n(y,t)dy\ =\ 1$$

$$m_n(t)\ =\ \int_(-\ 1)\text{^}1\ y\ f_n(y,t)dy$$

Le champ social devient un champ moyen J□m□. Le champ du prix conserve la même loi de maturité. Une dynamique individuelle continue compatible est :

$$dy_t\ =\ A_n(y_t, f_n, X_n, t)dt\ +\ \sqrt{}(2D_n)dW_t$$

$$A_n\ =\ (1\ -\ y^2)[J_n\, m_n\ +\ H_prix, n\ -\ \gamma_n\, y]$$

La densité satisfait alors une équation de McKean–Vlasov–Fokker–Planck :

$$\partial_t\, f_n\ =\ \ -\ \partial_y[A_n[f_n, X_n]\, f_n]\ +\ \partial_y^2[D_n\, f_n]$$

L'équation est non linéaire, car la dérive dépend du moment m□ de la densité elle-même. L'excès de demande et la composante de prix de l'échelle n sont :

$$ED_n(t) \;=\; q_n\, N_n\, m_n(t)$$

$$dX_n(t) \;=\; \lambda_n\, q_n\, N_n\, m_n(t)dt \;+\; \sigma_n\, dB_n(t)$$

La construction numérique précédente correspond alors à N systèmes cinétiques, un par échelle, dont les sorties sont pondérées et déphasées.

$$X(t) \;=\; \Sigma_(n \;=\; 0)\^(N \;-\; 1)\, w_n\, X_n(t \;-\; \delta_n)$$

$$ED(t) \;=\; \Sigma_(n \;=\; 0)\^(N \;-\; 1)\, w_n\, ED_n(t \;-\; \delta_n)$$

Niveau	Variable	Ce qu'elle représente	Équation
Ising microscopique	$y_i=\pm1$	Orientation individuelle	Mise à jour de Glauber
Champ moyen	m□	Consensus d'une échelle	ODE/EDS réduite
Vlasov–FP par échelle	f□(y,t)	Distribution des orientations	EDP non linéaire
Vlasov multi-échelle	f(c,y,t)	Distribution en orientation et échelle	EDP sur espace enrichi
Prix observé	X(t)	Moment agrégé et déphasé	Somme des sorties cinétiques

Tableau 7 – Passage des spins individuels à la description cinétique multi-échelle.

9.1 Une seule équation avec une coordonnée d'échelle

Plutôt que de juxtaposer N équations, on peut considérer C comme une coordonnée interne. La densité f(c,y,t) décrit simultanément l'orientation y et l'échelle c. La magnétisation locale est $m(c,t)=\int yf(c,y,t)dy$. Les différentes échelles peuvent interagir par un noyau K(c,c′).

$$H_soc(c,t) \;=\; \int K(c,c')m(c',t)dc'$$

$$\partial_t\, f(c,y,t) \;=\; \;-\; \partial_y\{(1 \;-\; y^2)[H_soc(c,t) \;+\; H_prix(c,t) \;-\; \gamma(c)y]f\} \;+\; \partial_y^2[D(c)f]$$

$$X(t) \;=\; \iint \Lambda(c)y\, f(c,y,t \;-\; \delta(c))\, dy\, dc$$

Cette formulation donne un sens théorique fort à la multi-résolution : l'échelle n'est plus un paramètre extérieur choisi après coup, mais une dimension de l'état mésoscopique du marché. Le prix observable est un moment de cette densité étendue.

9.2 Couplage et cascade entre échelles

Dans les simulations présentées, les échelles sont indépendantes avant d'être sommées. Un modèle plus réaliste permettrait aux horizons de décision de s'influencer. Pour une famille dyadique, les interactions peuvent être principalement locales dans l'espace des échelles : une échelle reçoit l'influence des échelles immédiatement plus lentes et plus rapides.

$$H_soc,n \;=\; J_n\, m_n \;+\; \kappa_(n,n \;-\; 1)m_(n \;-\; 1) \;+\; \kappa_(n,n \;+\; 1)m_(n \;+\; 1)$$

Un retournement rapide pourrait alors se propager vers les grandes échelles, tandis qu'une tendance longue pourrait polariser les petites. Cette cascade est l'analogue, dans l'espace des horizons financiers, d'un transfert entre modes dans un fluide turbulent.

10. Interprétation, limites et programme de recherche

La construction proposée relie trois niveaux. Au niveau microscopique, les agents sont des spins soumis à l'imitation et au champ du prix. Au niveau mésoscopique, les orientations deviennent une distribution f. Au

niveau macroscopique, le prix est produit par le moment moyen de cette distribution, puis par la superposition de plusieurs échelles.

$$agents \rightarrow magnétisations\ m_n \rightarrow distributions\ f_n \rightarrow excès\ de\ demande\ ED_n \rightarrow prix\ X$$

La loi a₀^ατ^β=C joue un double rôle. À une échelle donnée, elle définit la maturité statistique d'un régime. Entre les échelles, elle organise une hiérarchie de temps caractéristiques. Les poids gaussiens représentent l'importance variable de chaque horizon, et les déphasages représentent leurs retards ou leurs phases propres. L'autospectre en loi de puissance apparaît alors comme la trace fréquentielle de cette architecture emboîtée.

Limite	État actuel	Prolongement
Calibrage	Les paramètres sont illustratifs.	Estimer α, β, C_0, J, θ et les bruits sur des données CAC 40.
Détection des régimes	Le changement de signe repose sur une pente filtrée.	Comparer plusieurs méthodes de segmentation et de détection de ruptures.
Réseau	La grille régulière est simplificatrice.	Tester réseaux small-world, sans échelle et graphes empiriques.
Agents	Le spin achat/vente est minimal.	Ajouter type fondamentaliste–chartiste, conviction, capital et liquidité.
Échelles	Les composantes sont d'abord indépendantes.	Estimer un noyau de couplage K(c,c').
Validation	La loi spectrale seule ne prouve pas l'autosimilarité.	Compléter par ondelettes, Hurst, multifractalité et validation hors échantillon.

Tableau 8 – Limites du modèle et étapes nécessaires pour une validation empirique.

Le résultat le plus important n'est pas une prévision ponctuelle du marché. Il est la construction d'un pont cohérent entre réseau, dynamique collective, échelles temporelles et description cinétique. Le modèle offre un laboratoire où l'on peut étudier comment une information locale devient un consensus, comment ce consensus mûrit et se retourne, puis comment des structures semblables se superposent à plusieurs horizons pour former un signal global complexe.

La formulation de Vlasov donne enfin à cette intuition un statut mésoscopique : elle ne prétend pas retrouver chaque investisseur, mais décrit une distribution d'états collectifs compatible avec la dynamique observée du prix. L'étape décisive sera désormais l'identification sur données réelles : vérifier si les pentes, durées, déphasages et poids estimés sur le CAC 40 conduisent à des paramètres stables et à des prédictions hors échantillon.

11. Bibliographie commentée

Les références suivantes ne constituent pas seulement un arrière-plan général. Chacune éclaire une brique précise de la construction : imitation sur réseau, agents hétérogènes, percolation des opinions, passage à une densité cinétique, mémoire endogène et criticité. La loi de maturité $a_0^{\alpha\tau^{\beta}=C}$ et son usage comme coordonnée d’échelle restent, dans la forme proposée ici, une hypothèse de modélisation à confronter aux données.

Kirman, A. (1993). « Ants, Rationality, and Recruitment ». The Quarterly Journal of Economics, 108(1), 137–156.

> Référence fondatrice pour les processus de recrutement et d’imitation. Elle montre comment une population peut alterner entre états collectifs sous l’effet de transitions spontanées et d’un renforcement social. Dans le présent modèle, elle justifie l’idée que les orientations acheteuses et vendeuses se propagent comme une contagion plutôt que comme une suite de décisions indépendantes.

Brock, W. A. et Hommes, C. H. (1998). « Heterogeneous Beliefs and Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model ». Journal of Economic Dynamics and Control, 22, 1235–1274.

> Ce travail formalise la sélection évolutive entre règles de prévision hétérogènes. Il fournit le cadre économique permettant de relier performance passée, attractivité des stratégies et changement de population. Il éclaire le passage entre la distribution des orientations et le champ de prix utilisé dans notre construction.

Lux, T. et Marchesi, M. (1999). « Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market ». Nature, 397, 498–500.

> Article central pour l’idée que les lois d’échelle financières peuvent émerger des interactions entre agents, même lorsque les nouvelles externes ne possèdent pas elles-mêmes de structure en loi de puissance. Il constitue l’une des références les plus directes pour l’objectif d’autosimilarité poursuivi par la famille $C_{\square}=C_0/2^n$.

Lux, T. et Marchesi, M. (2000). « Volatility Clustering in Financial Markets: A Microsimulation of Interacting Agents ». International Journal of Theoretical and Applied Finance, 3(4), 675–702.

> Les auteurs y montrent comment les changements entre fondamentalistes et chartistes produisent un regroupement endogène de la volatilité. Cette référence donne un contenu économique aux états collectifs que le modèle d’Ising représente de façon plus abstraite par des spins.

Cont, R. et Bouchaud, J.-P. (2000). « Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets ». Macroeconomic Dynamics, 4(2), 170–196.

> Le modèle relie la formation d’amas d’agents sur un réseau aléatoire aux fluctuations agrégées et aux queues épaisses. Il complète l’Ising : l’Ising décrit le changement d’orientation, tandis que la percolation décrit la géométrie et la taille des groupes susceptibles de basculer ensemble.

Bornholdt, S. (2001). « Expectation Bubbles in a Spin Model of Markets: Intermittency from Frustration across Scales ». International Journal of Modern Physics C, 12(5), 667–674.

> Cette référence est particulièrement proche de notre point de départ. L’opposition entre interactions locales et contrainte globale produit métastabilité, intermittence et bulles. Notre champ H_prix joue un rôle analogue de champ global, mais son inversion est pilotée par une maturité dépendant de la pente, de la durée et de l’échelle.

Zhou, W.-X. et Sornette, D. (2005). « Self-Fulfilling Ising Model of Financial Markets » ; voir aussi « Importance of Positive Feedbacks and Over-confidence… ».

Ces travaux introduisent un modèle d'Ising dynamique où les agents réévaluent la confiance accordée aux nouvelles et à l'imitation. Ils sont utiles pour interpréter H_prix comme un champ informationnel dont l'efficacité dépend de la mémoire collective et de la confiance, et non comme une force purement mécanique.

Toscani, G. (2006). « Kinetic Models of Opinion Formation ». Communications in Mathematical Sciences, 4(3), 481–496.

Toscani construit le passage entre interactions individuelles d'opinion, équation de Boltzmann et limite de Fokker–Planck. C'est la référence mathématique essentielle pour remplacer les spins par une densité continue f(y,t) et donner un statut cinétique au modèle mésoscopique.

Filimonov, V. et Sornette, D. (2012). « Quantifying Reflexivity in Financial Markets: Toward a Prediction of Flash Crashes ». Physical Review E, 85, 056108.

Le cadre de Hawkes permet de séparer activité exogène et auto-excitation endogène. Il fournit un modèle alternatif de la propagation temporelle et de la proximité d'un état critique. Il pourrait être utilisé pour estimer empiriquement la composante de mémoire et le taux de hasard du retournement.

Düring, B., Franceschi, J., Wolfram, M.-T. et Zanella, M. (2024). « Breaking Consensus in Kinetic Opinion Formation Models on Graphons ».

Ce travail relie explicitement une topologie de réseau de grande taille, représentée par un graphon, à une équation cinétique et à sa limite de Fokker–Planck. Il soutient directement la généralisation proposée ici : une densité f(c,y,t) où la structure du réseau et l'échelle modulent les interactions.

Lecture transversale de la bibliographie.

Tableau 9 – Correspondance entre les principales familles de travaux et les briques du modèle proposé.

Brique du modèle	Références principales	Apport
Imitation et changement d'état	Kirman ; Bornholdt ; Zhou–Sornette	Propagation sociale, métastabilité et rétroaction.
Agents hétérogènes et prix	Brock–Hommes ; Lux–Marchesi	Passage des stratégies à l'excès de demande et aux fluctuations du prix.
Réseau et amas	Cont–Bouchaud	Tailles de groupes, percolation et fluctuations agrégées.
Description cinétique	Toscani ; Düring et al.	Passage du microscopique à une densité Fokker–Planck/Vlasov sur réseau.
Mémoire et réflexivité	Filimonov–Sornette	Auto-excitation, proximité critique et mesure de l'endogénéité.

Annexe – Paramètres numériques des simulations présentées

Paramètre	Valeur	Rôle
Population	1024.0000	Agents ou spins
Horizon	1024.0000	Unités de temps
J	0.3100	Couplage social
γ	1.3500	Sensibilité de Glauber
λ	0.0060	Impact de la magnétisation sur X
σ prix	0.0024	Bruit exogène du prix
H max	0.5800	Amplitude du champ de prix
θ	5.0000	Raideur de la probabilité de retournement
α	1.0000	Exposant de pente

Paramètre	Valeur	Rôle
β	1.1000	Exposant de durée
σ poids	0.2000	Dispersion des poids gaussiens
Échelles	7.0000	C_0 à $C_0/64$
Monte-Carlo	200.0000	Nombre de réalisations

Tableau 10 – Paramètres illustratifs utilisés dans les expériences numériques.