Transitions de phase, bistabilité et cycles multiscalaires

Du potentiel de Landau à un modèle phénoménologique du CAC40 et des cycles historiques

Synthèse pédagogique des échanges et simulations

Introduction

Une transition de phase est l'un des exemples les plus simples où une immense complexité microscopique se condense en quelques variables collectives. Au voisinage d'un changement de régime, la description pertinente n'est plus celle de chaque degré de liberté pris séparément : on cherche une variable d'ordre, un paysage effectif et une dynamique réduite. Cette idée fournit un fil conducteur pour la physique statistique, mais aussi un langage de modélisation pour des systèmes collectifs qui ne sont pas thermodynamiques au sens strict.

Le présent texte développe ce fil en deux temps. Le premier rappelle la transition de phase, le potentiel de Landau, les fluctuations, la mémoire et les bifurcations. Le second construit un modèle bistable à rétroaction lente, puis l'utilise comme laboratoire conceptuel pour deux exemples sociologiques : le CAC40 et un schéma abstrait de cycles historiques opposant deux populations ou deux modes d'organisation. Les simulations ne prétendent pas valider empiriquement ces applications ; elles montrent ce que peut produire une architecture dynamique minimale.

1. Transition de phase : de la multitude microscopique à la variable d'ordre

Dans un ferromagnétique, la description microscopique comporte une multitude de moments magnétiques. Pourtant, l'état collectif peut être résumé par l'aimantation moyenne M. Au-dessus de la température critique, le désordre domine et M est proche de zéro. En dessous, deux états équivalents apparaissent : une aimantation positive ou négative. M est donc une variable d'ordre : elle ne décrit pas les détails, mais distingue les régimes macroscopiques.

$$M \;=\; (1/N)\,\Sigma_(i \;=\; 1)\hat{}N\; s_i$$

Landau propose alors de décrire les états accessibles au moyen d'une énergie libre effective. En absence de champ extérieur, la symétrie M ↔ −M impose une fonction paire. Le polynôme stable le plus simple capable de changer de forme est :

$$F(M) \;=\; F_0 \;+\; (a/2)\,M\hat{}2 \;+\; (b/4)\,M\hat{}4, \quad b \;>\; 0$$

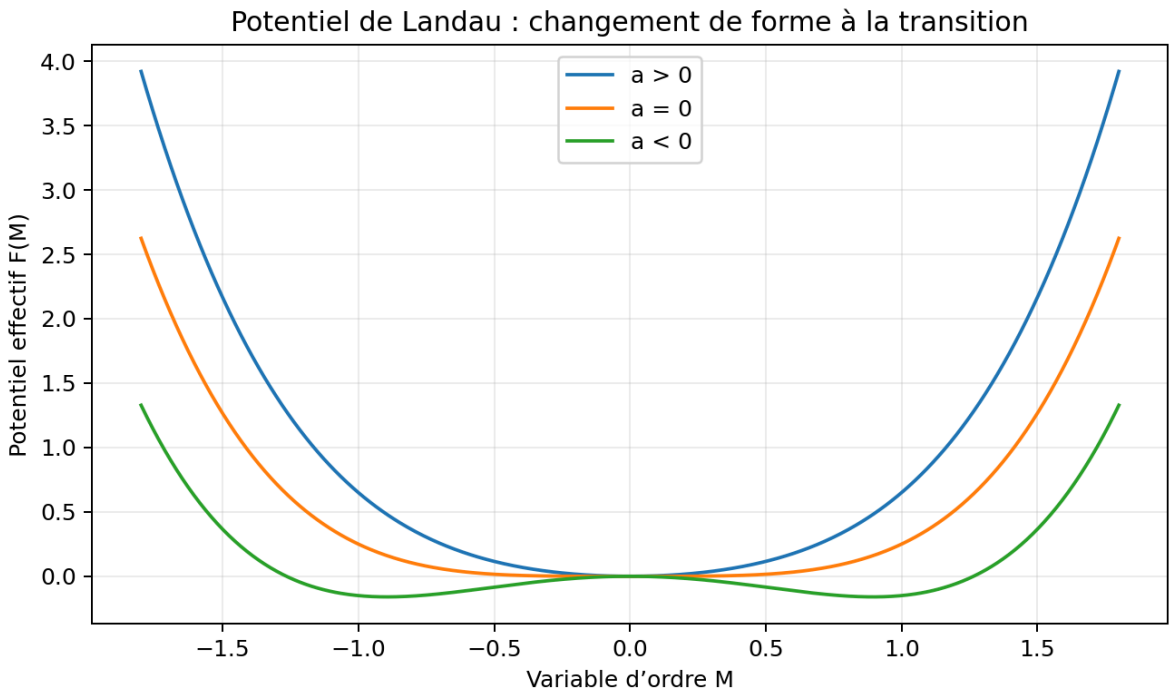


Figure 1 — Le coefficient a change la géométrie du potentiel de Landau.

Pour a>0, le seul minimum est M=0. Pour a<0, le point central devient instable et deux minima apparaissent. En posant $a(T)=a_0(T-T_c)$, la température devient le paramètre de contrôle de la bifurcation. Les minima non nuls vérifient :

$$M_{\pm} = \pm \sqrt{(-a/b)}$$

La transition continue s'interprète donc comme une bifurcation en fourche supercritique. Cette vision ne remplace pas la théorie statistique complète : près du point critique, les fluctuations spatiales deviennent essentielles et la renormalisation corrige les exposants de champ moyen. Mais elle fournit un modèle minimal de la naissance d'un ordre collectif.

2. De l'équilibre à la dynamique : potentiel, mémoire et bruit

Un potentiel ne décrit qu'un paysage d'états. Pour étudier l'évolution temporelle de la variable d'ordre, on lui associe une dynamique de relaxation. La forme la plus simple est une descente de gradient :

$$dX/dt = -\Gamma\, \partial V/\partial X$$

Une réduction depuis un système microscopique plus riche laisse cependant d'autres traces. Les degrés de liberté éliminés peuvent produire des fluctuations et une mémoire. Une écriture générique est :

$$dX/dt = -\partial V/\partial X - \int_0^t K(t-s)\, X(s)\, ds + \eta(t) + F_{ext}(t)$$

Le potentiel indique les régimes collectifs et leur stabilité. Le noyau K décrit la persistance du passé ; un noyau exponentiel possède un temps dominant, tandis qu'une loi de puissance distribue la mémoire sur de nombreuses échelles. Le bruit η regroupe les fluctuations non résolues ou les événements exogènes. Cette décomposition — paysage, mémoire, bruit — constitue un pont naturel entre la physique statistique et la modélisation de systèmes collectifs.

3. Extension phénoménologique aux systèmes sociaux

Dans un modèle social à deux orientations, on peut définir une variable d'ordre à partir de deux populations N_+ et N_- :

$$x = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$$

x>0 signifie domination du premier groupe, x<0 domination du second et x≈0 équilibre. Une dynamique de type Landau peut alors représenter consensus, polarisation ou alternance de régimes. La comparaison doit être comprise comme une analogie structurale. À la différence d'un spin, un acteur social anticipe, apprend et modifie ses propres règles ; les paramètres du modèle peuvent donc évoluer avec l'histoire.

Deux cas d'école sont retenus ici. Pour le CAC40, x représente une pression collective abstraite opposant acheteurs et vendeurs. Pour les cycles historiques, x oppose deux modes idéalisés : des 'pionniers', associés à l'ouverture et à l'innovation, et des 'colons', associés à la stabilisation, l'exploitation et l'institutionnalisation. Ces termes désignent des fonctions dynamiques, non des catégories sociologiques exhaustives.

3.1. Du couple de populations au mécanisme de balancier

Le passage du phénomène observé au modèle bistable repose sur une hypothèse simple : certains systèmes collectifs peuvent être décrits, à une échelle donnée, par la concurrence de deux populations ou de deux modes de comportement qui ne sont pas indépendants. Chacun se développe dans un environnement en partie produit par l'autre. Le modèle ne suppose donc pas deux groupes figés ; il suppose deux fonctions opposées entre lesquelles les acteurs, les capitaux ou les institutions peuvent circuler.

Pour le CAC40, les deux pôles sont la pression acheteuse et la pression vendeuse. Il ne s'agit pas nécessairement de deux catégories permanentes d'investisseurs : un même acteur peut acheter aujourd'hui et vendre demain. Ce qui importe est le déséquilibre collectif entre deux intentions. Lorsque la pression acheteuse domine, les cours montent ; mais cette hausse modifie progressivement les conditions du marché. Les valorisations deviennent plus élevées, les plus-values potentielles incitent à vendre, les nouveaux acheteurs deviennent plus rares et l'exposition au risque s'accumule. Autrement dit, la domination du pôle acheteur fabrique progressivement des raisons de vendre. À l'inverse, une phase dominée par les vendeurs fait baisser les prix, purge certaines positions et recrée progressivement des opportunités d'achat. Chaque régime engendre ainsi les conditions de son propre affaiblissement.

Pour les cycles historiques, les termes de « pionniers » et de « colons » jouent le même rôle conceptuel. Les pionniers désignent ici les comportements d'exploration, d'innovation, de rupture et d'ouverture de nouveaux espaces de possibilités. Les colons représentent, au sens fonctionnel, la stabilisation, l'organisation, l'exploitation des acquis, la normalisation et l'institutionnalisation. Une phase pionnière réussie construit des techniques, des règles, des infrastructures et des institutions ; elle crée donc elle-même le terrain sur lequel les fonctions de stabilisation peuvent croître. Lorsque celles-ci deviennent dominantes, elles peuvent à leur tour rigidifier le système, réduire sa capacité d'adaptation et accumuler des tensions. Cette saturation recrée alors un avantage relatif pour des comportements pionniers. Le cycle n'est donc pas imposé de l'extérieur : il provient d'une rétroaction entre les deux modes d'organisation.

Dans les deux cas, la variable d'ordre x ne mesure pas directement un nombre absolu d'individus ; elle mesure un déséquilibre collectif entre deux pôles. Si N_+ et N_- désignent leurs intensités respectives, on peut reprendre la définition normalisée :

$$x = (N_+ \quad - \quad N_-)/(N_+ \quad + \quad N_-)$$

Lorsque x est fortement positif, le premier pôle domine ; lorsqu'il est fortement négatif, le second domine. La difficulté est alors de rendre compte du fait que cette domination n'est pas stable indéfiniment. On introduit pour cela une variable lente h qui condense les conséquences accumulées du régime courant : surévaluation et vulnérabilité dans le cas financier ; institutionnalisation, rigidification ou saturation dans le cas historique. Le mécanisme de rétroaction recherché peut être résumé par la chaîne suivante :

$$x > 0 \Rightarrow h\,augmente \Rightarrow \leq régime\,x > 0\,se\,fragilise \Rightarrow basculement\,vers\,x < 0$$

$$x < 0 \Rightarrow h\,diminue \Rightarrow \leq régime\,x < 0\,se\,fragilise \Rightarrow basculement\,vers\,x > 0$$

C'est ce raisonnement qui conduit au potentiel bistable incliné présenté dans la section suivante. Les deux minima représentent les deux régimes collectifs possibles ; la variable lente h incline progressivement ce paysage en faveur du régime opposé. Lorsque l'inclinaison devient suffisante, le minimum occupé disparaît par une bifurcation selle-nœud et le système bascule rapidement vers l'autre branche. Le modèle traduit ainsi, sous une forme mathématique minimale, l'idée de balancier : la réussite d'un régime produit lentement les conditions de son retournement.

Cette construction reste volontairement phénoménologique. Elle ne prétend ni réduire un marché financier à deux groupes, ni imposer à l'histoire une périodicité mécanique. Elle fournit plutôt une grammaire dynamique permettant de tester une hypothèse : lorsque deux modes collectifs antagonistes se nourrissent successivement des excès de l'autre, une dynamique bistable avec rétroaction lente peut constituer un modèle réduit pertinent.

3.2. Mise en perspective bibliographique : des transitions collectives aux cycles endogènes

L'intérêt du modèle proposé apparaît plus clairement lorsqu'on le replace dans deux traditions de recherche déjà constituées. En finance, une longue famille de modèles représente le marché comme une population d'agents pouvant se regrouper, s'imiter, changer de stratégie et produire collectivement des changements de régime. En histoire quantitative, la cliodynamique cherche au contraire à expliquer des oscillations longues par des rétroactions internes entre population, richesse, élites, État et instabilité. Ces deux littératures ne conduisent pas exactement à notre équation bistable, mais elles légitiment deux idées essentielles : un comportement collectif peut être décrit par quelques variables d'ordre, et les cycles observés peuvent être endogènes, c'est-à-dire produits par les interactions du système plutôt que par une horloge extérieure.

Pour les marchés financiers, D'Hulst et Rodgers ont montré dès 2000 qu'un modèle très simple d'agents pouvait passer d'un état cohérent à un état bistable, avec ségrégation spontanée de la population. Leur résultat est particulièrement proche de notre intuition : il existe plusieurs organisations collectives possibles, et un paramètre de contrôle peut faire passer le système d'un régime à l'autre. Dans un travail antérieur, les mêmes auteurs reliaient déjà les phénomènes de foule et de transmission d'information à des distributions d'amas d'agents et à des variations de prix à queues lourdes. Le marché n'est donc plus seulement la somme de décisions indépendantes : la structure collective des interactions devient une variable physique du problème.

Sornette a proposé, dans un autre langage, une lecture des marchés fondée sur la brisure spontanée de symétrie. Il montre qu'un changement de régime de valorisation peut être interprété par analogie avec une transition de phase : un paramètre de contrôle franchit une valeur critique et une nouvelle organisation

macroscopique devient possible. Là encore, l'objectif n'est pas de dire qu'un indice boursier est un aimant, mais de reconnaître une structure mathématique commune : plusieurs états collectifs, un paramètre de contrôle, une transition et une amplification des comportements de foule. Cette littérature fournit donc un arrière-plan naturel à notre variable d'ordre opposant pression acheteuse et pression vendeuse.

Notre modèle ajoute cependant une idée précise : la domination d'un pôle crée lentement les conditions du retour de l'autre. La hausse nourrit les prises de bénéfices, les valorisations élevées, la raréfaction des acheteurs marginaux ou l'augmentation du risque perçu ; la baisse recrée au contraire des opportunités d'achat et épuise progressivement la pression vendeuse. Le potentiel à deux puits fournit les deux régimes possibles ; la variable lente h incline ce paysage ; la bifurcation selle-nœud décrit la disparition de l'attracteur dominant. On obtient ainsi un balancier endogène plutôt qu'une simple alternance imposée.

Du côté historique, la parenté la plus forte se trouve dans la théorie démographique-structurelle issue de Goldstone puis développée par Turchin et Nefedov. Goldstone montre comment des pressions démographiques cumulées, des tensions fiscales, des divisions des élites et la rigidité des institutions peuvent conduire à des crises majeures. Turchin transforme cette intuition en systèmes dynamiques : les cycles séculaires ne sont pas postulés a priori ; ils apparaissent à partir de rétroactions non linéaires entre plusieurs composantes de la société. Cette démarche est très proche de notre logique de modélisation, même si les variables choisies sont différentes.

Le résultat empirique le plus suggestif pour notre construction est celui des « roues dans les roues » historiques : Turchin met en évidence dans les données américaines une oscillation séculaire sur laquelle se superpose une oscillation d'environ cinquante ans. Cette coexistence de temporalités rejoint directement notre idée de superposition d'échelles. Elle suggère qu'un signal historique global peut être composé de dynamiques ayant des temps propres différents, exactement comme notre construction dyadique superpose plusieurs sous-systèmes caractérisés par des valeurs différentes de a.

Les travaux récents de Wittmann et Kuehn renforcent encore ce rapprochement. Leur modèle démographie-richesse applique explicitement les outils des systèmes dynamiques non linéaires à la cliodynamique et étudie des bifurcations de Hopf donnant naissance à des cycles limites. Cela montre que l'usage de bifurcations pour expliquer des cycles historiques n'est pas seulement une métaphore : il constitue déjà un programme mathématique de recherche. Notre modèle s'en distingue par le choix d'un potentiel bistable incliné et par l'interprétation en deux pôles fonctionnels — pionniers et colons — mais il appartient à la même famille méthodologique : réduire un système historique complexe à quelques variables collectives et étudier les régimes que produit leur interaction.

Cette mise en perspective permet donc de situer correctement la proposition. Pour le CAC40 comme pour les cycles historiques, le modèle n'est pas présenté comme une théorie déjà validée des données. Il constitue un modèle phénoménologique minimal destiné à tester une hypothèse : certains retournements peuvent-ils être compris comme des transitions entre deux organisations collectives, provoquées par une rétroaction lente, puis enrichies par le bruit, la mémoire et la coexistence de plusieurs échelles ? La bibliographie existante montre que chacune de ces briques possède des précédents sérieux ; l'originalité éventuelle réside dans leur réunion au sein d'une même architecture bistable et multiscalaire.

4. Le potentiel bistable incliné : un modèle minimal du balancier

Un double puits fixe ne produit pas à lui seul un cycle : une trajectoire finit dans un minimum et y reste. Pour créer un balancier, il faut qu'une variable lente modifie progressivement le paysage. On choisit :

$$V(x, h) = x\text{^}4/4 - (a/2)\, x\text{^}2 + h\, x$$

Le paramètre a règle la séparation et la profondeur des deux puits. La variable h incline le potentiel. La dynamique rapide est :

$$dx/dt \;=\; a\,x \;-\; x\text{^}3 \;-\; h$$

et la variable lente :

$$\tau_h\,dh/dt \;=\; x \;-\; \lambda\,h$$

Quand x reste positif, h croît lentement et finit par rendre ce régime moins favorable. Lorsque l'inclinaison atteint une valeur critique, le minimum correspondant disparaît par une bifurcation selle-nœud ; x bascule rapidement vers l'autre branche. Le même mécanisme se produit ensuite en sens inverse.

$$|h_c| \;=\; 2\,a\text{^}(3/2)/(3\sqrt{3})$$

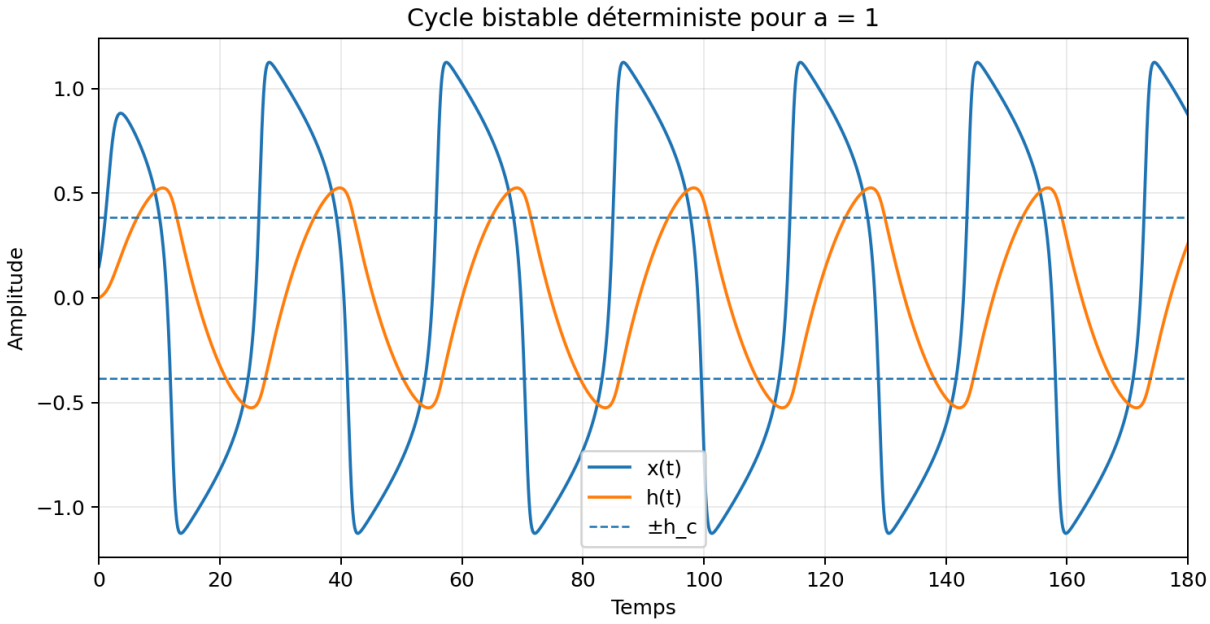


Figure 2 — Pour a=1, le système alterne entre deux régimes séparés par des basculements rapides.

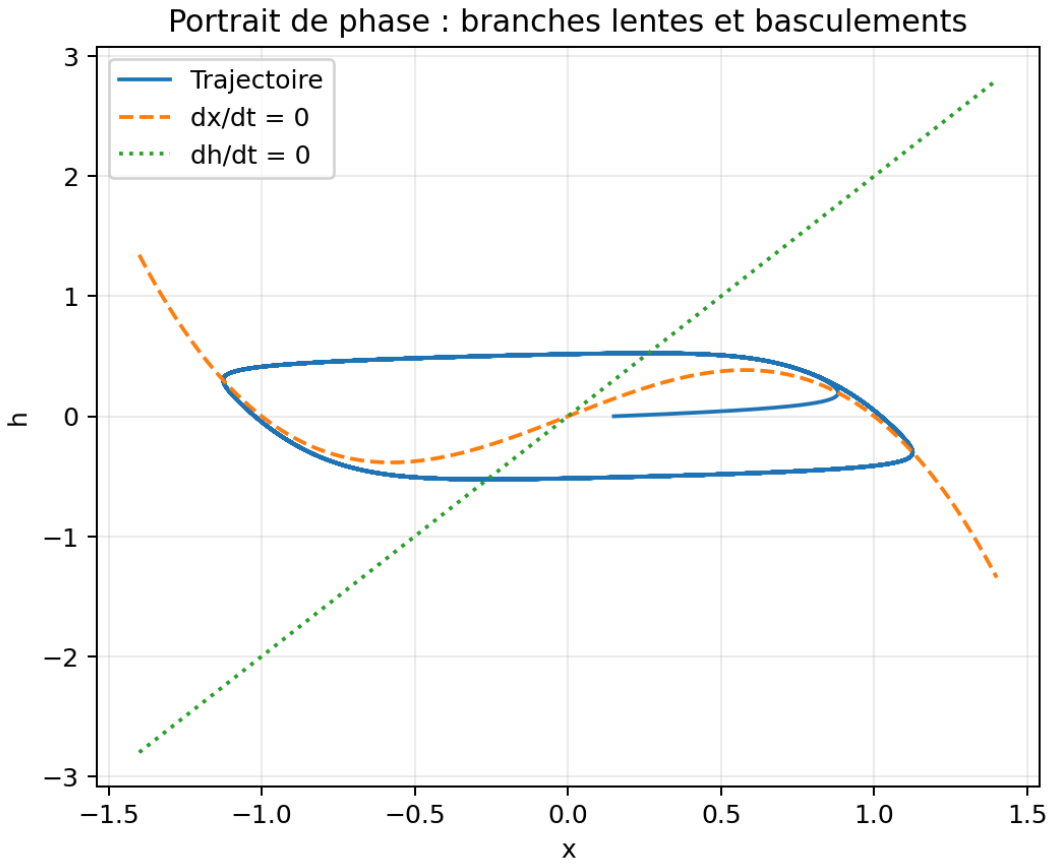


Figure 3 — La trajectoire suit les branches lentes puis saute lorsque la stabilité disparaît.

Dans la lecture financière, la hausse peut construire progressivement des conditions favorables à la vente ; dans la lecture historique, le succès d'un mode pionnier peut créer les institutions et rigidités qui favorisent un mode colon, lequel prépare ensuite la nécessité d'une nouvelle phase pionnière. Le cycle n'est pas imposé par une sinusoïde : il naît de la transformation lente du paysage de stabilité.

5. Résultats déterministes : rôle du paramètre a

Pour isoler le rôle de a, on fixe λ=0,5 et τ_h=10, sans bruit ni mémoire. Le paramètre a agit sur trois grandeurs. Les minima statiques sont situés approximativement en ±√a, la barrière centrale vaut a²/4, et le seuil d'inclinaison varie comme a^(3/2). On s'attend donc à des états plus éloignés, plus profonds et plus persistants lorsque a augmente.

a	Période T	Amplitude simulée	√a	h_c
0.2	20.42	0.446	0.447	0.034
0.4	21.67	0.682	0.632	0.097
0.6	23.72	0.856	0.775	0.179
0.8	26.31	1.000	0.894	0.275
1.0	29.26	1.126	1.000	0.385
1.2	32.53	1.238	1.095	0.506
1.4	36.12	1.340	1.183	0.638

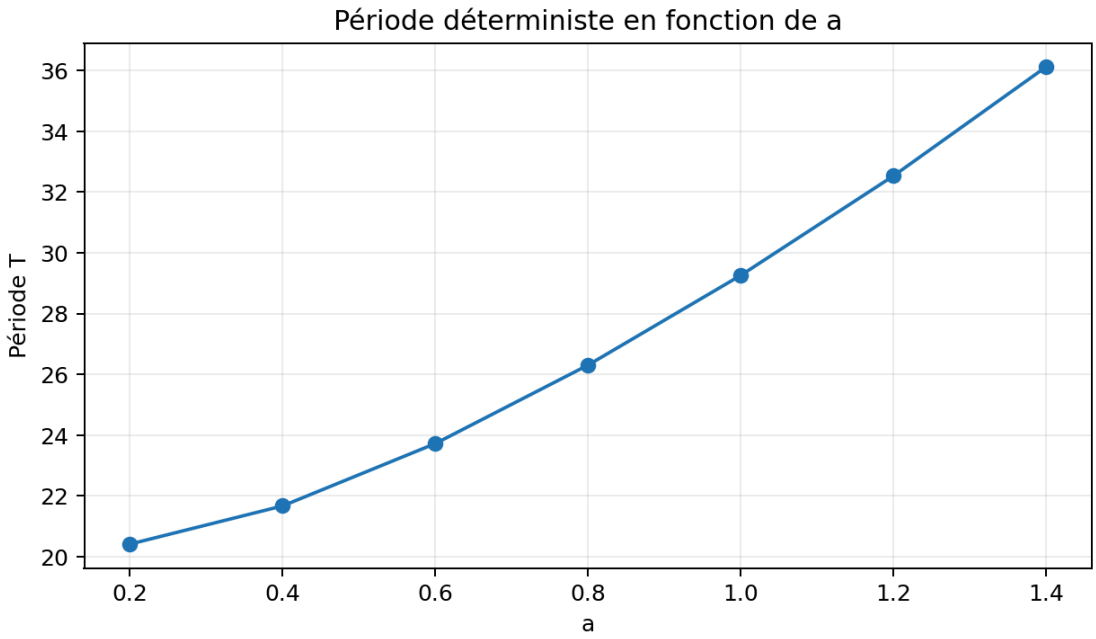


Figure 4 — La période augmente de manière monotone avec a dans le modèle déterministe.

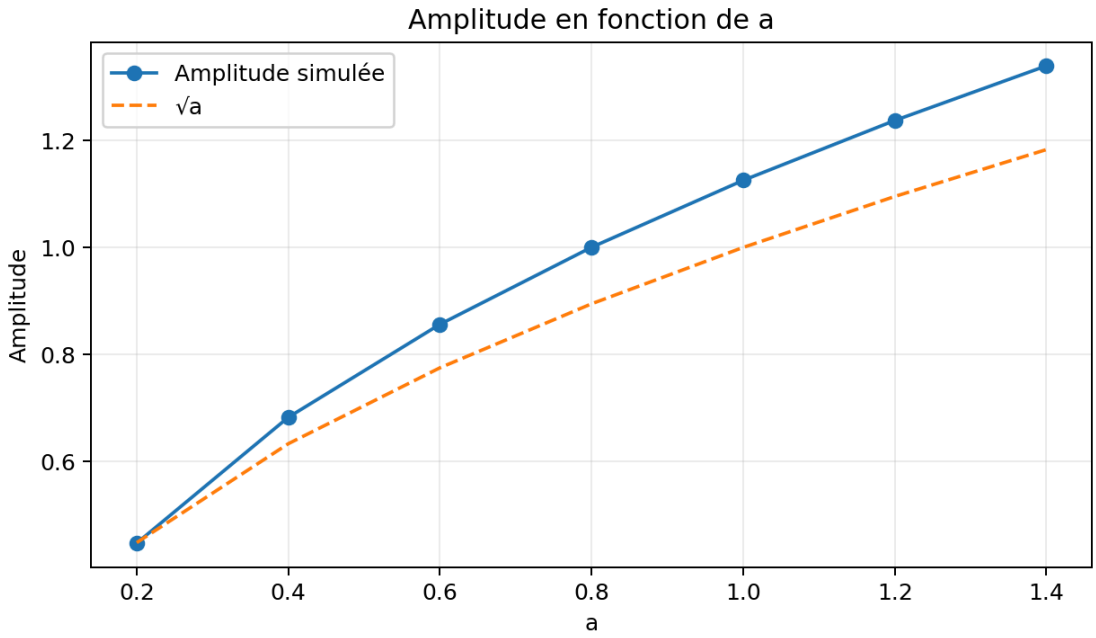


Figure 5 — L'amplitude croît avec a et suit qualitativement l'échelle √a.

La courbe T(a) montre que a peut jouer le rôle d'un générateur d'échelles temporelles. L'amplitude croît également. Cette propriété sera exploitée plus loin pour construire une famille dyadique de sous-systèmes.

6. Ajouter le bruit : des cycles réguliers aux retournements stochastiques

On introduit un bruit blanc dans la dynamique rapide :

$$dX = (aX - X\text{^}3 - h)\,dt + \sigma\,dW_t$$

Pour σ=0, le cycle est presque parfaitement périodique. Lorsque σ augmente, le système fluctue autour des branches lentes et peut franchir une barrière avant que la selle-nœud déterministe ne soit atteinte. Le bruit ne supprime donc pas nécessairement l'organisation du cycle ; il disperse les temps de résidence et rend les basculements moins prévisibles.

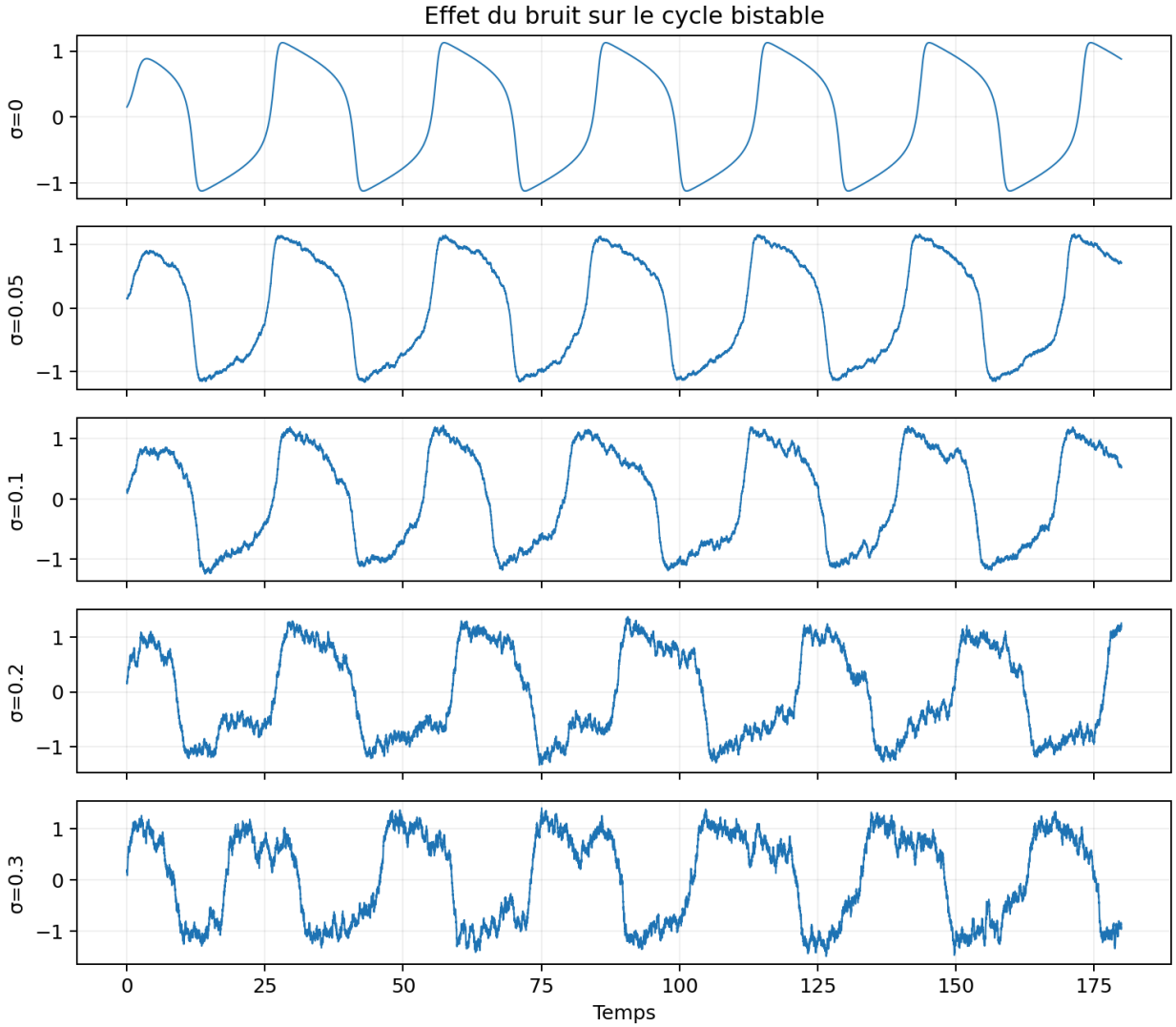


Figure 6 — De σ=0 à σ=0,3, la structure bistable persiste tandis que les instants de retournement se dispersent.

Dans une lecture du CAC40, η peut condenser nouvelles, ordres individuels, chocs et interactions non résolues. Dans une lecture historique, il représente l'imprévu : crise, innovation, accident politique ou événement extérieur.

7. Ajouter la mémoire : mémoire courte et mémoire longue

Une mémoire exponentielle correspond à un passé qui s'efface selon un temps caractéristique τ_m :

$$K_exp(t) = (1/\tau_m)\,exp(-\,t/\tau_m)$$

$$\tau_m\, dm/dt \;=\; X \;-\; m$$

Une mémoire longue est modélisée par un noyau à queue algébrique :

$$K_long(t) \;\propto\; t\^(-\,\alpha), \quad 0 \;<\; \alpha \;<\; 1$$

La dynamique devient alors :

$$dX/dt \;=\; aX \;-\; X\^3 \;-\; h \;-\; \kappa\, m(t) \;+\; \eta(t)$$

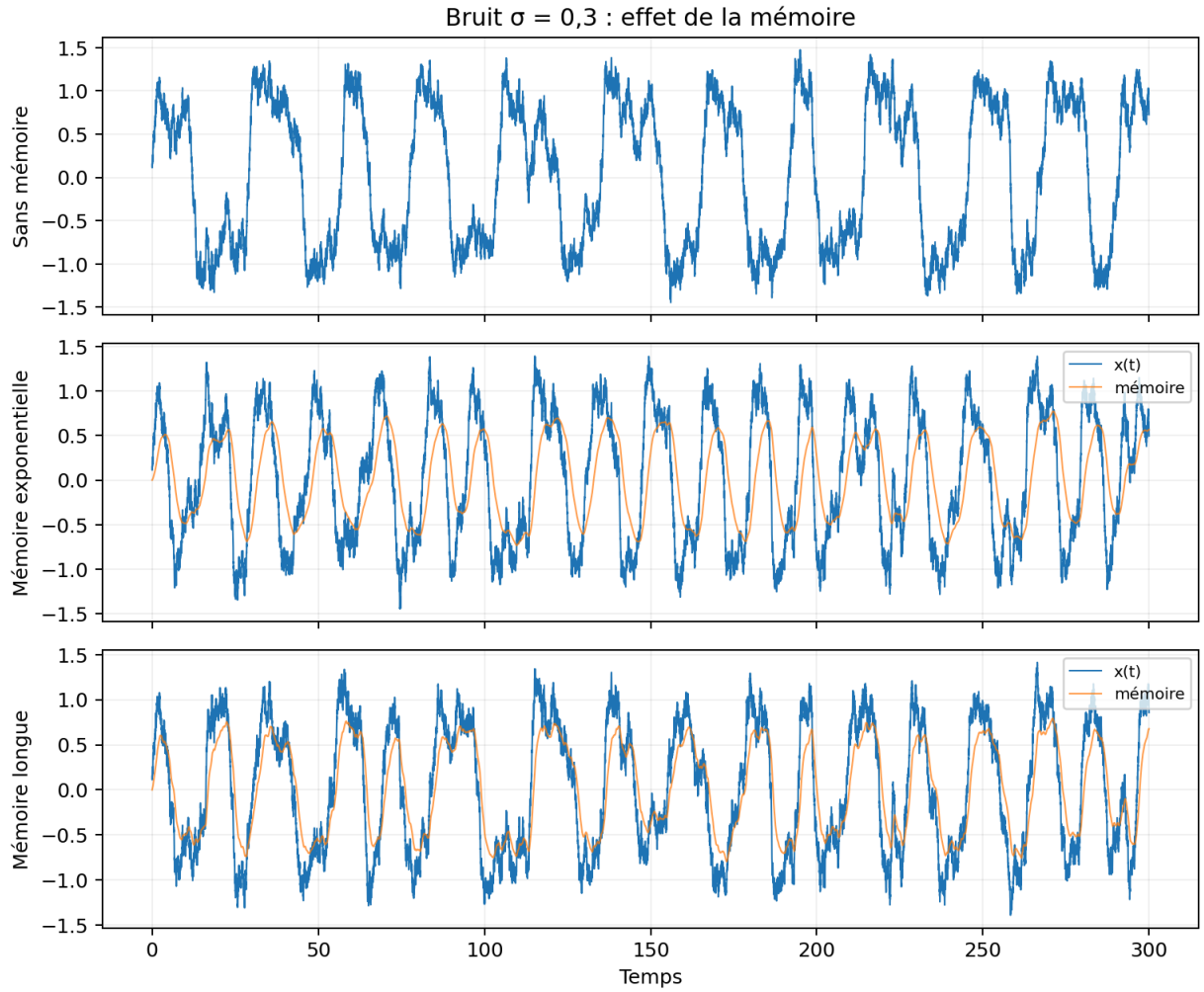


Figure 7 — À σ=0,3, la mémoire transforme le rythme des basculements et filtre une partie de l'irrégularité instantanée.

Avec le signe −κm retenu ici, la mémoire agit comme une force de rappel retardée. Elle peut accélérer certains retournements. La mémoire exponentielle privilégie un horizon dominant ; la mémoire en loi de puissance conserve l'influence d'une hiérarchie de temps. Le seuil pertinent n'est alors plus h seul mais une inclinaison effective h+κm.

8. De quelques cycles à une construction multiscalaire dyadique

On franchit maintenant une étape supplémentaire. Plutôt que de chercher un unique cycle, on suppose que plusieurs niveaux d'organisation suivent la même loi bistable avec des valeurs de a distribuées géométriquement. On choisit la suite :

$$a \in \{32, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

Cette progression par facteurs 2 rappelle une décomposition en ondelettes : chaque niveau possède sa propre amplitude et sa propre période. Pour maintenir les basculements aux grandes valeurs de a, on utilise ici λ=0,02 et τ_h=10. Chaque composante est ensuite multipliée par un coefficient aléatoire c_i et déphasée d'une phase temporelle φ_i uniforme sur sa période propre.

$$X_global(t) = (1/N)\, \Sigma_i\, c_i\, X_(a_i)(t - \varphi_i)$$

a	Période	Amplitude	Facteur c_i	Déphasage
32	563.1	6.53	1.152	390.4
16	271.7	4.62	0.869	265.2
8	137.8	3.27	0.977	76.0
4	73.6	2.32	1.273	38.1
2	42.8	1.65	1.219	18.6
1	28.7	1.17	1.299	24.4

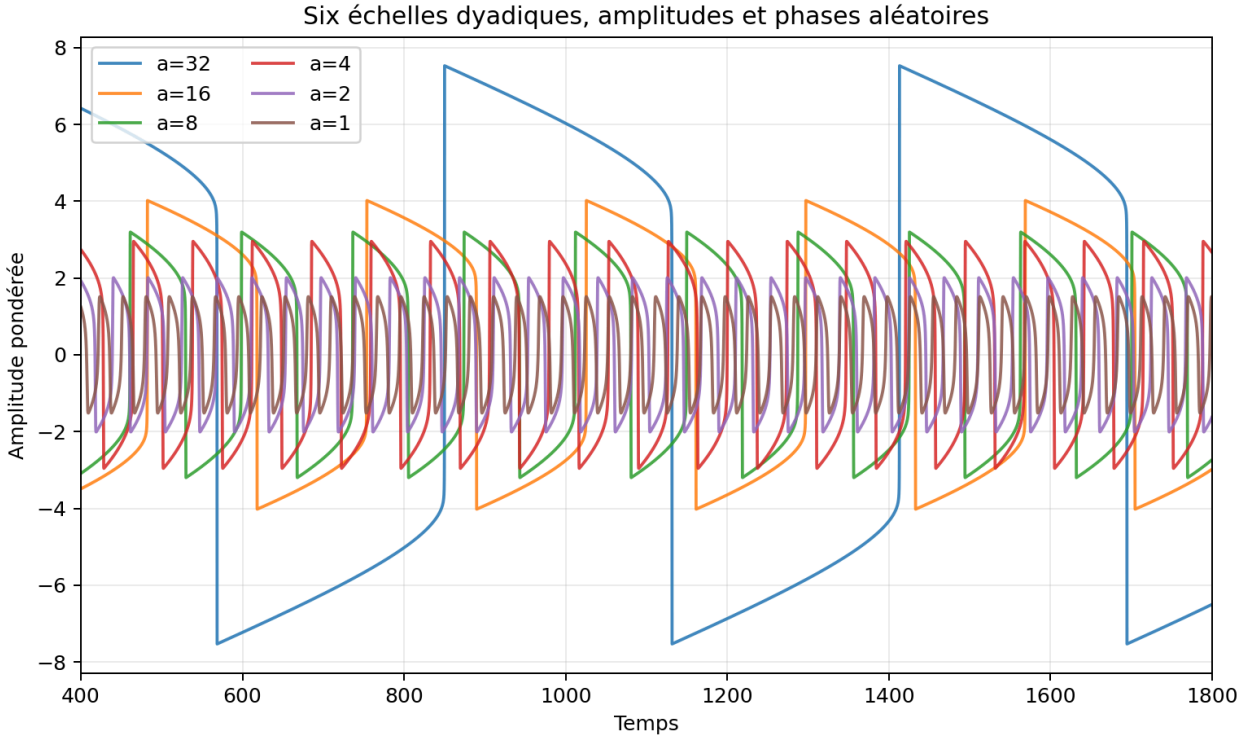


Figure 8 — Les grandes valeurs de a portent les structures lentes et amples ; les petites valeurs les fluctuations rapides.

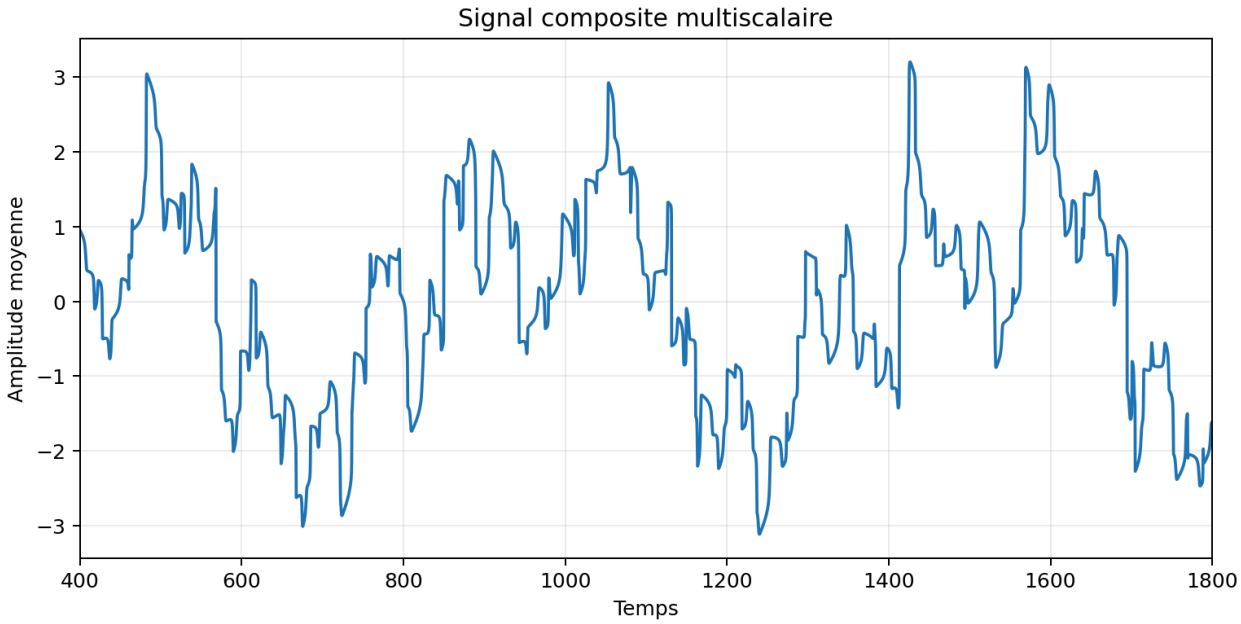


Figure 9 — La superposition désynchronisée produit un signal complexe sans introduire de bruit.

Cette expérience montre qu'un signal irrégulier peut émerger d'une somme de dynamiques déterministes non linéaires possédant des échelles différentes et des phases désynchronisées. La complexité observée n'est donc pas synonyme d'aléa microscopique : elle peut être une propriété de superposition multiscalaire.

9. Autospectre et exposant spectral

L'autospectre du signal composite s'étend sur une large plage de fréquences. Sur la bande 0,01 ≤ f ≤ 1, un ajustement log-log donne :

$$S(f) \approx C\, f\text{^}(-\beta), \quad \beta \approx 2.19$$

Le coefficient de détermination de l'ajustement vaut environ R^2=0.62. La loi de puissance doit donc être comprise comme une enveloppe spectrale et non comme une identité exacte : seules six échelles discrètes sont présentes, et chacune conserve une fréquence caractéristique.

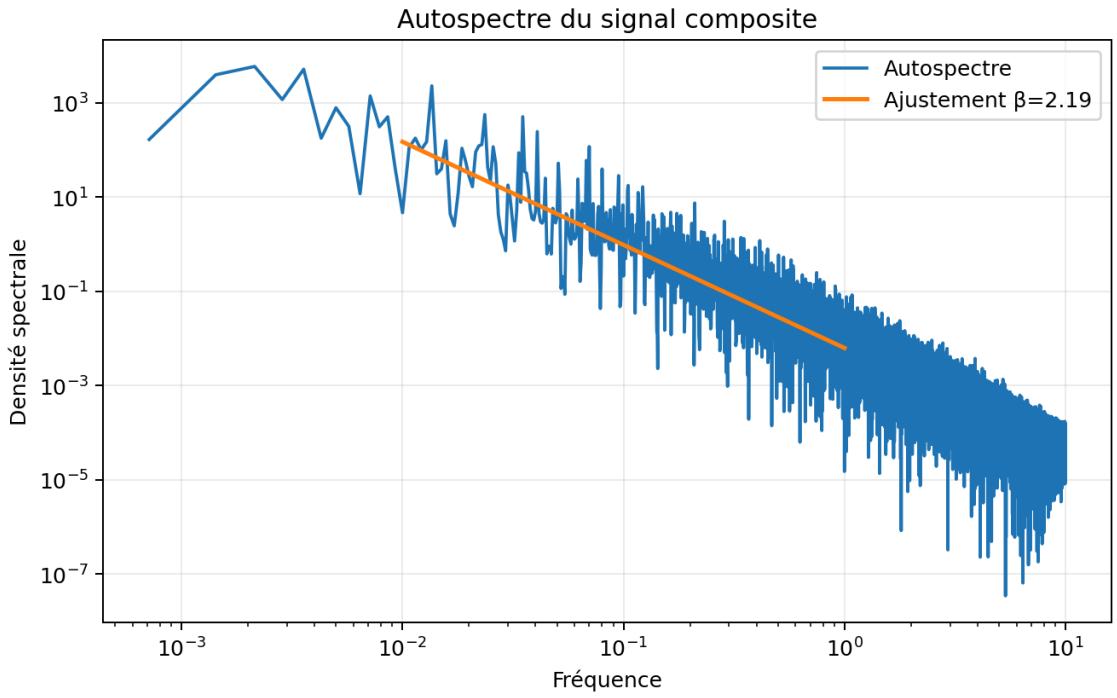


Figure 10 — L'enveloppe de l'autospectre décroît approximativement comme $f^{-2.2}$.

Une pente voisine de −2 est cohérente avec des composantes de relaxation comportant des évolutions lentes et des transitions rapides. La distribution dyadique élargit cette propriété à plusieurs décennies de temps. Avec davantage d'échelles ou une distribution continue de a, on pourrait tester si l'enveloppe tend vers un exposant plus stable.

10. Mémoire longue sur chaque échelle dyadique

Enfin, on ajoute le même principe de mémoire longue à chaque sous-système dyadique. Chaque composante possède alors son propre passé, avant pondération et déphasage. Dans la paramétrisation retenue, la mémoire modifie légèrement les périodes, surtout aux petites valeurs de a, mais conserve presque inchangée la pente globale du spectre.

$$\beta_mémoire \approx 2.19, \quad \beta_mémoire\ longue \approx 2.21$$

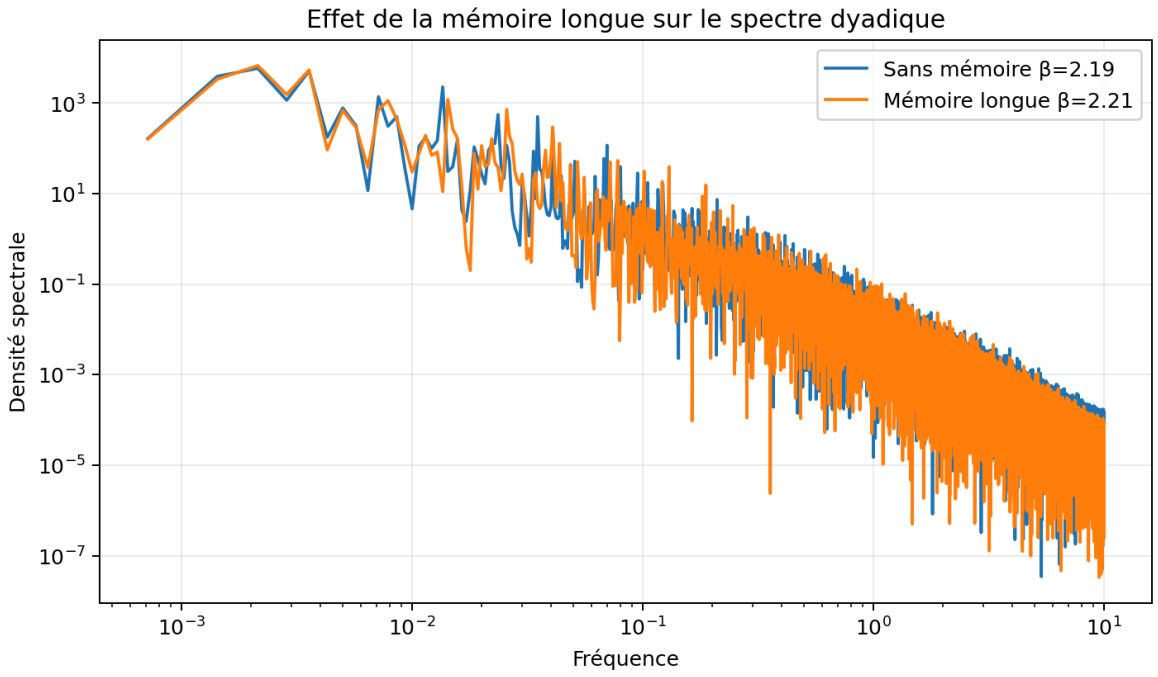


Figure 11 — La mémoire longue modifie la structure fine, mais peu l'enveloppe spectrale dans cette simulation.

Sur la même bande 0,01–1, l'ajustement donne $R^2 \approx 0.62$ sans mémoire et $R^2 \approx 0.57$ avec mémoire longue. Dans ce laboratoire numérique, la distribution d'échelles semble donc principalement responsable de la pente spectrale, tandis que la mémoire agit davantage sur les corrélations temporelles, les phases et les durées de résidence.

11. Du signal multiscalaire à un indice synthétique : interprétation en log-indice

La construction multiscalaire précédente fournit un signal global X(t), somme de composantes bistables réparties sur les échelles dyadiques a = 32, 16, 8, 4, 2 et 1, déphasées, soumises à une mémoire longue et à un bruit de niveau σ = 0,3. Plutôt que d'identifier directement X(t) au niveau de l'indice, on peut lui donner une interprétation plus naturelle : X(t) représente la partie fluctuante du logarithme de l'indice. La transformation exponentielle assure alors automatiquement la positivité de l'indice et convertit les excursions positives et négatives du log-indice en phases de hausse et de correction.

On introduit d'abord une version normalisée du signal composite afin que la constante K règle l'amplitude des fluctuations sans dépendre de l'échelle numérique arbitraire de X :

$$Z(t) = (X(t) - \mu_X)/A_X$$

Le logarithme relatif de l'indice est alors décomposé en une dérive lente et une fluctuation multiscalaire :

$$ln(C(t)/C_0) = K\,Z(t) + d(t)$$

d'où la reconstruction de l'indice :

$$C(t) = C_0\,exp[K\,Z(t) + d(t)]$$

Pour illustrer une croissance moyenne de l'ordre de 4 % par an, on suppose que 300 points de simulation représentent une année et l'on choisit :

$$d(t) = (0.04/300)t$$

Dans le domaine logarithmique, cette prescription correspond à une croissance moyenne de exp(0,04)−1 ≈ 4,08 % par 300 points, donc très proche de 4 %. Si l'on voulait imposer exactement 4 %, on remplacerait 0,04 par ln(1,04). Cette distinction est faible ici mais importante pour un futur calibrage empirique.

Avec C_0 = 100, K = 0,22 et la normalisation robuste utilisée dans la simulation, la courbe obtenue garde les cycles et corrections produits par la dynamique bistable, tout en acquérant une faible tendance haussière. Sur la fenêtre simulée, l'indice synthétique évolue approximativement entre 76 et 153. La dérive n'invente donc pas la structure des fluctuations : elle incline seulement le niveau moyen du log-indice, tandis que les variations rapides, intermédiaires et lentes restent produites par la superposition des échelles.

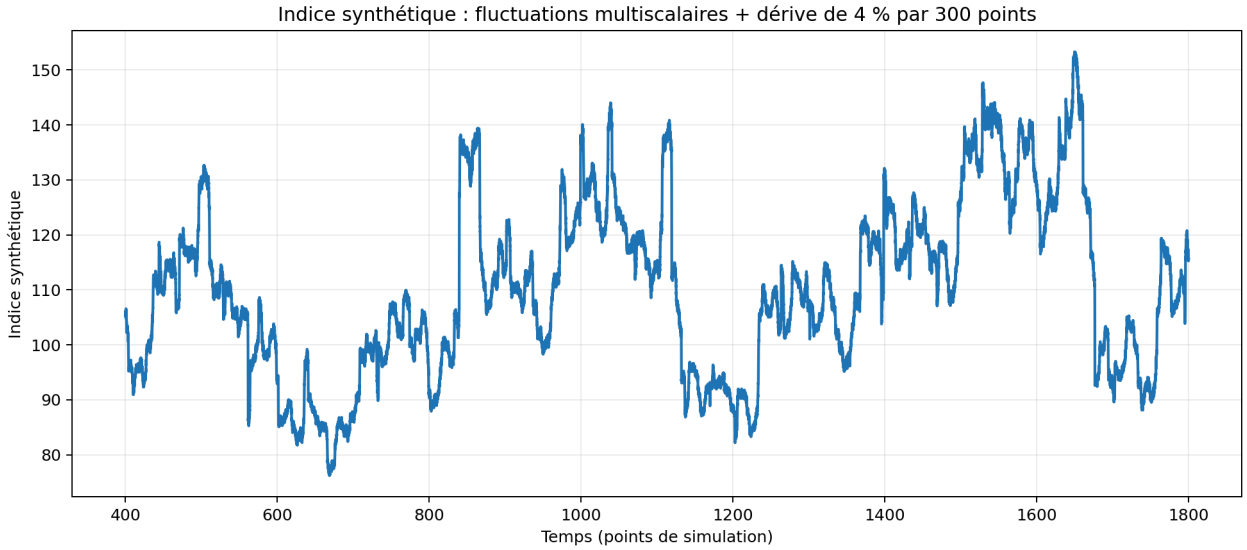


Figure — Indice synthétique reconstruit par exponentiation du signal multiscalaire, avec dérive logarithmique de 4 % par 300 points.

Cette représentation conduit à une lecture particulièrement simple du modèle. Le log-indice peut être séparé en une composante moyenne et une composante fluctuante :

$$L(t) = \ln C(t) = L_0 + g\,t + K\,Z(t)$$

où g ≈ 0,04/300 est la croissance moyenne logarithmique par point et Z(t) porte la dynamique complexe. L'autospectre calculé pour le signal composite précédent est approximativement de la forme :

$$S_Z(f) \propto f\text{^}(-\ \beta),\ \ \beta \approx 2.27$$

Sur la bande 0,01 ≤ f ≤ 1, l'ajustement numérique donnait β ≈ 2,27 avec R^2 ≈ 0,73. Il est donc raisonnable, au niveau pédagogique, de résumer cette dynamique par un spectre proche de $1/f^2$. Cela ne signifie pas que le modèle ait démontré une autosimilarité exacte : avec seulement six échelles dyadiques, le spectre reste une superposition de contributions discrètes et l'exposant dépend de la bande d'ajustement. En revanche, le résultat montre comment une hiérarchie de cycles bistables, combinée au bruit, à la mémoire et au déphasage, peut engendrer une enveloppe spectrale proche d'une loi de puissance.

Dans cette lecture, la croissance à long terme et la complexité à court et moyen terme sont donc séparées : la première est portée par la moyenne du log-indice, la seconde par un champ fluctuant multiscalaire. Pour le CAC40, l'hypothèse testable serait alors que le logarithme de l'indice peut être décomposé en une dérive lente de long terme et une composante multiscalaire dont l'autospectre se rapproche de f^{-2}. Il s'agit ici d'une proposition de modélisation à confronter aux données réelles, et non d'une propriété établie du CAC40 par la seule simulation.

12. Dérivée, intermittence et mémoire des fluctuations

L'analyse du signal multiscalaire peut être poussée un cran plus loin en examinant non plus seulement X(t), mais sa vitesse de variation. Cette dérivée donne accès aux changements rapides du système : elle met en évidence les instants où la dynamique quitte brutalement une branche lente, où plusieurs échelles se renforcent ou, au contraire, où leurs contributions se compensent. Dans le cas financier, si X est interprété comme une composante du log-indice, sa dérivée est analogue à un rendement instantané ; dans l'interprétation historique, elle mesure la rapidité locale du changement de régime.

Numériquement, la dérivée est estimée à partir du signal discrétisé par une différence centrée. Pour un pas Δt suffisamment petit, on utilise :

$$dX/dt(t_i) \approx [X(t_\{i+1\}) - X(t_\{i-1\})]/(2\Delta t)$$

La courbe obtenue est presque centrée autour de zéro et apparaît beaucoup plus irrégulière que X(t). Les variations ordinaires forment un fond dense, tandis que des excursions beaucoup plus fortes apparaissent aux moments de basculement. Cette alternance entre activité modérée et événements intenses est la signature visuelle d'un signal intermittent : l'activité n'est pas distribuée uniformément dans le temps, elle se concentre en bouffées.

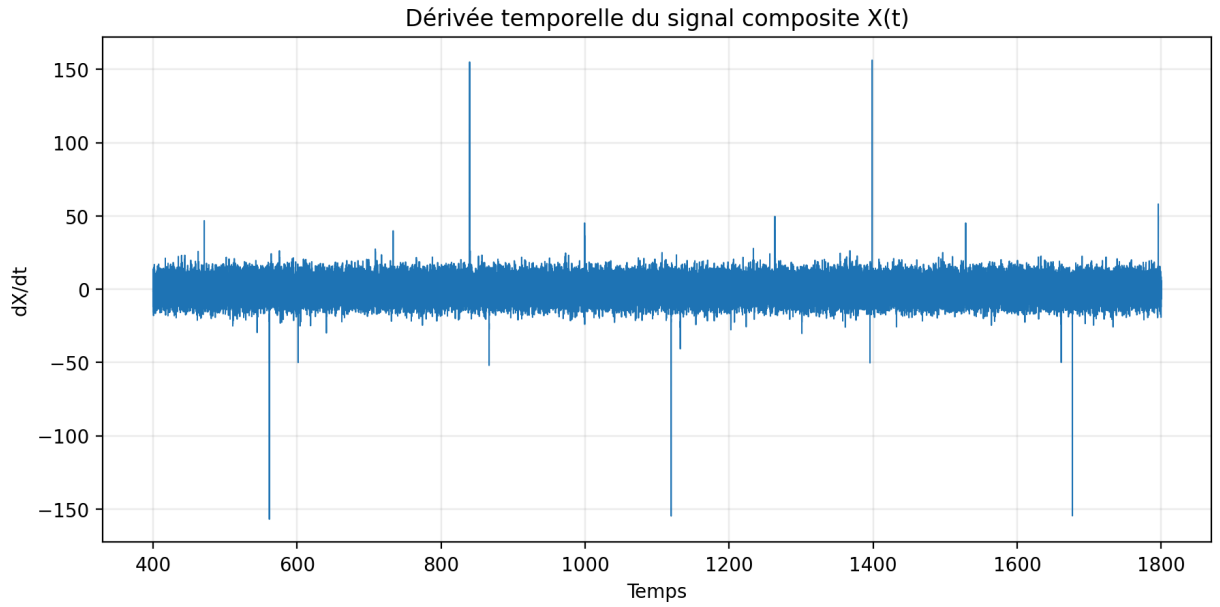


Figure — Dérivée temporelle du signal multiscalaire. Les bouffées de forte amplitude traduisent les transitions rapides entre régimes.

Pour rendre cette intermittence encore plus visible, on considère le carré de la dérivée. Cette quantité est toujours positive et peut être lue comme une intensité locale d'activité : en mécanique ou en turbulence, elle joue un rôle analogue à une énergie de fluctuation ; en finance, elle est proche d'un indicateur instantané de volatilité.

$$I(t) \;=\; [dX/dt(t)]^2$$

La courbe de I(t) fait ressortir très nettement des périodes calmes séparées par des pics parfois très élevés. Ces pics correspondent en partie aux grands basculements imposés par les échelles lentes du modèle dyadique, mais un fond plus fin de fluctuations subsiste entre eux. L'intermittence apparaît donc comme une propriété naturelle de la superposition de dynamiques bistables à plusieurs échelles, renforcée par le bruit et la mémoire.

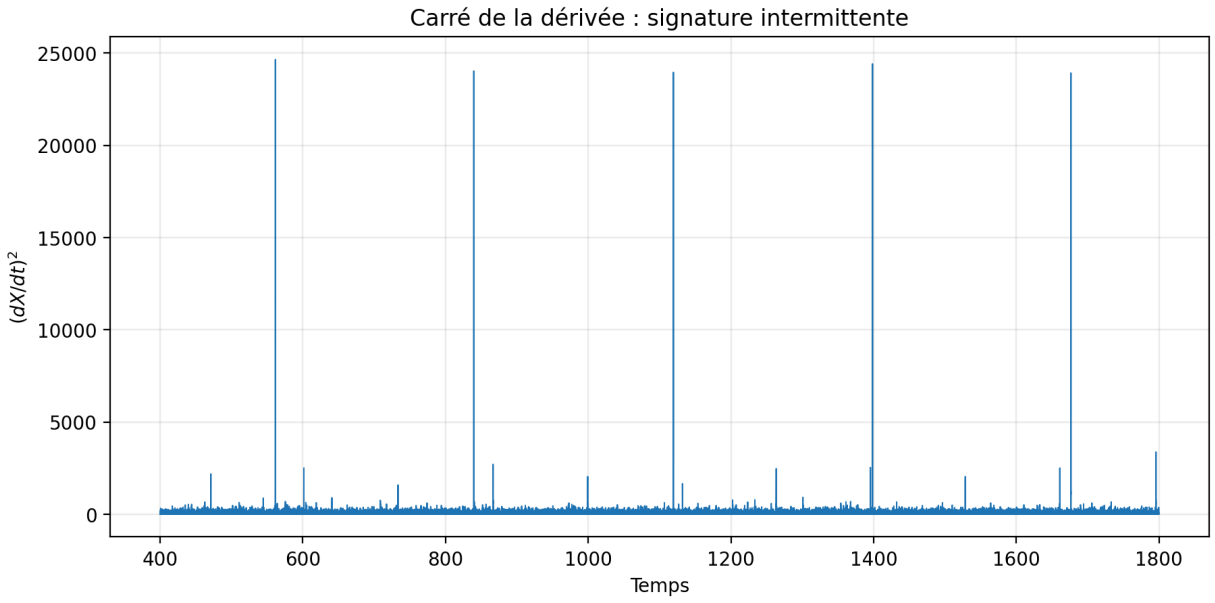


Figure — Carré de la dérivée. Les grandes pointes mettent en évidence la concentration temporelle de l'activité, caractéristique de l'intermittence.

On calcule ensuite l'autocorrélation normalisée de cette intensité I(t). Après centrage, elle s'écrit :

$$\rho_I(\tau) \;=\; \langle [I(t) \;-\; \mu_I][I(t \;+\; \tau) \;-\; \mu_I] \rangle \;/\; \sigma_I^2$$

La représentation en coordonnées log-log de la valeur absolue de cette autocorrélation révèle une décroissance rapide aux faibles retards, suivie d'un niveau faible mais persistant et de réapparitions de corrélation à certaines grandes échelles. L'enveloppe n'est pas une droite parfaite sur toute la gamme : on ne peut donc pas conclure à une loi de puissance unique. Elle suggère néanmoins que l'intensité des fluctuations possède une mémoire beaucoup plus structurée que la dérivée elle-même.

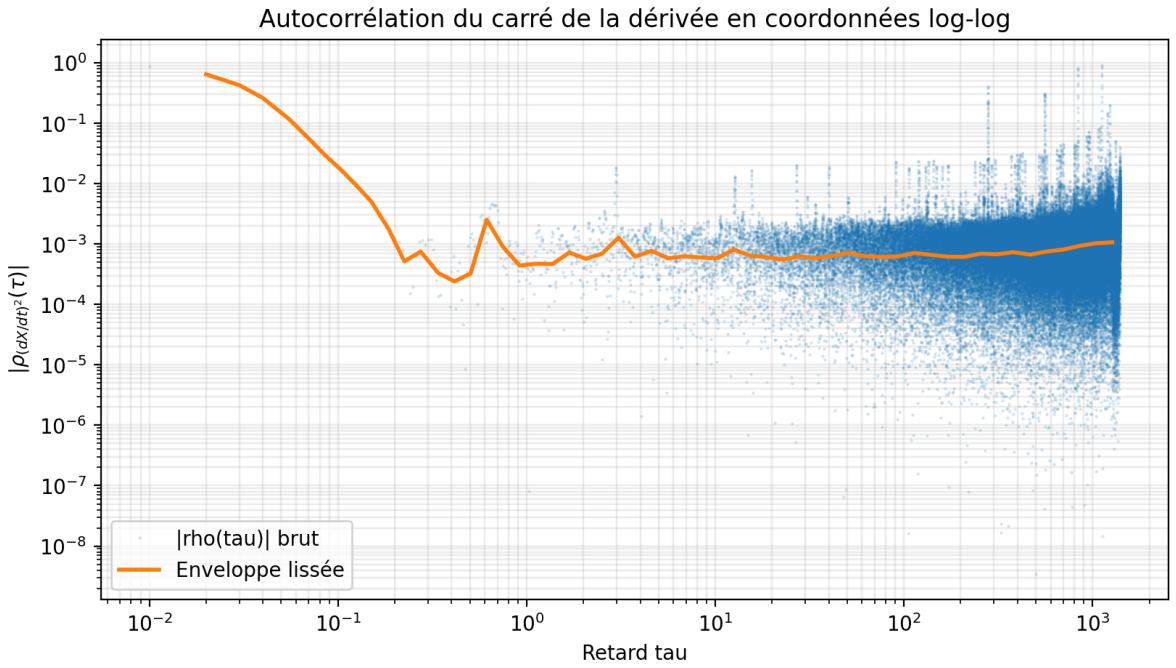


Figure — Enveloppe log-log de l'autocorrélation du carré de la dérivée. La persistance de corrélations faibles à grands retards évoque une mémoire étendue, mais les grandes périodes dyadiques contribuent aussi à cette structure.

Ce résultat est important pour l'interprétation du modèle. La dérivée dX/dt est presque décorrélée à court terme, ce qui rapproche le changement instantané d'un bruit rapide. En revanche, son amplitude — mesurée ici par (dX/dt)² — est regroupée en paquets et conserve des traces à des retards beaucoup plus longs. On retrouve ainsi qualitativement une séparation souvent observée dans les systèmes intermittents : le signe des fluctuations peut perdre rapidement sa mémoire, tandis que leur intensité reste organisée sur des échelles temporelles plus longues.

Il faut toutefois distinguer deux origines possibles de cette persistance. Une partie provient de la mémoire longue explicitement introduite dans chaque sous-système ; une autre est créée par la hiérarchie dyadique des périodes, qui génère mécaniquement des récurrences autour des grandes échelles. L'autocorrélation log-log constitue donc ici une signature suggestive de mémoire longue, et non une preuve indépendante. Pour démontrer une véritable loi de mémoire longue, il faudrait compléter l'analyse par un ajustement de type ρ(τ) ~ τ^(−γ), une DFA ou une estimation de Hurst sur des simulations plus longues et sur plusieurs réalisations.

$$\rho_I(\tau) \ \sim \ \tau\text{^}(-\ \gamma) \ \ (hypothèse\ à\ tester)$$

Cette lecture complète la chaîne déjà obtenue : X(t) porte la structure multiscalaire et un autospectre proche de 1/f² ; dX/dt est beaucoup plus proche d'un bruit court ; enfin, (dX/dt)² fait réapparaître l'intermittence et une organisation temporelle à plus longue portée. Le modèle produit donc simultanément une structure de type log-indice, des changements rapides faiblement corrélés et une intensité de fluctuations organisée par paquets.

13. Bibliographie commentée et filiation du modèle

13.1. Marchés financiers : agents, foule, bistabilité et transition de régime

D'Hulst, R. & Rodgers, G. J. (1999). Exact Solution of a Model for Crowding and Information Transmission in Financial Markets. arXiv:cond-mat/9908481. Ce travail relie la formation de groupes d'agents partageant l'information à une distribution d'amas et à des variations de prix à queues lourdes. Il fournit un point de départ microscopique pour l'idée que la structure collective des agents peut façonner le signal de marché.

D'Hulst, R. & Rodgers, G. J. (2000). Transition from Coherence to Bistability in a Model of Financial Markets. arXiv:nlin/0008008. Référence la plus directement apparentée à notre modèle financier : les auteurs obtiennent une transition entre un état cohérent et un équilibre bistable avec ségrégation spontanée de la population d'agents. Notre double puits peut être lu comme une représentation phénoménologique de cette coexistence de régimes.

Sornette, D. (2000). Stock Market Speculation: Spontaneous Symmetry Breaking of Economic Valuation. arXiv:cond-mat/0004001. Sornette transpose explicitement le vocabulaire de la brisure spontanée de symétrie et des transitions de phase à la valorisation financière. Cette référence donne un sens précis à l'emploi d'un paramètre d'ordre et d'un paramètre de contrôle en finance, tout en rappelant qu'il s'agit d'une analogie structurale, non d'une identité avec la thermodynamique.

Sornette, D. & Malevergne, Y. (2001). From Rational Bubbles to Crashes. arXiv:cond-mat/0102305. Les auteurs relient bulles, crashes, lois de puissance et brisure de symétrie dans des modèles stochastiques. Cette approche est utile pour comprendre comment un changement de régime collectif peut coexister avec des fluctuations fortes et des distributions non gaussiennes.

13.2. Cycles historiques : rétroactions, cycles séculaires et bifurcations

Goldstone, J. A. (1991). Revolution and Rebellion in the Early Modern World. University of California Press. Ouvrage fondateur de la théorie démographique-structurelle. Goldstone met en relation croissance démographique, pression sur les ressources, divisions des élites et crise fiscale. Il fournit le mécanisme de lente accumulation des contraintes qui prépare les ruptures politiques.

Turchin, P. (2003). Historical Dynamics: Why States Rise and Fall. Princeton University Press. Turchin transpose à l'histoire les outils de la dynamique non linéaire. L'intérêt pour notre modèle tient moins à l'existence d'un cycle déterminé qu'au principe suivant : des oscillations peuvent émerger de rétroactions internes entre variables sociales.

Turchin, P. & Nefedov, S. A. (2009). Secular Cycles. Princeton University Press. Étude quantitative de cycles longs dans plusieurs sociétés agraires. Population, salaires, élites, finances publiques et instabilité sont suivis conjointement. Cette approche soutient notre idée que les grandes temporalités historiques peuvent être produites par l'interaction de sous-systèmes ayant leurs propres temps de relaxation.

Turchin, P. (2012). Dynamics of Political Instability in the United States, 1780–2010. Journal of Peace Research, 49(4), 577–591. DOI: 10.1177/0022343312442078. Cette étude est particulièrement importante pour notre construction multiscalaire : l'analyse spectrale détecte une oscillation séculaire sur laquelle se superpose une oscillation d'environ cinquante ans. Elle fournit un exemple empirique de plusieurs temporalités historiques coexistantes.

Wittmann, L. & Kuehn, C. (2024). The Demographic-Wealth Model for Cliodynamics. PLOS ONE, 19(4), e0298318. DOI: 10.1371/journal.pone.0298318. Référence moderne très pertinente : les auteurs construisent un modèle démographie-richesse et utilisent explicitement l'analyse de bifurcations, notamment des bifurcations de Hopf, pour expliquer l'apparition de comportements périodiques et de cycles limites. Elle montre que la théorie des bifurcations constitue aujourd'hui un outil légitime de la cliodynamique.

13.3. Position du présent modèle par rapport à cette littérature

La littérature financière apporte les notions de comportement de foule, d'agents binaires ou concurrents, de bistabilité et de transition de régime. La littérature cliodynamique apporte les rétroactions lentes, les cycles endogènes, l'existence de plusieurs temporalités superposées et l'analyse de bifurcations. Le modèle développé ici les réunit dans une écriture volontairement minimale : un potentiel bistable définit deux organisations possibles, une variable lente incline le paysage, le bruit rend les transitions probabilistes, la mémoire introduit l'histoire du système et la distribution des valeurs de a construit une hiérarchie d'échelles.

Aucune des références citées ne constitue, à elle seule, la validation de cette construction appliquée au CAC40 ou au couple fonctionnel « pionniers-colons ». La proposition doit donc être considérée comme une hypothèse de modélisation. Sa valeur scientifique dépendrait d'une étape ultérieure : définir des observables mesurables pour x et h, estimer les paramètres sur des séries réelles, vérifier la stabilité des bifurcations et comparer les prédictions du modèle à des modèles concurrents. C'est précisément cette possibilité de confrontation aux données qui transforme l'analogie en programme de recherche.

Conclusion : une architecture de modélisation plutôt qu'une analogie unique

Le parcours suivi part d'une idée classique de la physique statistique : une variable d'ordre résume un grand nombre de degrés de liberté et évolue dans un paysage effectif. Le potentiel de Landau donne la forme minimale d'une transition symétrique ; la dynamique de gradient introduit la relaxation ; le bruit réintroduit les fluctuations ; le noyau mémoire restitue l'influence des variables éliminées.

Pour produire un véritable balancier, le potentiel doit être incliné par une variable lente. Le modèle obtenu combine alors double puits, rétroaction lente et basculements par selle-nœud. Il constitue un cadre phénoménologique simple pour réfléchir à des alternances collectives : acheteurs/vendeurs sur un marché, ou modes pionnier/colon dans une représentation abstraite des cycles historiques.

Le paramètre a acquiert ensuite un rôle supplémentaire : il règle simultanément l'amplitude, la profondeur du potentiel et l'échelle de temps. Une famille dyadique de valeurs de a crée donc une hiérarchie de cycles. Leur superposition, avec des amplitudes et phases différentes, suffit à produire un signal riche dont l'autospectre présente ici une enveloppe proche de 1/f^2,2. L'ajout de mémoire longue transforme l'organisation temporelle mais ne change que faiblement cet exposant dans le jeu de paramètres étudié.

La portée principale de ce modèle est méthodologique. Il suggère qu'un signal complexe peut être lu comme la superposition de régimes bistables répartis sur plusieurs échelles, plutôt que comme la manifestation d'un bruit sans structure. Pour le CAC40 comme pour les cycles historiques, cette hypothèse doit être confrontée aux données : estimation de variables d'ordre, identification des temps, tests de

stationnarité, distributions de durées, Hurst, DFA, cohérence inter-échelles et comparaison de modèles. Le modèle devient alors une hypothèse falsifiable, et non une métaphore.

Annexe — Système minimal utilisé dans les simulations

$$V(x,h) = x\text{^}4/4 - (a/2)x\text{^}2 + hx$$

$$dx/dt = a\,x - x\text{^}3 - h - \kappa\, m(t) + \sigma\,\xi(t)$$

$$\tau_h\, dh/dt = x - \lambda\, h$$

$$m(t) = \int_0\text{^}t\, K(t - s)x(s)\, ds$$

$$K_exp(t) \propto exp(-\, t/\tau_m)$$

$$K_long(t) \propto t\text{^}(-\, \alpha)$$

$$X_global(t) = (1/N)\, \Sigma_i\, c_i\, X_(a_i)(t - \varphi_i)$$

$$S(f) \propto f\text{^}(-\, \beta)$$