Détecter et estimer une dynamique chaotique noyée dans le bruit

Une chaîne data science fondée sur la reconstruction de phase, les récurrences, la prédiction locale et la Dynamic Mode Decomposition

Étude pédagogique sur le système de Lorenz — simulations Monte Carlo sur 1000 conditions initiales

Document de synthèse construit à partir des simulations et échanges précédents

Résumé

Ce document développe une démarche complète de détection puis d'estimation d'un signal chaotique inconnu noyé dans un bruit blanc gaussien. Le laboratoire d'étude est le système de Lorenz, dont les trois coordonnées sont combinées linéairement pour produire une seule série temporelle scalaire. L'attracteur n'est ensuite plus supposé connu : on ne s'autorise que des outils intrinsèques au signal observé. La progression suit quatre idées : caractériser un temps propre de la dynamique par autocorrélation, reconstruire un espace des phases par retards, détecter une organisation déterministe par récurrence, prédiction locale et DMD, puis utiliser la DMD comme estimateur compact du signal caché. Les performances sont étudiées par Monte Carlo sur 1000 conditions initiales et en fonction du rapport signal/bruit et de la longueur de la fenêtre d'observation.

Fil directeur — La question n'est pas de reconnaître Lorenz. Elle est de savoir si une série bruitée contient une dynamique cohérente de faible dimension, puis d'en extraire une approximation utile sans connaître les équations qui l'ont produite.

Plan du document

1. Le laboratoire : du système de Lorenz à un signal scalaire bruité
2. Le temps caractéristique révélé par l'autocorrélation
3. Reconstruire un espace des phases à partir d'une seule mesure
4. Détecter une structure inconnue : prédiction, récurrence et dimension
5. La DMD comme détecteur modal
6. La DMD comme estimateur du signal caché
7. Influence du SNR et de la durée d'observation
8. Une chaîne détection + estimation pour la data science
9. Limites, précautions et extensions
10. Bibliographie détaillée et commentée

1. Le laboratoire : du système de Lorenz à un signal scalaire bruité

Le système de Lorenz est choisi comme laboratoire parce qu'il est suffisamment simple pour être simulé sans ambiguïté, mais suffisamment riche pour produire une dynamique chaotique à faible dimension. Dans toute l'étude, les paramètres classiques sont utilisés : σ=10, ρ=28 et β=8/3. Pour une condition initiale donnée, l'évolution est déterministe ; seule la sensibilité aux conditions initiales rend la trajectoire rapidement imprévisible à long terme.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

Pour se rapprocher d'un problème réel de data science, on suppose que l'on n'observe pas directement les trois coordonnées. On construit une mesure scalaire par combinaison linéaire :

$$X(t) = a\,x(t) + b\,y(t) + c\,z(t)$$

Dans les simulations : a=1, b=0,5 et c=−0,25. La composante continue est ensuite retirée, de sorte que X(t) représente uniquement la partie fluctuante. Son écart-type σL devient l'échelle naturelle du problème. Le bruit blanc gaussien B(t) est réglé par un facteur K :

$$\sigma B = K\,\sigma L$$

$$Y(t) = X(t) + B(t)$$

$$SNRdB = -20\,log10(K)$$

Ainsi K=0,5 correspond à environ +6,02 dB. Le choix de cette normalisation est pratique : le même paramètre K garde la même signification lorsque la condition initiale change, car le bruit est toujours exprimé relativement à l'énergie statistique du signal propre associé.

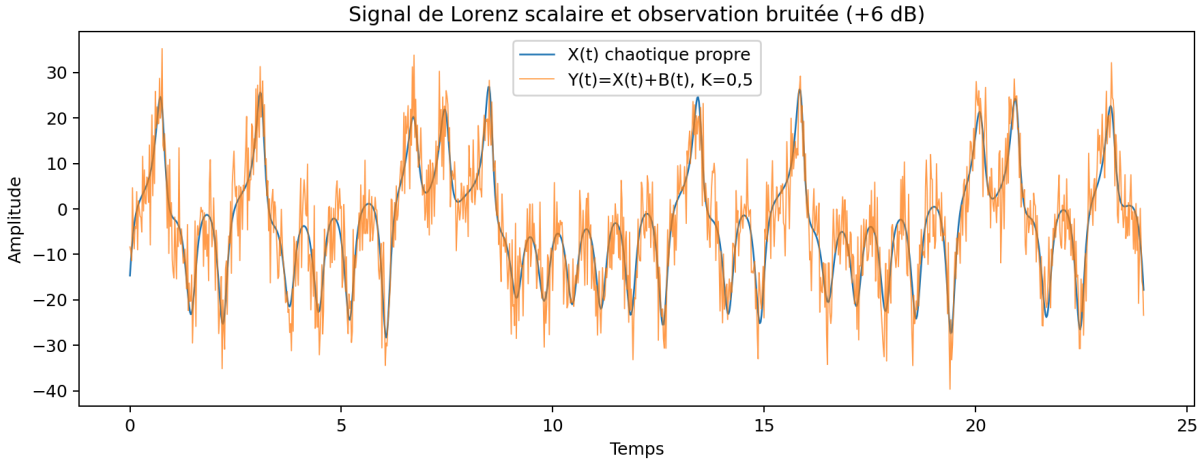


Figure 1 — Signal chaotique scalaire X(t) et signal observé Y(t)=X(t)+B(t) pour K=0,5 (+6 dB).

Sur le tracé temporel, la présence de la dynamique reste intuitivement visible à +6 dB, mais cette appréciation visuelle ne constitue pas un détecteur. Toute la suite consiste justement à remplacer le regard humain par des invariants ou quasi-invariants calculables : mémoire temporelle, récurrence, prédictibilité locale et modes dynamiques.

2. Le temps caractéristique révélé par l'autocorrélation

Avant de chercher le chaos, il est utile de mesurer la vitesse avec laquelle le signal oublie son passé. L'autocorrélation normalisée est la première grandeur naturelle. Pour un retard τ, elle compare X(t) à X(t+τ).

$$\rho X(\tau) = E[(X(t) - X)(X(t+\tau) - X)] / Var(X)$$

Un temps de décorrélation simple est défini par le premier retard pour lequel ρX passe sous 1/e. Ce choix n'est pas une constante universelle : il fournit un ordre de grandeur robuste, facilement interprétable et compatible avec l'idée d'un temps de mémoire du processus.

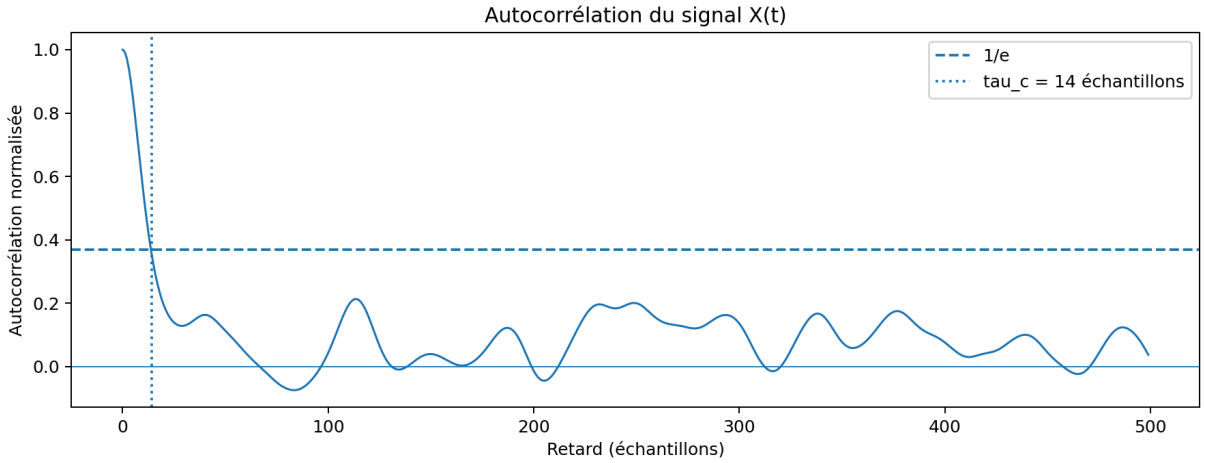


Figure 2 — Fonction d'autocorrélation sur 2048 échantillons. Le premier passage sous 1/e donne τc≈14 échantillons pour cette réalisation.

Après la chute initiale, l'autocorrélation ne reste pas nulle : elle présente des oscillations secondaires liées aux retours et aux temps de séjour sur les deux ailes de l'attracteur. C'est déjà un indice que le signal ne se comporte pas comme un bruit blanc, dont la corrélation disparaîtrait presque immédiatement hors du retard nul.

2.1 Validation par Monte Carlo sur les conditions initiales

Le temps caractéristique ne doit pas dépendre de la trajectoire particulière si l'on veut en faire une propriété du régime dynamique. Un Monte Carlo sur 1000 conditions initiales, après suppression d'un transitoire, donne une distribution très concentrée : médiane 14 échantillons, P5=13 et P95=16. L'écart-type est d'environ 2,9 échantillons.

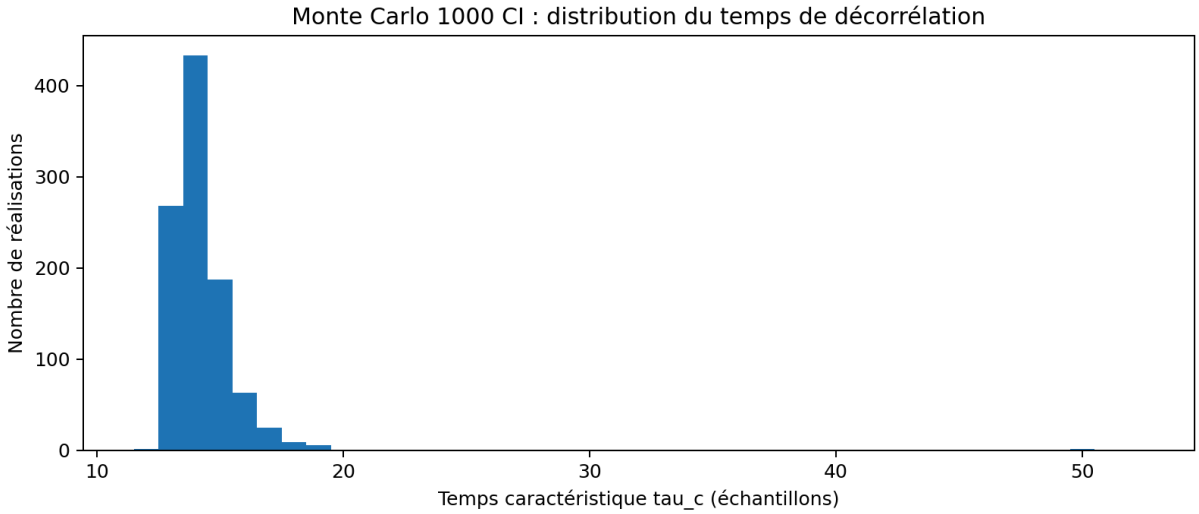


Figure 3 — Histogramme du temps de décorrélation sur 1000 conditions initiales.

$$\tau c, 50 \approx 14 \text{ échantillons} \approx 0,28 \text{ unité de temps}$$

Ce résultat est important : des trajectoires qui divergent exponentiellement à cause du chaos partagent pourtant une statistique temporelle stable. Le temps de corrélation devient donc un des nombres caractéristiques du régime permanent. Il permet aussi de convertir la longueur d'une fenêtre brute N en un nombre grossier de temps dynamiques effectivement observés :

$$\Theta = N / \tau c$$

Pour N=2048 et τc≈14, Θ est de l'ordre de 146. L'expérience DMD montrera qu'une fenêtre couvrant plusieurs dizaines de temps caractéristiques suffit souvent à stabiliser les estimations, alors qu'une fenêtre couvrant seulement deux ou trois temps caractéristiques est beaucoup plus fragile.

3. Reconstruire un espace des phases à partir d'une seule mesure

Une seule série temporelle peut contenir l'empreinte d'un attracteur de dimension supérieure. L'idée des coordonnées retardées consiste à remplacer l'état inconnu par un vecteur constitué de valeurs passées ou décalées du même signal. Dans l'esprit du théorème de Takens, une observation scalaire générique peut, sous des hypothèses convenables, reconstruire une géométrie équivalente à celle de l'attracteur.

$$Z(t) = [Y(t), Y(t + \tau), Y(t + 2\tau)]^{\mathrm{T}}$$

Dans l'étude de base, τ=18 échantillons a été retenu pour la reconstruction 3D. L'espace obtenu n'est pas identique aux coordonnées physiques (x,y,z), mais il contient une organisation géométrique qui distingue encore les deux lobes caractéristiques et leurs transitions.

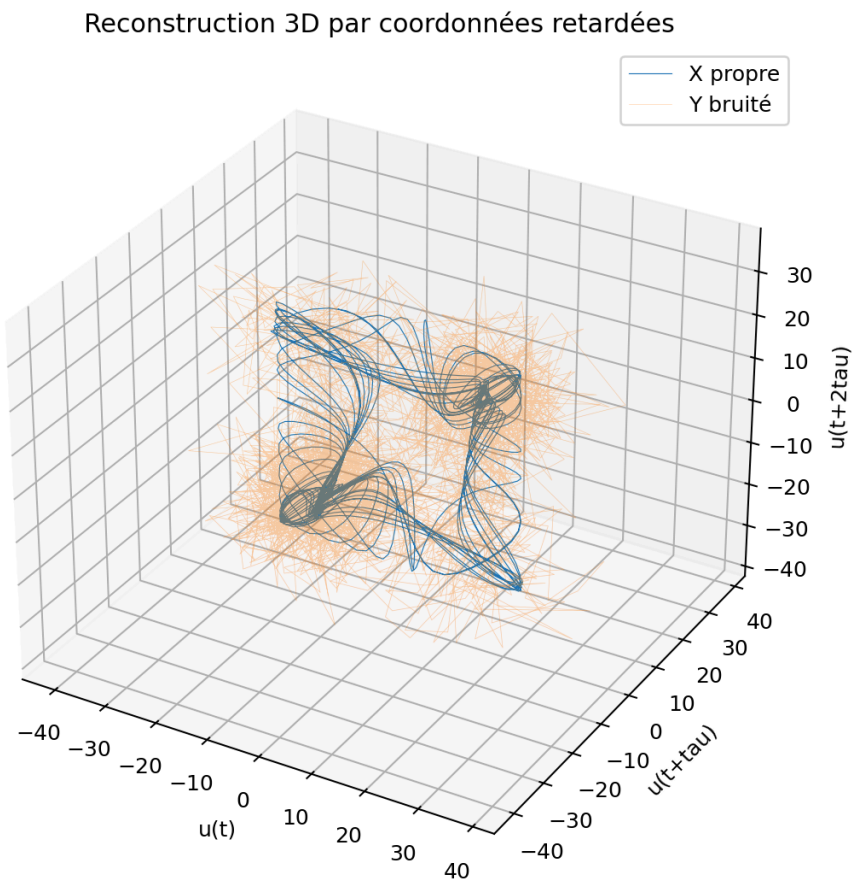


Figure 4 — Reconstruction 3D par coordonnées retardées. Le bruit épaissit la variété mais ne détruit pas totalement sa géométrie à +6 dB.

Cette reconstruction change la nature du problème : au lieu de chercher une forme temporelle connue dans Y(t), on cherche si les états reconstruits vivent sur une structure organisée de faible dimension. C'est ce qui autorise une détection sans connaissance préalable de Lorenz.

4. Détecter une structure inconnue : prédiction, récurrence et dimension

La détection recherchée n'est pas un filtre adapté classique, car la forme d'onde n'est pas connue. Le test conceptuel est plutôt : « cette série contient-elle une dynamique déterministe cohérente, ou est-elle compatible avec un bruit sans structure ? » Plusieurs familles d'indicateurs sont complémentaires parce qu'elles interrogent des propriétés différentes du même objet.

4.1 Prédiction locale : l'irrégulier peut rester localement prévisible

Si deux états reconstruits Zi et Zj sont proches, une dynamique déterministe impose que leurs futurs proches restent, pendant un certain temps, statistiquement reliés. On prédit donc le futur d'un point à partir du futur de ses voisins et on mesure une erreur normalisée.

$$Epred = \langle (Y(t + \Delta) - \hat{Y}(t + \Delta))^2 \rangle / Var(Y)$$

Pour un bruit blanc, le voisin présent n'apporte presque aucune information sur le futur. Dans les simulations, l'erreur du bruit pur se stabilise autour de 2, tandis que celle du signal Lorenz bruité reste

plus faible : le rapport Epred(signal+bruit)/Epred(bruit) vaut environ 0,40 à +6 dB, 0,76 à 0 dB et reste encore inférieur à 1 jusqu'aux faibles SNR.

4.2 Matrices de récurrence : regarder l'organisation des retours

Une matrice de récurrence code les paires d'instants où l'état reconstruit revient dans un même voisinage. Elle ne demande pas de connaître la forme de l'attracteur : elle utilise uniquement les distances entre états de la série elle-même.

$$Rij \ = \ \Theta(\varepsilon \ - \ ||Zi \ - \ Zj||)$$

Un chaos déterministe produit des diagonales et des motifs parce que des états voisins évoluent de façon comparable pendant plusieurs pas. Un bruit blanc produit surtout des points isolés. Deux indices classiques sont le déterminisme DET, lié aux diagonales, et la laminarité LAM, liée aux segments verticaux.

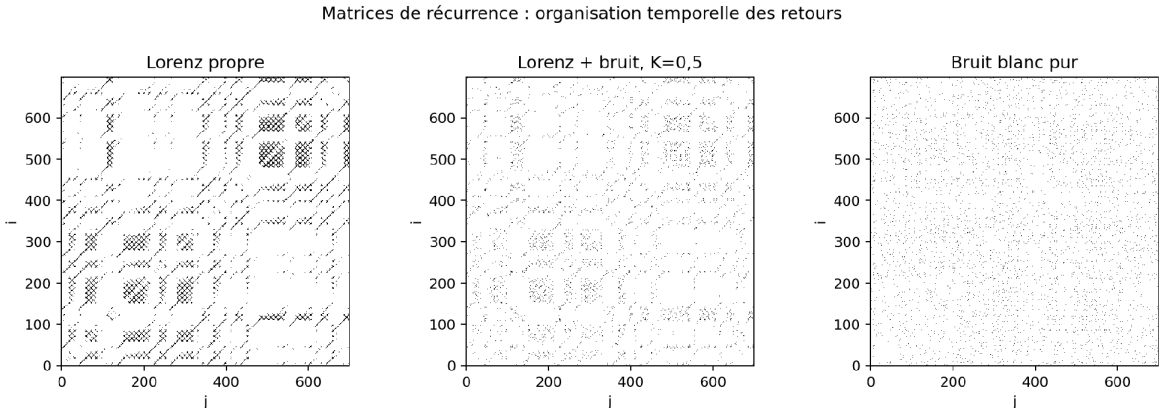


Figure 5 — Matrices de récurrence du signal propre, du signal bruité à +6 dB et d'un bruit blanc pur. Les structures diagonales se raréfient avec le bruit mais restent plus organisées que pour H0.

4.3 Dimension de corrélation : faible dimension contre remplissage volumique

La somme de corrélation C(r) mesure la fraction de paires d'états séparés de moins de r. Une loi d'échelle C(r)≈r^D2 permet d'estimer une dimension de corrélation. Dans un espace d'embedding 3D, un bruit blanc tend vers une dimension voisine de 3, alors qu'un attracteur chaotique de faible dimension reste en dessous.

$$D2 \ \approx \ d \log C(r) \ / \ d \log r$$

Sur le Monte Carlo, la médiane de D2 passe d'environ 1,76 sans bruit à 2,63 pour K=0,5 puis se rapproche de 2,8 lorsque le bruit domine. L'indicateur est cohérent, mais son contraste brut est moins fort que celui des récurrences ou de la prédiction locale.

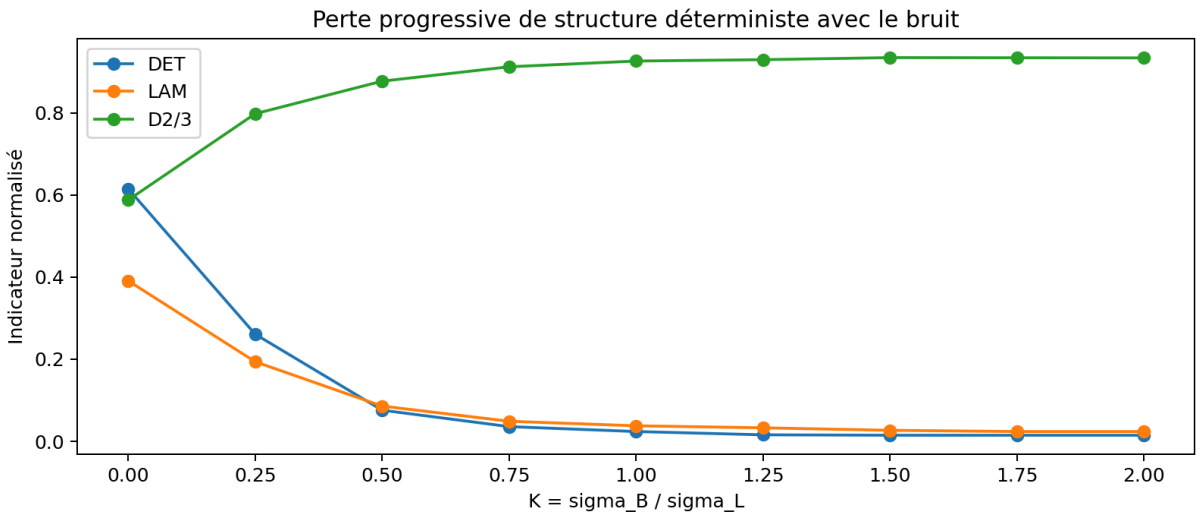


Figure 6 — Évolution médiane de DET, LAM et D2/3 avec K sur 1000 conditions initiales. Le bruit détruit les motifs de récurrence et pousse la dimension vers celle de l'espace d'embedding.

4.4 Entropie de permutation : utile, mais fragile dans ce cas précis

L'entropie de permutation mesure la diversité des motifs d'ordre. Elle distingue très bien le Lorenz propre du bruit pur, mais dans nos données l'addition de bruit blanc fait rapidement tendre l'entropie vers sa valeur maximale. À +6 dB, le rapport d'entropie est déjà proche de 1. Elle reste donc intéressante comme descripteur de complexité, mais moins discriminante que la prédiction locale pour cette chaîne de détection.

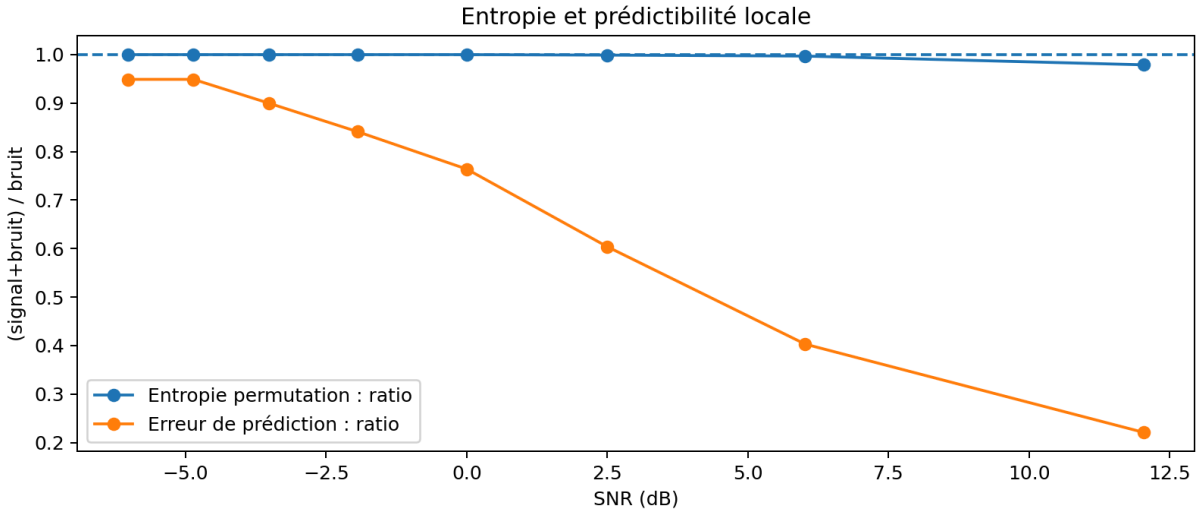


Figure 7 — Rapports au bruit blanc : l'entropie de permutation sature vite, tandis que l'erreur de prédiction conserve un contraste jusqu'aux SNR négatifs.

5. La Dynamic Mode Decomposition comme détecteur modal

La DMD apporte une idée différente : au lieu de résumer la géométrie ou les récurrences, elle cherche un opérateur linéaire qui propage au mieux les états reconstruits d'un pas au suivant. Sur l'espace retardé 3D :

$$Zn + 1 \approx A\,Zn$$

L'opérateur A est estimé par moindres carrés. Ses valeurs propres μi résument des modes dynamiques effectifs. Pour un bruit blanc, les états successifs sont presque sans relation et les valeurs propres DMD restent très proches de l'origine. Pour une dynamique cohérente, elles s'éloignent de l'origine et peuvent se rapprocher du cercle unité.

$$MDMD = max_i\,|\mu i|$$

$$EDMD = \Sigma_i\,|\mu i|^2$$

Ces deux grandeurs deviennent des scores de détection simples et entièrement model-free. Sur 1000 conditions initiales et 1000 bruits par niveau K, le bruit blanc donne MDMD≈0,039 et EDMD≈0,003 presque indépendamment de son amplitude après normalisation.

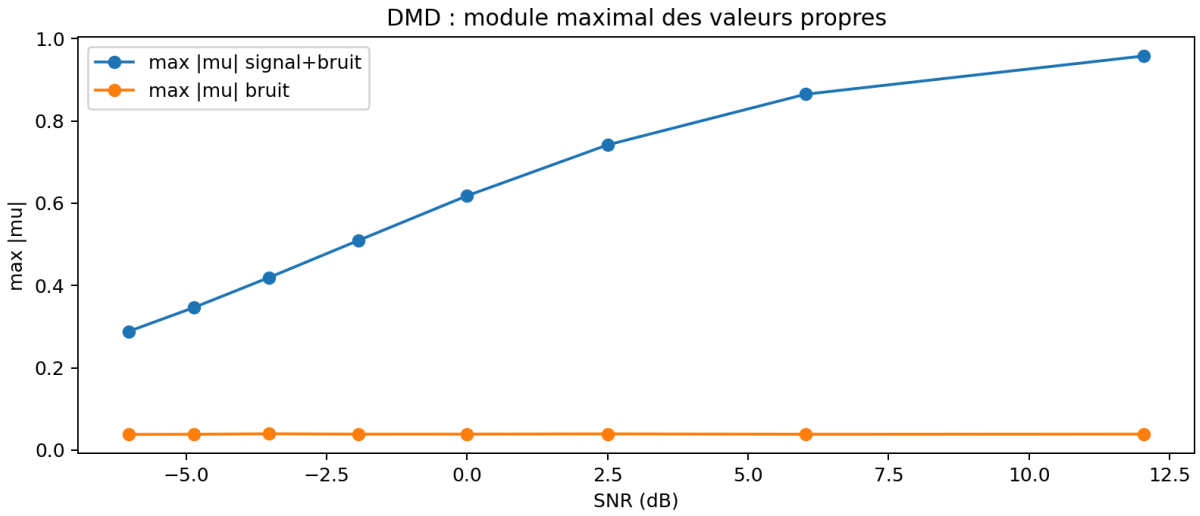


Figure 8 — Module maximal des valeurs propres DMD en fonction du SNR. La dynamique structurée reste nettement séparée du bruit blanc jusqu'à −6 dB.

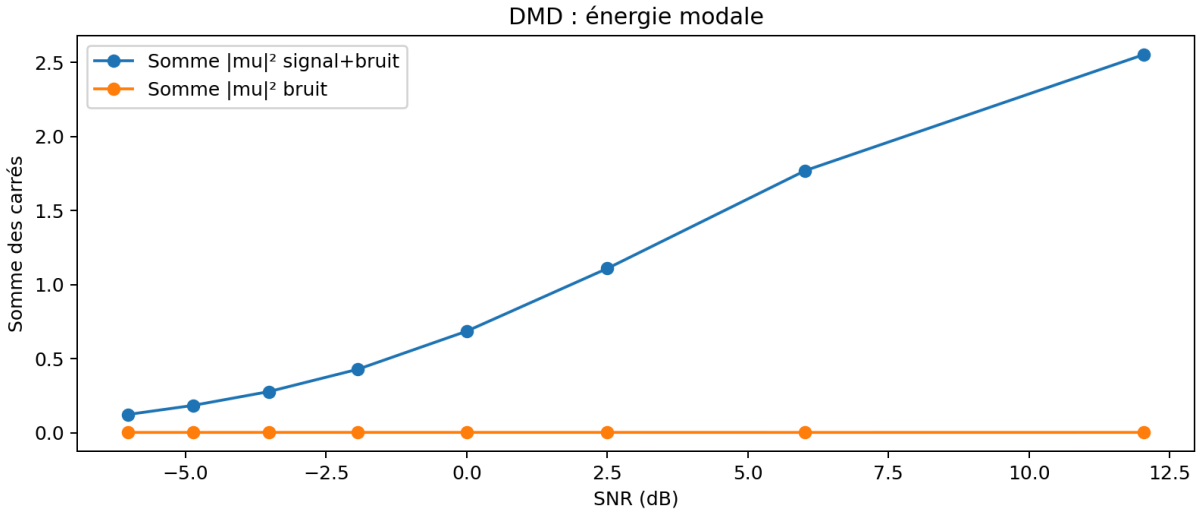


Figure 9 — Somme des carrés des modules DMD. Le contraste modal est encore plus marqué que pour le seul module maximal.

À +6 dB, la médiane de max|μ| vaut environ 0,865 pour Lorenz+bruit contre 0,039 pour le bruit ; le rapport est donc supérieur à 22. À 0 dB, le rapport reste proche de 16 ; à −6 dB, il reste encore autour de 7,5. La somme des carrés est encore plus discriminante dans notre configuration. Il faut toutefois

éviter d'interpréter ces nombres comme des valeurs propres du Jacobien de Lorenz : ce sont les valeurs propres de la dynamique linéaire reconstruite dans l'espace d'observables.

Point de prudence — La DMD ordinaire est biaisée par le bruit de mesure, car les deux matrices de snapshots sont contaminées. Les variantes forward-backward, total least squares ou noise-corrected DMD sont précisément conçues pour réduire ce biais (Dawson et al., 2016 ; Schmid, 2022).

6. La DMD comme estimateur du signal caché

La même DMD qui détecte une cohérence peut servir à reconstruire une approximation du signal. À partir de Zn, on prédit l'état suivant :

$$\hat{Z}n + 1 = \hat{A}\, Zn$$

$$\hat{Y}n + 1 = e1^{T}\, \hat{Z}n + 1$$

On obtient ainsi un estimateur linéaire compact de dimension 3. Il ne reconstitue pas exactement une dynamique non linéaire chaotique, mais il extrait la partie des fluctuations qui est cohérente avec l'évolution moyenne apprise sur la fenêtre.

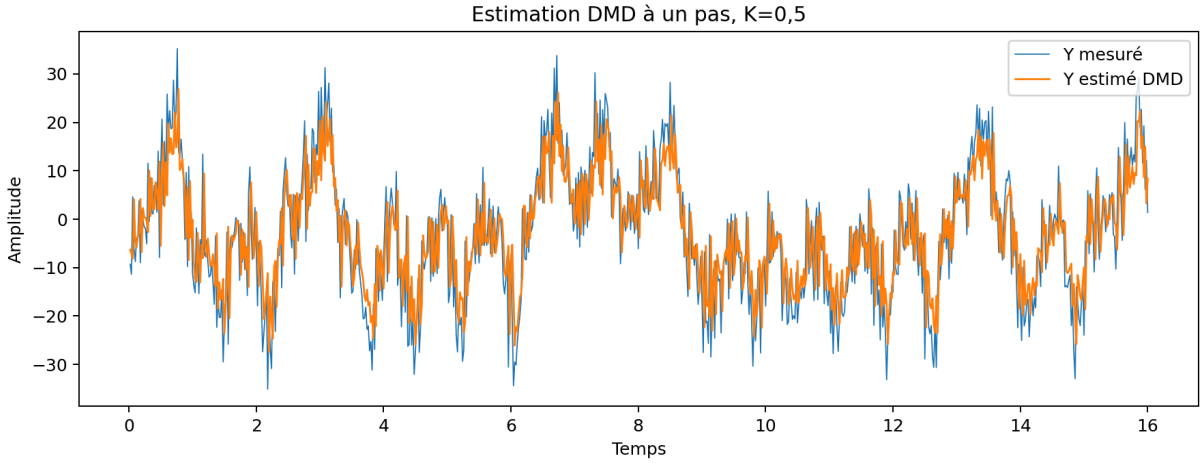


Figure 10 — Signal observé et estimation DMD à un pas pour K=0,5. L'estimation suit la structure principale et atténue les fluctuations non prédictibles.

Sur le jeu initial, l'écart-type du signal observé vaut environ 14,0, celui de l'estimation DMD 11,2 et celui du résidu 8,42. Le bruit réellement injecté a un écart-type voisin de 6,3. La corrélation entre l'estimation et le signal propre atteint environ 0,90.

$$R(t) = Y(t) - \hat{Y}DMD(t)$$

Le résidu n'est pas égal au bruit : il contient aussi la partie de la dynamique chaotique que le modèle linéaire de dimension 3 ne sait pas représenter. C'est pourquoi sa variance est plus grande que celle du bruit injecté.

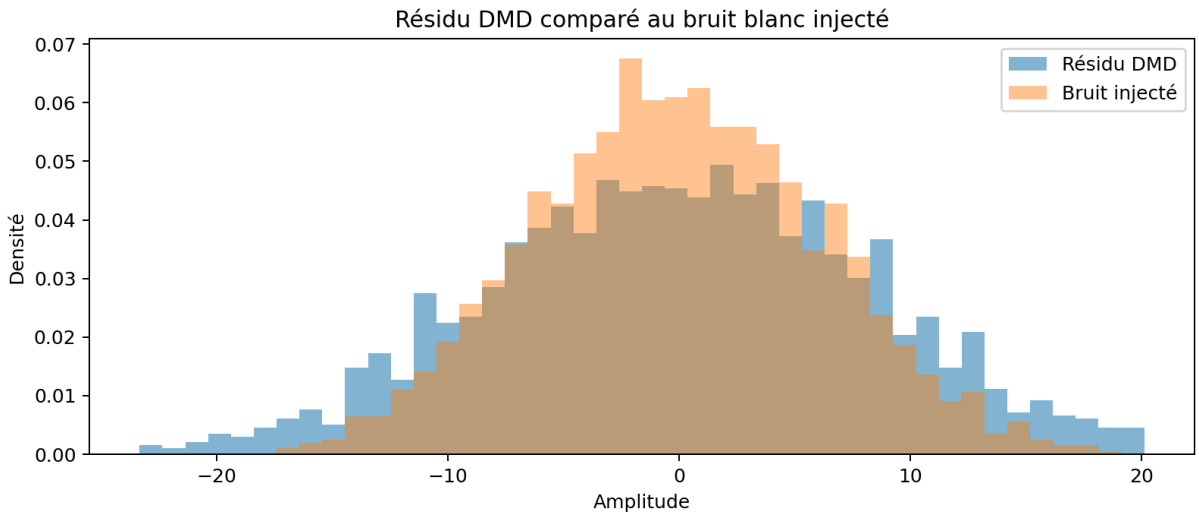


Figure 11 — Histogramme du résidu DMD comparé au bruit blanc injecté. Le résidu est centré mais plus large : bruit + erreur de modèle.

6.1 Performance d'estimation en fonction du SNR

Sur 1000 conditions initiales, l'amplitude reconstruite et la corrélation décroissent continûment lorsque le SNR baisse. À +12 dB, l'écart-type estimé représente environ 96,5 % de l'amplitude vraie et la corrélation est de 0,965. À +6 dB, les deux valent environ 0,894. À 0 dB, la DMD conserve environ 72 % de l'amplitude et une corrélation voisine de 0,72. Même à −6 dB, une structure partielle subsiste.

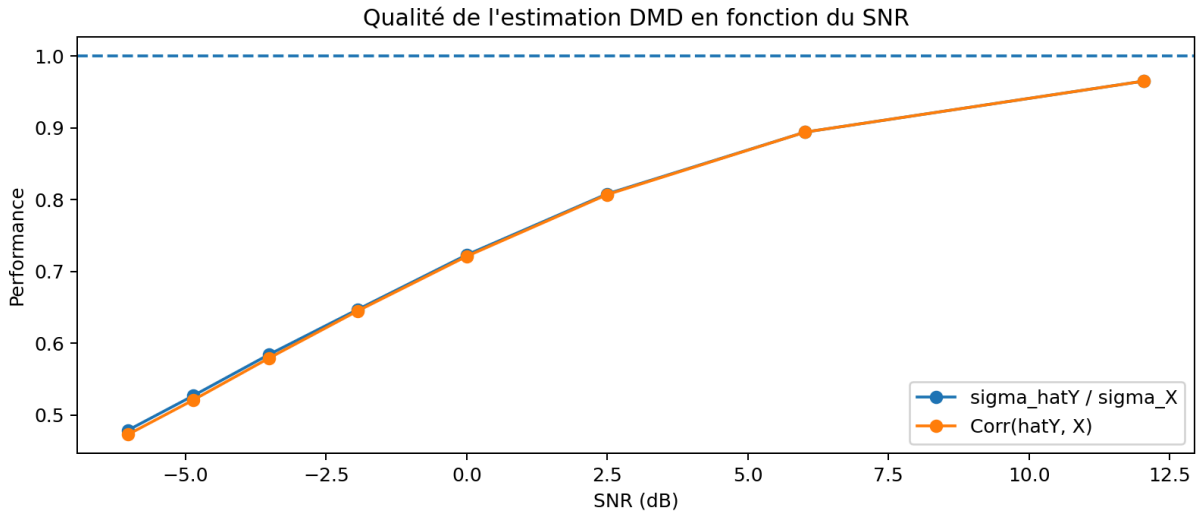


Figure 12 — Qualité de l'estimation DMD : amplitude relative et corrélation au signal propre en fonction du SNR.

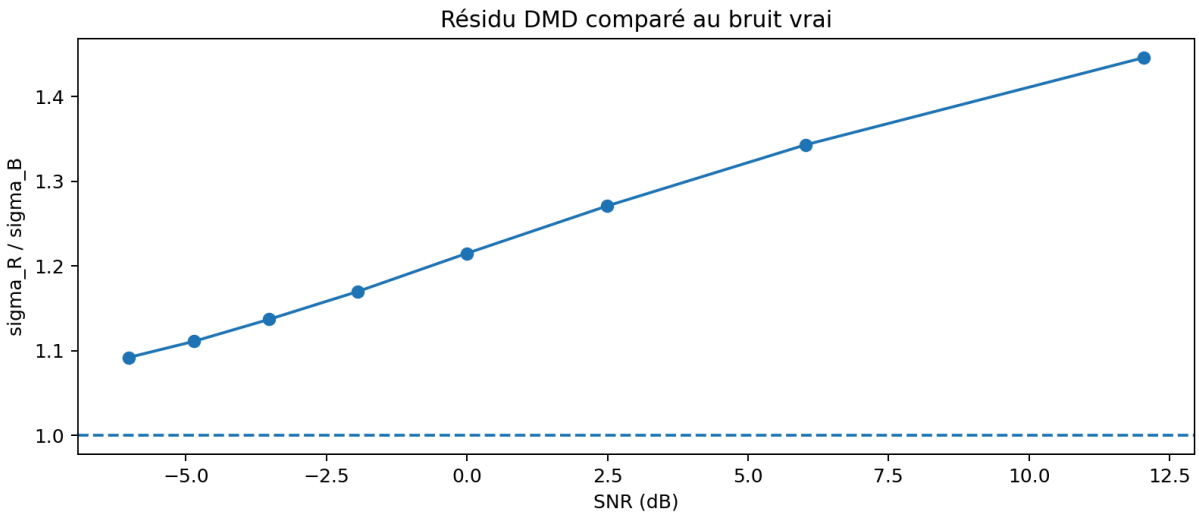


Figure 13 — Écart-type du résidu rapporté à l'écart-type du bruit vrai. Le rapport tend vers 1 lorsque le bruit devient dominant.

7. Influence du SNR et de la durée d'observation

Une estimation dynamique n'est pas définie uniquement par le SNR. Elle dépend aussi de la durée pendant laquelle le processus est observé. Les matrices DMD sont des moyennes empiriques construites à partir de couples successifs d'états ; plus la fenêtre est longue, plus ces moyennes se stabilisent, à condition que la dynamique soit stationnaire et suffisamment mélangeante.

$$\hat{A} \;=\; (\Sigma\, Zn \;+\; 1\, Zn^{\mathrm{T}})(\Sigma\, Zn\, Zn^{\mathrm{T}})^{-1}$$

La loi des grands nombres classique doit ici être remplacée par une loi ergodique : les points ne sont pas indépendants, mais les moyennes temporelles peuvent converger vers des moyennes statistiques lorsque le système explore son attracteur. Un nombre d'observations indépendantes effectives peut être approximé à partir du temps de corrélation.

$$Neff \;\approx\; N\,/\,(1 \;+\; 2\,\Sigma k\,\rho(k))$$

Une approximation encore plus intuitive est Neff≈N/τc en unités d'échantillons. Sous des hypothèses de mélange, l'incertitude statistique d'un estimateur de moyenne ou de covariance décroît typiquement comme 1/√Neff. La DMD ajoute cependant un biais de modèle et un biais de bruit, qui ne disparaissent pas nécessairement lorsque N devient grand.

$$MSE(N,K) \;\approx\; B(K)^2 \;+\; C(K)/Neff$$

Lecture de la formule — Le terme C/Neff représente la variance statistique réduite par une longue observation. Le terme B(K) représente ce qui reste : bruit dans les deux jeux de snapshots, sous-modélisation par un espace de dimension 3, non-linéarité et éventuelle non-stationnarité.

7.1 Simulation N = 32 à 2048

Une étude Monte Carlo a été menée pour N=32, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048. Pour pouvoir inclure N=32 tout en gardant une reconstruction 3D, un retard commun τ=4 échantillons a été utilisé dans cette expérience. Il ne faut donc pas comparer directement les valeurs absolues à celles de la simulation τ=18 ; l'objectif est ici d'isoler l'effet de la longueur d'observation.

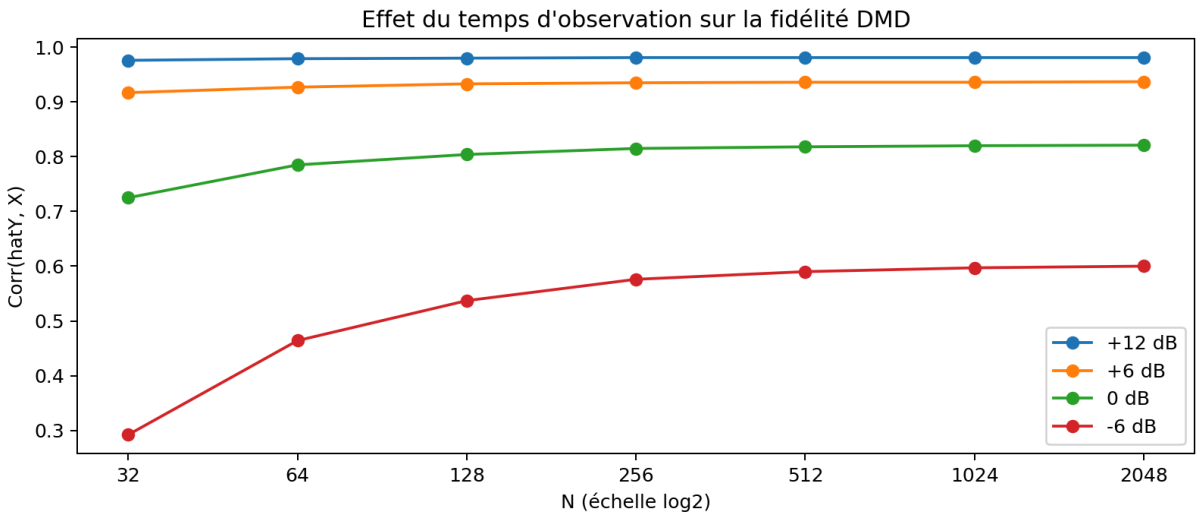


Figure 14 — Corrélation estimation DMD / signal vrai en fonction de N (axe logarithmique) pour plusieurs SNR.

À bon SNR, le plateau est atteint très vite : +12 dB donne déjà une corrélation proche de 0,98 avec seulement 32 points. À +6 dB, 64 à 128 points récupèrent l'essentiel du bénéfice. À 0 dB, la progression devient plus lente : de 0,725 à N=32 à environ 0,82 à N=2048. À −6 dB, la durée d'observation est décisive : la corrélation passe d'environ 0,29 à 0,60.

Le résultat suggère un principe général : plus le signal est faible, plus le détecteur-estimateur doit accumuler plusieurs temps de corrélation pour séparer la cohérence dynamique du bruit. La variable naturelle n'est donc pas seulement N, mais $\Theta = N/\tau_c$.

8. Une chaîne détection + estimation pour la data science

Les expériences précédentes conduisent à une architecture simple et générale. Elle ne suppose ni l'équation de Lorenz ni la géométrie de son attracteur. Elle traite une série temporelle comme la trace d'un processus dynamique caché.

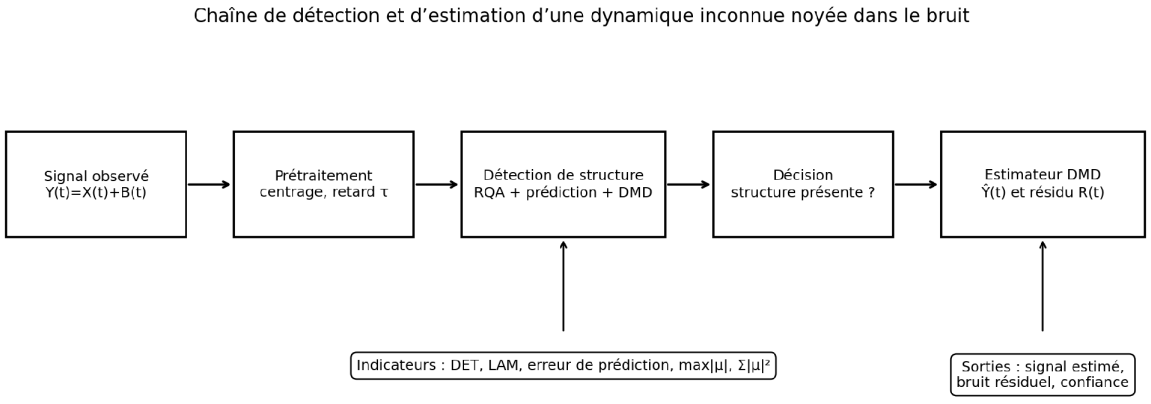


Figure 15 — Schéma bloc de la chaîne détection + estimation.

La première étape est un prétraitement minimal : centrage, choix d'un retard et construction d'un espace d'observation de petite dimension. La seconde étape cherche des indices de structure. RQA vérifie

l'organisation des retours ; la prédiction locale vérifie qu'un état contient de l'information sur son futur ; la DMD vérifie qu'une propagation modale cohérente existe. Ces indicateurs peuvent être fusionnés dans un score ou un classifieur léger.

Lorsque la présence de structure est jugée plausible, la DMD fournit directement un estimateur du signal cohérent et un résidu. On obtient alors quatre sorties utiles : une décision de présence, des indicateurs de confiance, un signal reconstruit et un bruit résiduel. Cette chaîne se prête à de nombreuses applications de data science : détection d'anomalies dynamiques, maintenance conditionnelle, séries industrielles, RF/radar, biomédical, finance ou géophysique.

Originalité pédagogique — La démarche ne demande pas de choisir entre "signal" et "modèle". Elle construit progressivement le modèle à partir des données : mémoire → géométrie retardée → cohérence temporelle → modes → estimation. Le même objet DMD sert à la fois de descripteur spectral et d'estimateur.

9. Limites, précautions et extensions

- Le système de Lorenz est un laboratoire à faible dimension. Des systèmes réels peuvent être multivariés, non stationnaires ou dominés par plusieurs échelles de temps.
- La reconstruction 3D est volontairement minimaliste. Hankel-DMD, delay-DMD ou EDMD peuvent augmenter la richesse de l'espace d'observables.
- La DMD ordinaire traite asymétriquement le bruit dans les deux matrices de snapshots. Les variantes tlsDMD, forward-backward DMD et noise-corrected DMD sont plus adaptées aux mesures fortement bruitées.
- La dimension de corrélation est très sensible à la longueur des données, au bruit, au choix de la zone d'échelle et à la dimension d'embedding. Elle est préférable comme indicateur comparatif que comme "mesure absolue" sur 2048 points.
- Les récurrences dépendent du seuil ε et du Theiler window. Les méthodes averaged-RQA et les approches par micro-états réduisent cette sensibilité.
- L'entropie de permutation simple s'est montrée peu discriminante dès +6 dB dans cette configuration ; des variantes multi-échelles, pondérées ou combinées à des surrogates peuvent être plus robustes.
- La performance doit être considérée comme une surface f(SNR, N, m, τ), et non comme une propriété d'un seul algorithme.

Une extension particulièrement naturelle serait de remplacer le bruit blanc par un bruit coloré ou un clutter dynamique. Le bruit blanc constitue un H0 commode mais favorable : il est sans mémoire et la DMD le repousse fortement vers l'origine. Un clutter corrélé peut lui-même produire des modes DMD, ce qui rend la séparation plus réaliste et plus difficile — précisément le type de problème rencontré en radar, en vibration industrielle ou en données biologiques.

10. Bibliographie détaillée et commentée

1. Lorenz, E. N. (1963). "Deterministic Nonperiodic Flow", Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 130–141.

Texte fondateur du système utilisé comme laboratoire. Il montre comment un système différentiel très simple peut produire une sensibilité aux conditions initiales et une dynamique apériodique déterministe.

2. Takens, F. (1981). "Detecting strange attractors in turbulence", in Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics 898.

Référence fondatrice pour la reconstruction d'un espace des phases à partir d'une observation scalaire par coordonnées retardées. Le document utilise cette idée comme principe géométrique, sans prétendre satisfaire toutes les conditions théoriques du théorème sur des données bruitées et finies.

3. Grassberger, P. & Procaccia, I. (1983). "Measuring the strangeness of strange attractors", Physica D, 9, 189–208.

Référence classique pour la dimension de corrélation. Elle justifie l'emploi de la loi C(r)~r^D2 et rappelle que la dimension est une propriété d'échelle, pas un simple nombre extrait mécaniquement.

4. Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O. & Ruelle, D. (1987). "Recurrence Plots of Dynamical Systems", Europhysics Letters, 4, 973–977.

Article fondateur des recurrence plots. Il donne l'idée essentielle exploitée ici : représenter les retours de la trajectoire dans l'espace des phases pour rendre visible l'organisation temporelle.

5. Marwan, N. & Kraemer, K. H. (2023). "Trends in recurrence analysis of dynamical systems", European Physical Journal Special Topics, 232, 5–27. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00739-8.

Revue récente et très utile sur les développements contemporains de l'analyse de récurrence : choix des paramètres, nouveaux quantificateurs, multiscale, causalité et combinaisons avec le machine learning. Elle situe RQA comme une famille d'outils encore active en recherche.

6. Pánis, R., Adámek, K. & Marwan, N. (2023). "Averaged recurrence quantification analysis", European Physical Journal Special Topics, 232, 47–56.

Propose une RQA moyennée sur une gamme de seuils pour réduire la dépendance au choix de ε. L'article teste explicitement le déterminisme RQA sur des signaux périodiques et chaotiques, dont Lorenz, contaminés par différents SNR et différentes longueurs de série.

7. Zanin, M. & Olivares, F. (2021). "Ordinal patterns-based methodologies for distinguishing chaos from noise in discrete time series", Communications Physics, 4, 190.

Revue centrée sur la distinction chaos/bruit par motifs ordinaux. Elle insiste sur les difficultés causées par le bruit et les séries courtes et compare plusieurs approches de permutation patterns, dont les avantages sont la faible sensibilité aux transformations monotones et le coût de calcul modéré.

8. Bandt, C. & Pompe, B. (2002). "Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series", Physical Review Letters, 88, 174102.

Référence fondatrice de l'entropie de permutation. Dans nos simulations, la version simple discrimine bien le Lorenz propre mais se rapproche très vite du bruit blanc quand K augmente, ce qui illustre la nécessité de ne pas utiliser un seul indice de complexité.

9. Tu, J. H., Rowley, C. W., Luchtenburg, D. M., Brunton, S. L. & Kutz, J. N. (2014). "On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications", Journal of Computational Dynamics, 1(2), 391–421. DOI: 10.3934/jcd.2014.1.391.

Cadre mathématique majeur pour la DMD : la méthode est définie comme l'eigendecomposition d'un opérateur linéaire approximant les paires de données. L'article clarifie les liens avec Koopman, l'identification de systèmes et les questions de rang et de cohérence linéaire.

10. Schmid, P. J. (2022). "Dynamic Mode Decomposition and Its Variants", Annual Review of Fluid Mechanics, 54, 225–254. DOI: 10.1146/annurev-fluid-030121-015835.

Revue moderne de référence sur la DMD et ses variantes. Elle est particulièrement importante ici pour distinguer DMD standard, exact DMD, DMD débruitée, total least squares et autres formulations adaptées aux données bruitées.

11. Dawson, S. T. M., Hemati, M. S., Williams, M. O. & Rowley, C. W. (2016). "Characterizing and Correcting for the Effect of Sensor Noise in the Dynamic Mode Decomposition", Experiments in Fluids, 57, 42.

Montre analytiquement que le bruit de capteur biaise les valeurs propres DMD et présente plusieurs corrections : correction directe, forward-backward DMD et approche total least squares. Ce travail explique la migration vers l'intérieur du cercle unité observée dans nos simulations bruitées.

12. Arbabi, H. & Mezić, I. (2017). "Ergodic Theory, Dynamic Mode Decomposition, and Computation of Spectral Properties of the Koopman Operator", SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 16(4), 2096–2126.

Établit des résultats de convergence pour des algorithmes DMD/Hankel sur des données issues de systèmes ergodiques. Cette référence fournit le lien théorique avec la loi ergodique évoquée dans la discussion sur la longueur d'observation et justifie l'intérêt des matrices de retards.

13. Chowdhury, M. H. et al. (2021). "A survey of the noise-correcting tools for Dynamic Mode Decomposition", arXiv:2103.02338.

Revue pratique des outils de correction du bruit associés à la DMD. Intéressante pour prolonger l'estimateur simple du document vers des variantes plus robustes lorsque le SNR est faible.

14. Mignacca, M., Brugiapaglia, S. & Bramburger, J. J. (2025). "Real-time motion detection using dynamic mode decomposition", EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2025, 10.

Exemple récent d'utilisation de la DMD pour une tâche de détection temps réel. Même si le contexte n'est pas notre signal scalaire de Lorenz, le travail illustre le passage de la DMD d'un outil d'analyse offline à une brique de détection exploitable en flux.

15. Yin, X. et al. (2018). "Moving Target Detection Using Dynamic Mode Decomposition", Sensors, 18(10), 3461.

Application directe d'une décomposition DMD à la séparation d'une cible mobile et d'un fond réverbérant dans des données de détection. Cette référence est utile pour la perspective radar/sonar : la DMD peut jouer simultanément le rôle de séparateur de structure et de prétraitement avant décision.

16. Marwan, N. et al. (2007). "Recurrence plots for the analysis of complex systems", Physics Reports, 438, 237–329.

Grande revue classique qui rassemble les bases théoriques et pratiques des recurrence plots et de RQA. Malgré son ancienneté, elle reste une référence de fond indispensable pour interpréter DET, LAM, lignes diagonales, trapping time et choix de seuil.

Conclusion

Partir d'un signal chaotique noyé dans un bruit blanc conduit à une démarche étonnamment constructive. L'autocorrélation donne une échelle de temps ; l'embedding transforme une série scalaire en objet géométrique ; les récurrences et la prédiction locale détectent une cohérence déterministe ; la DMD synthétise cette cohérence en quelques modes et fournit en même temps un estimateur du signal. Le résultat n'est pas une "preuve universelle de chaos", mais une chaîne de traitement de données cohérente, interprétable et légère, dont chaque étage répond à une question physique précise. C'est précisément ce qui la rend intéressante pour la data science : elle ne remplace pas les données par un modèle arbitraire, elle fait émerger du signal lui-même les structures nécessaires à la détection et à l'estimation.