Du point fixe au chaos : un chemin spectral par Hopf, Floquet et Lyapunov

Une lecture pédagogique des pertes successives de stabilité

Introduction — suivre la stabilité plutôt que collectionner les routes vers le chaos

La théorie du chaos est souvent présentée comme une succession de phénomènes : bifurcation de Hopf, doublement de période, cascade de Feigenbaum, intermittence, tore quasi-périodique, attracteur étrange. Chacun de ces objets possède sa théorie propre et ses exemples historiques. Cette présentation est correcte, mais elle peut donner l'impression d'une collection de mécanismes indépendants.

Une autre lecture est possible. Elle consiste à suivre une seule question tout au long de la complexification du mouvement : **le régime dynamique que j'observe est-il encore stable, et si ce n'est plus le cas, quel objet doit remplacer l'ancien ?**

Cette question conduit à un fil spectral particulièrement simple :

$$équilibre \rightarrow cycle \rightarrow dynamique\ complexe \rightarrow chaos$$

mais l'outil spectral change avec l'objet étudié. Autour d'un point fixe, on regarde les valeurs propres du Jacobien. Autour d'un cycle limite, on regarde les multiplicateurs de Floquet, ou de manière équivalente les valeurs propres de la carte de Poincaré linéarisée. Lorsque la trajectoire n'est plus périodique et explore un attracteur chaotique, on passe aux exposants de Lyapunov.

Le triptyque devient donc :

$$\lambda_i \rightarrow \rho_i \rightarrow \Lambda_i$$

avec respectivement les valeurs propres locales, les multiplicateurs de Floquet et les exposants de Lyapunov.

Cette progression ne constitue pas une théorie universelle de toutes les routes vers le chaos. Certaines transitions sont globales et dépendent des intersections de variétés stables et instables. Mais elle fournit un axe pédagogique très puissant : **à chaque étape, le chaos s'approche par une perte de stabilité du régime qui existait auparavant**.

1. Premier niveau : la stabilité d'un point fixe

Considérons un système dynamique autonome dépendant d'un paramètre de contrôle μ :

$$\dot{X} = F(X; \mu)$$

Le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système. Le paramètre μ peut être une température, un débit, un nombre de Rayleigh, une intensité de couplage, une tension électrique ou tout autre paramètre susceptible de modifier le régime.

Un point fixe $X^*(\mu)$ vérifie :

$$F\left(X^*; \mu\right) = 0$$

Physiquement, cela signifie qu'une fois placé exactement dans cet état, le système n'évolue plus.

La question importante n'est cependant pas seulement l'existence du point fixe, mais sa stabilité. On perturbe donc légèrement l'état :

$$X(t) = X^* + \delta X(t).$$

En développant F au premier ordre autour de X^*, on obtient :

$$F\left(X^* + \delta X; \mu\right) \simeq F\left(X^*; \mu\right) + J\left(X^*; \mu\right)\delta X.$$

Comme $F\left(X^*; \mu\right) = 0$, il reste :

$$\delta X^{\cdot} = J\left(X^*; \mu\right)\delta X$$

où

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j})_{X=X^*}$$

est le Jacobien du système au point fixe.

On cherche alors des perturbations élémentaires sous la forme :

$$\delta X(t) = ve^{\lambda t}.$$

En substituant dans l'équation linéarisée :

$$\lambda v = Jv.$$

Les nombres λ_i sont donc les valeurs propres du Jacobien.

Si toutes satisfont

$$\Re\left(\lambda_i\right) < 0,$$

les perturbations décroissent et le point fixe est localement asymptotiquement stable. Si au moins une valeur propre acquiert une partie réelle positive,

$$\Re\left(\lambda_i\right) > 0,$$

une perturbation croît : le point fixe devient instable.

Cette lecture est déjà très physique. Une valeur propre n'est pas seulement un objet algébrique. Sa partie réelle est un taux de croissance ou de relaxation, tandis que sa partie imaginaire définit une fréquence d'oscillation locale.

2. La bifurcation de Hopf : quand l'équilibre engendre un cycle

Le cas le plus naturel pour passer d'un équilibre à une oscillation est celui d'une paire complexe conjuguée :

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu).$$

Tant que

$$\alpha(\mu) < 0,$$

la perturbation oscillante est amortie. Son amplitude décroît comme $e^{\alpha t}$.

Supposons qu'à une valeur critique $\mu = \mu_H$ on ait

$$\alpha(\mu_H) = 0$$

avec

$$\omega(\mu_H) = \omega_0 \neq 0.$$

La paire de valeurs propres atteint alors l'axe imaginaire :

$$\lambda_{1,2}(\mu_H) = \pm i\omega_0.$$

Sous des hypothèses supplémentaires, un cycle limite peut naître. C'est la bifurcation de Hopf.

2.1 Les hypothèses qu'il ne faut pas oublier

Le simple fait de voir une paire complexe atteindre l'axe imaginaire n'est pas suffisant. Pour une bifurcation de Hopf générique, on suppose notamment :

1. que la paire $\lambda_{1,2}$ est simple et isolée ;
2. qu'aucune autre valeur propre n'a une partie réelle nulle au même instant ;
3. que la traversée est transverse, c'est-à-dire
$$\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_H} \neq 0;$$
4. que les termes non linéaires ne sont pas dégénérés ; cela se traduit par un premier coefficient de Lyapunov de Hopf non nul.

Ces conditions ont un sens intuitif : le système doit traverser réellement la frontière de stabilité, et la non-linéarité doit être capable de saturer la croissance qui apparaît.

3. La forme normale de Hopf : voir naître le cycle

Au voisinage de la bifurcation, la dynamique peut être réduite sur une variété centrale de dimension deux. Une écriture complexe générique est :

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega_0)z + (c_r + ic_i)|z|^2 z + O(|z|^4).$$

Écrivons

$$z = re^{i\theta}.$$

On obtient alors, au premier ordre non linéaire :

$$r^{\cdot} = \alpha r + c_r r^3 + \cdots$$

et

$$\theta^{\cdot} = \omega_0 + c_i r^2 + \cdots.$$

La première équation détermine l'amplitude. La seconde détermine la fréquence.

Dans le cas supercritique, on a $c_r < 0$. Pour $\alpha > 0$, l'équilibre $r = 0$ devient instable, mais la croissance est arrêtée par le terme cubique négatif. Le rayon du cycle est obtenu en posant $r^{\cdot} = 0$:

$$\alpha r + c_r r^3 = 0.$$

En factorisant r :

$$r\left(\alpha + c_r r^2\right) = 0.$$

Outre $r = 0$, on obtient :

$$r_*^2 = -\frac{\alpha}{c_r}$$

et donc

$$r_* = \sqrt{-\frac{\alpha}{c_r}}.$$

Le cycle naît ainsi avec une amplitude qui croît comme la racine carrée de la distance au seuil.

La période est approximativement :

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0 + c_i r_*^2}.$$

À ce stade, le système oscille de manière régulière. Il n'est toujours pas chaotique.

4. Pourquoi les valeurs propres du point fixe ne suffisent plus

Une fois le cycle installé, le point fixe a cessé d'être l'objet pertinent. Même si l'on connaît parfaitement le spectre du Jacobien au point fixe initial, ce spectre ne dit pas si le cycle nouvellement créé restera stable lorsque μ continuera à varier.

Il faut maintenant perturber non plus un point, mais une trajectoire périodique.

Soit $X_0(t)$ un cycle limite de période T :

$$X_0(t + T) = X_0(t).$$

On écrit :

$$X(t) = X_0(t) + \delta X(t).$$

La linéarisation donne :

$$\delta X^{\cdot} = J(t)\delta X$$

avec

$$J(t) = \frac{\partial F}{\partial X})_{X_0(t)}.$$

Comme la trajectoire est périodique,

$$J(t + T) = J(t).$$

On obtient donc une équation linéaire à coefficients périodiques. C'est exactement le cadre de la théorie de Floquet.

5. La matrice de monodromie et les multiplicateurs de Floquet

Introduisons la matrice fondamentale $\Phi(t)$ définie par :

$$\Phi^{\cdot}(t) = J(t)\Phi(t),$$

avec

$$\Phi(0) = I.$$

Après une période :

$$M = \Phi(T).$$

La matrice M est appelée matrice de monodromie. Elle donne l'évolution d'une petite perturbation après exactement un tour :

$$\delta X(T) = M\delta X(0).$$

Les valeurs propres de M sont les multiplicateurs de Floquet :

$$Mv_i = \rho_i v_i.$$

Après n périodes, une perturbation portée par la direction v_i est multipliée approximativement par ρ_i^n.

La règle de stabilité devient donc :

$$|\rho_i) < 1$$

pour toutes les directions transverses au cycle.

Dans un système autonome, il existe toujours un multiplicateur trivial

$$\rho_0 = 1,$$

car un petit déplacement le long de la trajectoire correspond simplement à un décalage de phase sur le même cycle. La stabilité se juge donc sur les autres multiplicateurs.

6. Le lien avec la carte de Poincaré

La carte de Poincaré transforme l'étude du cycle en un problème de point fixe.

On choisit une surface Σ transverse au cycle. Le cycle la traverse à chaque tour au même point x^*. La carte de retour est :

$$x_{n+1} = P(x_n).$$

Le cycle vérifie :

$$P(x^*) = x^*.$$

Autrement dit, **un cycle limite du flot continu devient un point fixe de la carte de Poincaré**.

On linéarise la carte :

$$\delta x_{n+1} = DP(x^*)\delta x_n.$$

Les valeurs propres de $DP(x^*)$ sont les multiplicateurs de Floquet non triviaux.

Cette équivalence est fondamentale :

$$stabilité\ du\ cycle\ dans\ le\ flot \Leftrightarrow stabilité\ du\ point\ fixe\ de\ la\ carte$$

Le cercle unité dans le plan complexe devient alors l'équivalent de l'axe imaginaire pour les points fixes continus.

7. Trois manières principales pour un cycle de perdre sa stabilité

7.1 Un multiplicateur atteint -1 : doublement de période

Supposons qu'un multiplicateur réel se déplace jusqu'à

$$\rho = -1.$$

Le point fixe de la carte perd sa stabilité par une bifurcation dite *flip*. Dans le flot continu, le cycle de période T est remplacé par un cycle de période $2T$.

On a donc :

$$T \to 2T.$$

Si le nouveau cycle subit le même mécanisme :

$$2T \to 4T,$$

puis

$$4T \to 8T,$$

et ainsi de suite. C'est la route par doublements de période.

7.2 Un multiplicateur atteint $+1$

Si

$$\rho = +1,$$

on peut rencontrer une bifurcation selle-noeud de cycles, une bifurcation de symétrie, ou d'autres dégénérescences selon le contexte.

Le message physique est que deux solutions périodiques peuvent apparaître ou disparaître, ou qu'une branche de cycles peut changer de stabilité.

7.3 Une paire complexe atteint le cercle unité

Supposons

$$\rho_{1,2} = re^{\pm i\theta}.$$

Tant que

$$r < 1,$$

les perturbations spirales décroissent. Lorsque

$$r = 1,$$

la paire traverse le cercle unité. La carte subit alors une bifurcation de Neimark-Sacker.

Dans le flot continu, le cycle peut engendrer un tore invariant. Une seconde fréquence indépendante apparaît :

$$\omega_1, \omega_2.$$

Le mouvement devient quasi-périodique, puis le tore peut à son tour se déformer et se détruire, ouvrant une autre route vers le chaos.

8. Exemple détaillé : de Hopf à un doublement de période

Pour rendre le mécanisme concret, considérons d'abord la forme normale supercritique de Hopf :

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - \left(x^2 + y^2\right)x,\ \dot{y} = \omega x + \mu y - \left(x^2 + y^2\right)y.$$

Cette équation n'est pas choisie pour reproduire une machine particulière. Elle est choisie parce qu'elle représente, au voisinage du seuil, toute une classe de systèmes présentant une bifurcation de Hopf supercritique.

8.1 Le point fixe

L'origine

$$x^* = 0, y^* = 0$$

est un point fixe.

Le Jacobien à l'origine est :

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les solutions de

$$det(J - \lambda I) = 0.$$

On obtient :

$$(\mu - \lambda)^2 + \omega^2 = 0,$$

donc

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega.$$

Pour $\mu < 0$, la partie réelle est négative : l'origine est un foyer stable.

À

$$\mu = 0,$$

les valeurs propres sont purement imaginaires.

Pour $\mu > 0$, l'origine devient instable.

8.2 Passage en coordonnées polaires

Posons

$$x = rcos\theta,$$
$$y = rsin\theta.$$

On trouve exactement :

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$

et

$$\dot{\theta} = \omega.$$

Les états d'amplitude constante vérifient

$$\mu r - r^3 = 0.$$

Donc

$$r\left(\mu - r^2\right) = 0.$$

Pour $\mu > 0$, un cycle apparaît avec

$$r_* = \sqrt{\mu}.$$

Sa période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cet exemple montre explicitement le passage :

$$point\ fixe\ stable \rightarrow cycle\ limite\ stable.$$

Il faut cependant ajouter une remarque décisive : ce système est bidimensionnel et autonome. Le théorème de Poincaré-Bendixson interdit un attracteur chaotique classique dans ce cadre. Pour continuer vers le chaos, il faut un degré de liberté supplémentaire, un forçage périodique, un retard ou

un couplage. Le calcul suivant représente donc la dynamique locale de la carte de Poincaré d'un système plus riche, une fois le cycle créé.

9. Exemple local de perte de stabilité du cycle : la bifurcation flip

Supposons qu'après réduction sur la direction critique de la section de Poincaré, la carte locale s'écrive :

$$u_{n+1} = -(1 + \varepsilon)u_n + au_n^3$$

avec $a > 0$.

Le point fixe $u = 0$ représente le cycle de période T.

La dérivée de la carte vaut :

$$f'(u) = -(1 + \varepsilon) + 3au^2.$$

Au point fixe :

$$f'(0) = -(1 + \varepsilon).$$

Ce nombre est le multiplicateur critique de Floquet.

Pour que le point fixe soit stable, il faut :

$$|f'(0)) < 1.$$

Donc :

$$|1 + \varepsilon) < 1.$$

Ce qui donne :

$$-2 < \varepsilon < 0.$$

Lorsque

$$\varepsilon = 0,$$

on obtient :

$$f'(0) = -1.$$

Le multiplicateur atteint exactement le point -1 du cercle unité : c'est le seuil du doublement de période.

9.1 Calcul du cycle de période deux

Cherchons une orbite symétrique

$$u \to -u \to u.$$

Il faut donc que

$$f(u) = -u.$$

En utilisant la carte :

$$-(1 + \varepsilon)u + au^3 = -u.$$

On regroupe les termes :

$$-\varepsilon u + a u^3 = 0.$$

On factorise :

$$u\left(-\varepsilon + a u^2\right) = 0.$$

La solution non nulle vérifie :

$$u^2 = \frac{\varepsilon}{a}.$$

Pour $\varepsilon > 0$:

$$u_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}.$$

Le cycle de période T a donc perdu sa stabilité et un cycle de période $2T$ est apparu.

9.2 Stabilité du nouveau cycle

La stabilité d'une orbite de période deux est donnée par le produit des dérivées sur ses deux points :

$$\rho_2 = f'\left(u_+\right) f'\left(u_-\right).$$

Comme $u_+^2 = u_-^2 = \varepsilon/a$:

$$f'\left(u_{\pm}\right) = -(1 + \varepsilon) + 3a\frac{\varepsilon}{a}.$$

Donc :

$$f'\left(u_{\pm}\right) = -1 + 2\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\rho_2 = (-1 + 2\varepsilon)^2.$$

Pour de petites valeurs positives de ε, on a bien

$$\rho_2 < 1.$$

Le nouveau cycle est donc stable juste après sa naissance.

Ce calcul montre de manière très concrète ce qu'est une bifurcation de doublement de période : **ce n'est pas encore le chaos ; c'est le remplacement d'un cycle stable par un autre cycle stable deux fois plus long**.

10. Du premier doublement à la cascade

La forme locale précédente décrit seulement la première perte de stabilité. Elle ne suffit pas à prouver qu'une cascade complète va se produire.

Pour obtenir une cascade de Feigenbaum, il faut que la carte globale de retour appartienne à une classe appropriée, typiquement une carte unimodale lisse possédant un maximum quadratique. La dynamique peut alors suivre :

$$T \to 2T \to 4T \to 8T \to \cdots$$

avec accumulation des seuils de bifurcation vers une valeur finie du paramètre.

Le point important est que chaque étape peut à nouveau être lue comme une perte de stabilité spectrale d'une orbite périodique de la carte.

Le premier point fixe de la carte perd sa stabilité lorsque son multiplicateur atteint -1. Ensuite, l'orbite de période deux possède son propre multiplicateur. Celui-ci peut à son tour atteindre -1, créant une orbite de période quatre, et ainsi de suite.

La cascade peut donc être lue comme une **suite de pertes de stabilité de cycles successifs**.

11. Quand la périodicité disparaît : les exposants de Lyapunov

Dans le régime chaotique, il n'existe plus nécessairement un cycle stable unique qui puisse servir de référence globale.

On considère alors deux trajectoires initialement très proches :

$$\delta X(0).$$

Leur séparation évolue asymptotiquement comme :

$$\| \ \delta X(t) \| \sim \| \ \delta X(0) \| \ e^{\Lambda t}.$$

Le nombre Λ est un exposant de Lyapunov. Dans un système de dimension n, on obtient un spectre :

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n.$$

Un attracteur chaotique déterministe possède typiquement au moins un exposant positif :

$$\Lambda_1 > 0.$$

Cela signifie qu'une direction au moins amplifie exponentiellement les petites différences initiales.

La différence avec le spectre du point fixe est essentielle. Les valeurs propres λ_i sont calculées en un point. Les exposants de Lyapunov sont des moyennes asymptotiques de la croissance des perturbations le long de toute la trajectoire.

12. Le lien entre Floquet et Lyapunov

Pour un cycle périodique de période T, un multiplicateur de Floquet ρ_i peut être converti en taux moyen par unité de temps :

$$\mu_i^{(F)} = \frac{1}{T} ln|\rho_i).$$

Si $|\rho_i) < 1$, alors

$$\mu_i^{(F)} < 0.$$

Si $|\rho_i) = 1$, alors

$$\mu_i^{(F)} = 0.$$

Si $|\rho_i) > 1$, alors

$$\mu_i^{(F)} > 0.$$

On voit donc apparaître une continuité conceptuelle entre les trois niveaux :

$$valeurs\ propres\ locales \rightarrow exposants\ de\ Floquet \rightarrow exposants\ de\ Lyapunov$$

Tous répondent à la même question fondamentale : **une petite perturbation décroît-elle, reste-t-elle neutre, ou croît-elle ?**

13. Ce que le spectre explique, et ce qu'il n'explique pas

L'approche spectrale permet de dire avec une grande précision **quand un régime perd sa stabilité**. Elle permet également de classifier plusieurs bifurcations locales.

Mais elle ne détermine pas toujours ce que devient globalement la trajectoire après cette perte de stabilité.

Deux systèmes peuvent posséder localement des spectres comparables et avoir pourtant des dynamiques globales différentes, parce que leurs variétés stables et instables ne se raccordent pas de la même manière.

Il faut donc distinguer deux questions.

La première est locale :

> Le régime actuel est-il stable ?

Elle se traite par le spectre.

La seconde est globale :

> Où la trajectoire va-t-elle après avoir quitté ce régime ?

Elle exige la géométrie de l'espace des phases.

14. Les bifurcations homocliniques : la limite d'une lecture purement locale

Un point selle possède des directions stables et instables. On leur associe une variété stable W^s et une variété instable W^u.

Si une branche de W^u revient rencontrer W^s du même objet, on obtient une structure homocline.

Lorsqu'une intersection homocline est transverse, les trajectoires sont étirées, repliées puis réinjectées. Le mécanisme du fer à cheval de Smale peut apparaître.

Ici, la connaissance des seules valeurs propres du point selle ne suffit pas. Elles décrivent ce qui se passe au voisinage du point, mais pas le retour global de la trajectoire.

Le chaos doit donc être compris comme la combinaison de deux ingrédients :

$$instabilité\ locale\ +\ réinjection\ globale.$$

La première est largement spectrale. La seconde est géométrique.

15. Une lecture physique des trois spectres

On peut désormais donner une interprétation simple des différents outils.

Valeurs propres du Jacobien

Elles disent comment le système oublie ou amplifie une perturbation autour d'un état stationnaire.

Une valeur propre telle que

$$\lambda = -\frac{1}{\tau}$$

correspond à un temps de relaxation

$$\tau = -\frac{1}{\Re\lambda}.$$

Lorsque $\Re\lambda \to 0^{-}$, ce temps devient très grand : le système relaxe de plus en plus lentement. On retrouve le ralentissement critique à l'approche d'une bifurcation.

Multiplicateurs de Floquet

Ils disent quelle fraction d'une perturbation survit après un cycle complet.

Si

$$|\rho) = 0.2,$$

une perturbation est divisée par cinq à chaque période.

Si

$$|\rho) = 0.99,$$

elle disparaît très lentement : le cycle est proche d'une nouvelle bifurcation.

Si

$$\rho = -1,$$

la perturbation change de signe d'un tour à l'autre sans être amortie : c'est précisément la géométrie locale qui annonce un doublement de période.

Exposants de Lyapunov

Ils mesurent le bilan moyen de croissance des perturbations lorsqu'il n'existe plus de périodicité simple.

Un exposant positif signifie que le système fabrique continuellement de la séparation entre trajectoires voisines.

16. Le paramètre de contrôle comme moteur de la progression

Le paramètre μ n'est pas nécessairement une force extérieure. Il peut mesurer une quantité physique très différente selon le système.

Ce qui importe est son effet sur le spectre.

Au niveau du point fixe :

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu).$$

Au niveau du cycle :

$$\rho_i = \rho_i(\mu).$$

Dans le régime chaotique :

$$\Lambda_i = \Lambda_i(\mu).$$

On peut donc suivre la complexification comme une évolution spectrale paramétrée.

Le paramètre de contrôle déplace d'abord une valeur propre vers la frontière de stabilité. Après Hopf, il modifie les multiplicateurs du cycle. Après la perte de périodicité, il modifie le spectre de Lyapunov.

Cette continuité est probablement plus importante que la nature physique particulière du paramètre.

17. Une chaîne conceptuelle complète

Le raisonnement peut être résumé de la manière suivante.

Un équilibre stable possède :

$$\Re\lambda_i < 0.$$

Une paire complexe s'approche de l'axe imaginaire :

$$\Re\lambda_{1,2} \to 0.$$

Sous les hypothèses de Hopf, un cycle apparaît :

$$équilibre \to cycle.$$

On étudie alors ses multiplicateurs de Floquet.

Si un multiplicateur atteint -1 :

$$T \to 2T.$$

Si le mécanisme se répète :

$$T \to 2T \to 4T \to 8T \to \cdots.$$

Lorsque la dynamique devient apériodique et sensible aux conditions initiales, on caractérise l'instabilité par :

$$\Lambda_{max} > 0.$$

Le fil directeur devient donc :

$$\text{équilibre} \xrightarrow{\lambda_i} \text{cycle} \xrightarrow{\rho_i} \text{chaos} \xrightarrow{\Lambda_i} \text{instabilité asymptotique}$$

Conclusion — le chaos comme succession de pertes de stabilité

Cette lecture ne réduit pas toutes les routes vers le chaos à une seule bifurcation. Elle propose quelque chose de plus modeste et peut-être plus utile : une continuité de méthode.

Tant qu'un point fixe organise la dynamique, on étudie son Jacobien. Lorsqu'un cycle limite apparaît, on suit sa stabilité par Floquet et par la carte de Poincaré. Lorsque le mouvement devient apériodique, on généralise la même question aux exposants de Lyapunov.

Le cycle limite n'est donc pas une rupture dans le raisonnement. Il est un nouvel objet dont il faut à nouveau tester la stabilité. Son doublement de période est une bifurcation du même type conceptuel que la bifurcation initiale : **le régime en place cesse de pouvoir amortir une certaine perturbation**.

La route vers le chaos peut alors être comprise comme une hiérarchie de pertes de stabilité :

$$\text{point fixe stable} \rightarrow \text{cycle stable} \rightarrow \text{cycle de période} 2T \rightarrow \text{cycles de plus en plus complexes} \rightarrow \text{attracteur chaotique}$$

La partie spectrale indique quand une structure dynamique devient vulnérable. La géométrie globale indique comment la trajectoire est réinjectée et réorganisée. Ensemble, elles donnent une lecture particulièrement cohérente du passage de l'ordre au chaos.

Partie II — Les orbites périodiques instables : le squelette périodique du chaos

Introduction — Quand le cycle limite ne disparaît pas vraiment

Dans la première partie de ce document, nous avons suivi une idée simple : lorsqu'un régime dynamique perd sa stabilité, il ne faut pas abandonner l'analyse spectrale, mais changer l'objet dont on étudie la stabilité. Autour d'un équilibre, ce sont les valeurs propres du Jacobien qui nous renseignent. Lorsqu'une bifurcation de Hopf fait naître un cycle limite, ce sont les multiplicateurs de Floquet qui prennent le relais. Lorsque ce cycle subit une bifurcation secondaire, par exemple un doublement de période, la dynamique se complexifie encore. Au bout de cette cascade peut apparaître un attracteur chaotique, caractérisé à l'échelle globale par un exposant de Lyapunov maximal positif.

Une question reste alors ouverte : que deviennent les cycles lorsque le chaos est installé ? Une présentation élémentaire pourrait laisser croire qu'ils ont disparu, remplacés par une trajectoire irrégulière qui ne se répète plus jamais. La théorie des orbites périodiques instables, ou UPO pour *unstable periodic orbit*, conduit à une vision beaucoup plus riche. Les cycles n'ont pas disparu. Au contraire, ils prolifèrent. Ils sont devenus instables, souvent très nombreux, et ils constituent une sorte d'ossature enfouie dans l'attracteur chaotique.

Cette idée change profondément la manière de regarder le chaos. Le chaos n'est plus seulement une trajectoire sensible aux conditions initiales ; il devient un paysage de structures périodiques instables, chacune avec sa période, sa géométrie, sa stabilité de Floquet et ses observables moyennes. La trajectoire chaotique se déplace dans ce paysage : elle approche une UPO, la suit pendant un certain temps, s'en éloigne le long de directions instables, puis se rapproche d'une autre.

Cette partie développe d'abord la théorie, puis montre à quoi elle sert dans les systèmes de faible dimension, la météorologie, la turbulence, le contrôle du chaos et les méthodes modernes de réduction par apprentissage.

18. De la trajectoire chaotique aux orbites périodiques instables

Considérons un système autonome suffisamment régulier :

$$\dot{X} = F(X),$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système.

Une orbite périodique $X_p(t)$ est une solution pour laquelle il existe une période $T_p > 0$ telle que

$$X_p(t + T_p) = X_p(t)$$

pour tout t.

Il ne s'agit pas d'une approximation : l'UPO est une solution exacte des mêmes équations que la trajectoire chaotique. Ce qui la distingue d'un cycle limite stable est sa stabilité transverse.

On considère une petite perturbation autour de l'orbite :

$$X(t) = X_p(t) + \delta X(t).$$

En linéarisant, on obtient l'équation variationnelle

$$\delta X^{\cdot} = J_p(t)\delta X,$$

avec

$$J_p(t) = \frac{\partial F}{\partial X})_{X_p(t)}.$$

Puisque l'orbite est périodique, le Jacobien évalué sur elle l'est aussi :

$$J_p\left(t + T_p\right) = J_p(t).$$

On introduit la matrice fondamentale $\Phi_p(t)$ définie par

$$\Phi^{\cdot}{}_p(t) = J_p(t)\Phi_p(t), \Phi_p(0) = I.$$

Après une période, la matrice

$$M_p = \Phi_p\left(T_p\right)$$

est la matrice de monodromie. Ses valeurs propres

$$\mu_{p,1}, \mu_{p,2}, \ldots, \mu_{p,n}$$

sont les multiplicateurs de Floquet de l'orbite.

Pour un flot autonome, il existe toujours un multiplicateur trivial égal à 1, associé au déplacement le long de l'orbite : changer légèrement la phase ne fait que se déplacer sur la même solution périodique. La stabilité transverse dépend des autres multiplicateurs.

Si tous les multiplicateurs transverses vérifient

$$|\mu_{p,i}) < 1,$$

le cycle est attractif. S'il existe au moins un multiplicateur tel que

$$|\mu_{p,i}) > 1,$$

le cycle est instable. C'est précisément le cas d'une UPO.

On peut aussi définir les exposants de Floquet associés :

$$\nu_{p,i} = \frac{1}{T_p} ln|\mu_{p,i}).$$

Un exposant $\nu_{p,i} > 0$ correspond à une direction dans laquelle une perturbation croît exponentiellement lorsque l'on suit l'UPO.

L'idée fondamentale est donc très simple : une UPO est une solution périodique exacte qui organise localement le mouvement, mais qui ne peut retenir durablement une trajectoire voisine parce qu'elle possède au moins une direction instable.

19. Pourquoi trouve-t-on des UPO dans un attracteur chaotique ?

Dans un attracteur chaotique suffisamment mélangeant, les retours proches sont fréquents. Une trajectoire part d'une région de l'espace des phases, parcourt l'attracteur, puis revient parfois très près d'un état antérieur. Si, pour deux instants t et $t + T$, on observe

$$\| X(t + T) - X(t) \| \ll 1,$$

on parle de quasi-récurrence.

Une quasi-récurrence n'est pas encore une orbite périodique exacte. Elle fournit cependant une excellente condition initiale pour résoudre le problème non linéaire

$$\Phi_T(X_0) - X_0 = 0,$$

où Φ_T désigne le flot intégré pendant le temps T.

Le problème consiste donc à corriger à la fois l'état initial X_0 et éventuellement la période T afin d'obtenir un retour exact. Dans la pratique, on utilise des méthodes de Newton ou Newton-Krylov, souvent avec une condition supplémentaire qui élimine l'indétermination de phase.

Schématiquement, on cherche une correction δX telle que

$$\Phi_T(X_0 + \delta X) - (X_0 + \delta X) = 0.$$

Au premier ordre,

$$(D\Phi_T(X_0) - I)\delta X \simeq -(\Phi_T(X_0) - X_0).$$

Cette équation montre pourquoi une quasi-récurrence est utile : si le résidu $\Phi_T(X_0) - X_0$ est déjà petit, la correction de Newton a de bonnes chances de converger.

Dans les systèmes de grande dimension, comme Navier–Stokes après discrétisation, cette recherche est numériquement coûteuse. Une part importante de la recherche moderne porte donc sur la détection efficace des quasi-récurrences et sur la construction d'espaces réduits dans lesquels elles deviennent visibles.

20. Shadowing : la trajectoire chaotique suit temporairement une UPO

Une UPO n'attire pas asymptotiquement la trajectoire, puisqu'elle est instable. Mais elle peut l'organiser temporairement.

Soit une trajectoire chaotique $X(t)$ et une UPO p. On définit une distance à l'orbite qui tient compte du fait que la phase sur le cycle est arbitraire :

$$d_p(t) = \min_{0 \le \tau < T_p} \| X(t) - X_p(\tau) \|.$$

Si $d_p(t)$ reste petit pendant un intervalle de temps, la trajectoire chaotique et l'UPO co-évoluent : on dit que la trajectoire *shadow* l'UPO.

Cette notion est très importante. Elle ne dit pas seulement que deux courbes se croisent par hasard. Elle affirme qu'un segment de trajectoire chaotique peut être interprété comme une version légèrement perturbée d'une solution périodique exacte.

La durée du shadowing est limitée par l'instabilité de l'UPO. Si la principale direction instable possède un exposant de Floquet positif ν_u, une perturbation transverse croît schématiquement comme

$$\| \delta X(t) \| \sim \| \delta X(0) \| e^{\nu_u t}.$$

Une UPO très instable sera donc suivie pendant peu de temps. Une UPO faiblement instable pourra organiser la trajectoire plus longtemps.

On obtient ainsi une image dynamique : la trajectoire est captée temporairement dans le voisinage d'une UPO, puis expulsée par une direction instable et réinjectée vers une autre région de l'attracteur.

21. Exemple détaillé : le système de Lorenz comme réseau d'UPO

Considérons le système classique de Lorenz :

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$
$$\dot{z} = xy - \beta z,$$

avec les paramètres usuels

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}.$$

À ces valeurs, le système possède l'attracteur chaotique célèbre à deux lobes. Une trajectoire effectue plusieurs rotations autour d'une aile, traverse la région centrale, puis se met à tourner autour de l'autre aile. Les durées de séjour et le nombre de rotations sont irréguliers.

Le système possède cependant une multitude d'orbites périodiques instables. On peut utiliser une dynamique symbolique grossière : chaque visite du lobe gauche reçoit le symbole L, chaque visite du lobe droit le symbole R. Une UPO peut alors être associée à un mot périodique tel que

$$LRLRLR \ldots,$$

ou

$$LLRLLRLLR \ldots,$$

ou à des mots beaucoup plus longs.

Cette représentation n'est pas qu'une notation. Un mot long décrit une séquence plus riche de séjours et de transitions et peut donc reproduire plus finement un morceau de trajectoire chaotique.

Maiocchi, Lucarini et Gritsun ont étudié en 2022 un ensemble complet d'UPO jusqu'à une période symbolique 14. Leur démarche est particulièrement éclairante parce qu'elle ne se contente pas de calculer des moyennes à partir des UPO : elle suit explicitement la manière dont une trajectoire chaotique est approchée localement par ces orbites.

À chaque instant, les auteurs calculent la distance entre la trajectoire chaotique et chaque UPO, puis classent les UPO par proximité. La première du classement est celle qui fournit la meilleure approximation locale. Ils étudient ensuite la persistance de ce classement.

Un résultat important est que les UPO de période symbolique élevée fournissent très souvent les meilleures approximations locales. Ce résultat est intuitif après réflexion : une orbite simple possède peu de variété symbolique, alors qu'une UPO longue peut reproduire une séquence complexe de rotations et de changements de lobe.

Le chaos apparaît ainsi comme une succession de morceaux localement structurés :

$$UPO_{i_1} \rightarrow UPO_{i_2} \rightarrow UPO_{i_3} \rightarrow \cdots$$

Cette écriture ne signifie pas que la trajectoire saute instantanément d'une orbite exacte à une autre. Elle signifie que, sur des intervalles successifs, différentes UPO offrent la meilleure description locale du mouvement.

22. Des UPO à une chaîne de Markov

L'étape suivante consiste à transformer cette géométrie en un modèle statistique.

On associe à chaque UPO U_i un voisinage A_i. À chaque instant discret, on attribue à la trajectoire l'état correspondant à l'UPO la plus proche. On obtient une suite symbolique

$$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

avec

$$s_n \in \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}.$$

On compte alors les transitions. Si N_{ij} est le nombre de passages observés de A_j vers A_i, on peut construire une matrice de transition

$$P_{ij} \approx \frac{N_{ij}}{\sum_k N_{kj}}.$$

Selon la convention choisie, les colonnes ou les lignes somment à un ; l'idée essentielle est que P_{ij} estime une probabilité conditionnelle de transition entre voisinages d'UPO.

La dynamique chaotique continue est alors représentée, à ce niveau de coarse-graining, par

$$p_{n+1} = Pp_n,$$

où p_n est le vecteur des probabilités d'occupation des différents états.

Cette étape est conceptuellement très forte. On passe d'un système déterministe non linéaire à une description probabiliste des transitions entre structures invariantes. La stochasticité du modèle réduit ne signifie pas que le système initial est aléatoire : elle provient de la perte volontaire d'information lors du regroupement de régions entières de l'espace des phases en états discrets.

23. Le spectre de la matrice de transition et les temps de relaxation

La matrice P possède une valeur propre principale égale à 1 pour une chaîne ergodique :

$$P\pi = \pi.$$

Le vecteur π représente la distribution stationnaire sur les voisinages d'UPO. Il est l'analogue discret de la mesure invariante de l'attracteur.

Les autres valeurs propres vérifient typiquement

$$|\lambda_k) < 1.$$

Elles décrivent les vitesses de relaxation statistique. Si un mode évolue comme

$$\lambda_k^n,$$

alors, pour un pas temporel Δt, on peut lui associer un temps de relaxation

$$\tau_k \simeq -\frac{\Delta t}{ln|\lambda_k)}.$$

Lorsque $|\lambda_k)$ est proche de 1, τ_k est grand : le système possède une organisation lente, un mode de mélange faiblement amorti.

Cette relation donne un pont remarquable entre la théorie des UPO et une lecture par temps de relaxation. Le chaos microscopique, très sensible aux conditions initiales, peut malgré tout posséder des modes statistiques lents et structurés.

On distingue donc deux spectres de nature différente :

4. les multiplicateurs de Floquet d'une UPO décrivent la stabilité locale de cette orbite ;
5. les valeurs propres de la matrice de transition décrivent la relaxation statistique du mouvement entre voisinages d'UPO.

Les deux niveaux sont complémentaires.

24. Ensembles quasi-invariants : les grandes régions lentes du chaos

Supposons que la deuxième valeur propre de P soit réelle et proche de 1 :

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 \lesssim 1.$$

Le vecteur propre associé à λ_2 peut séparer les états en deux groupes selon le signe de ses composantes. On définit schématiquement

$$B_+ = \bigcup_{v_i^{(2)}>0} A_i,$$

et

$$B_- = \bigcup_{v_i^{(2)}<0} A_i.$$

La trajectoire se mélange rapidement à l'intérieur de chacun de ces ensembles, mais plus lentement entre eux. Ils sont dits quasi-invariants : ils ne sont pas rigoureusement fermés, mais la fuite qui les relie est lente.

Cette notion est très utile lorsqu'un attracteur chaotique possède plusieurs régimes macroscopiques. Les deux ailes de Lorenz constituent l'image la plus simple, mais la même idée peut s'appliquer à des régimes atmosphériques, à des états d'écoulement différents ou à des classes de dynamique turbulente.

Le spectre de P offre alors une hiérarchie : les valeurs propres proches de 1 révèlent les partitions les plus persistantes ; les valeurs propres plus petites décrivent des structures qui se mélangent plus rapidement.

25. Reconstruction des moyennes par les orbites périodiques

Une autre branche de la théorie utilise les UPO pour reconstruire les propriétés statistiques d'un attracteur.

Soit une observable $A(X)$, par exemple une énergie, une dissipation, une coordonnée ou un flux. Sa moyenne sur l'UPO p est

$$\overline{A}_p = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} A\left(X_p(t)\right)dt.$$

La théorie des orbites périodiques montre que, sous des hypothèses fortes d'hyperbolicité et avec des pondérations appropriées liées notamment à l'instabilité des cycles, les moyennes statistiques du chaos peuvent être reconstruites à partir des orbites périodiques :

$$\langle A\rangle \approx \frac{\sum_p w_p \overline{A}_p}{\sum_p w_p}.$$

Cette formule ne doit pas être prise comme une simple moyenne arithmétique. Les poids w_p dépendent de la période et surtout de la stabilité des orbites. Une orbite très instable possède un voisinage visité moins longtemps qu'une orbite faiblement instable ; elle ne doit donc pas recevoir le même poids.

Dans les systèmes uniformément hyperboliques, la théorie des cycles et les développements de type *cycle expansion* donnent un cadre rigoureux à cette reconstruction. Dans les systèmes physiques réalistes, qui ne sont souvent pas parfaitement hyperboliques, la méthode devient plus délicate mais reste très informative.

26. Trois niveaux spectraux à l'intérieur du même raisonnement

La théorie des UPO complète la chaîne spectrale construite dans la première partie.

Autour d'un équilibre :

$$Jv_i = \lambda_i v_i.$$

Autour d'un cycle ou d'une UPO :

$$M_p w_i = \mu_{p,i} w_i.$$

Sur l'attracteur chaotique global, les exposants de Lyapunov décrivent la croissance asymptotique typique des perturbations :

$$\Lambda_i = \frac{1}{t} ln \frac{\|\delta X_i(t)\|}{\|\delta X_i(0)\|}.$$

Enfin, après réduction en réseau de voisinages d'UPO :

$$Pq_k = \lambda_k^{(P)} q_k.$$

Le dernier spectre ne décrit plus une instabilité géométrique locale ; il décrit les modes de relaxation du transport probabiliste dans l'attracteur.

On obtient donc une hiérarchie :

$$équilibre \rightarrow cycle \rightarrow UPO \rightarrow attracteur \rightarrow modes\ statistiques.$$

Chaque niveau possède son objet spectral propre.

27. Limites et hypothèses de la théorie

Il est important de ne pas présenter la théorie des UPO comme une décomposition universelle sans conditions.

Première hypothèse : il faut que les orbites périodiques soient suffisamment riches et suffisamment proches de l'ensemble dynamique pertinent. Dans les systèmes hyperboliques, les UPO sont denses dans l'ensemble non errant et la théorie des orbites périodiques possède un fondement solide. Dans de nombreux systèmes physiques, l'hyperbolicité uniforme est violée ; les résultats deviennent alors plus empiriques et la convergence peut être moins nette.

Deuxième difficulté : le nombre d'UPO croît rapidement avec la période. Une description complète peut donc devenir exponentiellement coûteuse.

Troisième difficulté : une UPO très instable est difficile à détecter numériquement, car la trajectoire ne reste que très peu de temps dans son voisinage.

Quatrième difficulté : les symétries continues, fréquentes en mécanique des fluides, transforment les orbites périodiques en orbites périodiques relatives. Il faut alors réduire les symétries ou modifier les algorithmes de recherche.

Cinquième difficulté : lorsqu'on construit une chaîne de Markov sur les voisinages d'UPO, la propriété markovienne dépend du choix du pas de temps et de la partition. Le modèle est une approximation coarse-grainée du flot, et non une identité exacte.

Ces limites expliquent pourquoi les méthodes modernes associent la théorie dynamique classique à des techniques numériques de continuation, Newton-Krylov, réduction dimensionnelle, DMD et apprentissage automatique.

Partie III — Applications : pourquoi chercher les UPO ?

28. Comprendre le chaos : retrouver de l'ordre dans l'irrégularité

La première application est conceptuelle. Une trajectoire chaotique brute donne l'impression que toute organisation temporelle a disparu. Les UPO montrent au contraire que l'attracteur contient une multitude de dynamiques périodiques exactes.

Le chaos peut alors être interprété comme une circulation parmi des structures localement cohérentes :

$$chaos \simeq shadowing + expulsion + réinjection.$$

Cette lecture donne un sens géométrique au mélange. L'instabilité d'une UPO provoque la sortie de son voisinage ; les variétés invariantes et la géométrie globale de l'attracteur orientent la trajectoire vers d'autres régions.

29. Turbulence : les UPO comme structures cohérentes exactes

La turbulence constitue aujourd'hui l'un des domaines les plus actifs de cette approche.

Une solution des équations de Navier–Stokes peut être considérée comme un point dans un espace d'état de très grande dimension. Une réalisation turbulente est alors une trajectoire dans cet espace. On cherche des solutions invariantes exactes : équilibres, ondes progressives, orbites périodiques et orbites périodiques relatives.

Une UPO du champ de vitesse vérifie, dans le cas le plus simple,

$$u\left(x, t + T_p\right) = u(x, t).$$

Ces solutions sont généralement instables mais peuvent reproduire des motifs cohérents observés dans l'écoulement turbulent : cycles de régénération, bouffées de dissipation, structures tourbillonnaires, réorganisations globales.

L'intérêt est double. D'une part, elles fournissent une bibliothèque de solutions exactes qui structurent l'espace des phases. D'autre part, leurs moyennes peuvent servir à reconstruire les statistiques du régime turbulent.

Le travail de Page, Holey, Brenner et Kerswell publié en 2024 dans le *Journal of Fluid Mechanics* illustre l'évolution moderne de cette approche. Les auteurs utilisent des autoencodeurs convolutionnels pour construire un espace latent capable de faire apparaître des familles de dynamique dans une turbulence bidimensionnelle. Ils exploitent ensuite cet espace réduit pour générer de meilleures conditions initiales de recherche d'UPO, notamment pour des événements de forte dissipation jusque-là difficiles à capturer.

Le message est important : le machine learning ne remplace pas les objets dynamiques ; il aide à les retrouver dans un espace trop grand pour être exploré directement.

30. Taylor–Couette : du diagramme de Feigenbaum aux statistiques turbulentes

Un résultat publié en 2025 par Wang, Ayats, Deguchi, Meseguer et Mellibovsky sur l'écoulement de Taylor–Couette fournit un exemple particulièrement proche du fil développé dans ce document.

Les auteurs observent une transition vers le chaos suivant une cascade de Feigenbaum dans un domaine périodique minimal. Une carte discrète simple décrit remarquablement bien la dynamique réduite et possède des points périodiques qui correspondent à des UPO du système Navier–Stokes.

La structure conceptuelle est donc :

$$Navier\text{–}Stokes \rightarrow dynamique\ réduite \rightarrow carte \rightarrow points\ périodiques \leftrightarrow UPO\ du\ flot.$$

Les auteurs montrent ensuite qu'une collection d'UPO permet de reconstruire les propriétés statistiques du régime chaotique. Cette étude constitue une validation moderne très nette de l'idée selon laquelle les UPO peuvent servir de squelette à un régime de fluide chaotique.

31. Météorologie et climat : prédictibilité dépendante de l'état

La dynamique atmosphérique est chaotique, mais son instabilité n'est pas homogène. Certains états sont beaucoup plus prévisibles que d'autres.

Dans le modèle Lorenz-96, Maiocchi, Lucarini, Gritsun et Sato ont étudié en 2024 la structure de l'attracteur à l'aide des exposants de Lyapunov, des UPO et de leurs propriétés de shadowing. Ils montrent notamment que les UPO peuvent posséder des nombres différents de directions instables.

Cette hétérogénéité signifie que l'on ne peut pas toujours résumer la prévisibilité par un seul exposant de Lyapunov global. La trajectoire peut traverser des régions fortement instables puis des régions beaucoup moins instables.

On peut donc envisager une prévision conditionnelle :

$$état\ actuel \rightarrow UPO\ ou\ famille\ d'UPO\ proche \rightarrow instabilité\ locale \rightarrow horizon\ de\ prévision\ adapté.$$

Pour des systèmes plus réalistes, l'objectif serait d'identifier des régimes quasi-invariants, par exemple des circulations zonales ou des blocages atmosphériques, et de comprendre les routes de transition entre eux.

32. Détection des transitions et événements rares

Une UPO ne sert pas seulement à décrire ce que fait le système lorsqu'il reste dans un régime. Ses variétés instables peuvent indiquer comment il quitte ce régime.

Supposons que $W^u(U_i)$ soit la variété instable d'une UPO U_i. Une trajectoire proche de U_i est expulsée préférentiellement le long de cette variété. Si cette direction conduit vers une région rare de l'espace d'état, l'approche de U_i peut devenir un précurseur géométrique d'une transition.

Le schéma est alors :

$$approche\ d'une\ UPO \rightarrow alignement\ avec\ une\ direction\ instable \rightarrow sortie\ du\ voisinage \rightarrow transition\ macroscopique.$$

Cette logique est particulièrement attractive pour les événements extrêmes : une prévision exacte de la trajectoire à long terme est impossible, mais une prévision de transition de régime peut rester accessible.

33. Contrôler le chaos : stabiliser une UPO déjà présente

La théorie des UPO conduit naturellement au contrôle du chaos.

Supposons que le système possède une UPO dont le comportement est souhaitable, mais qu'elle soit instable. Plutôt que de forcer le système vers une trajectoire artificielle, on cherche à stabiliser cette solution déjà existante.

Le principe OGY consiste à appliquer de petites corrections paramétriques lorsque la trajectoire passe près de l'UPO. Le contrôle par retard de Pyragas repose sur une autre idée : utiliser la différence entre l'état présent et l'état retardé d'une période.

Un terme de contrôle schématique est

$$u(t) = K[y\left(t - T_p\right) - y(t)).$$

Sur l'orbite périodique ciblée,

$$y\left(t - T_p\right) = y(t),$$

et donc

$$u(t) = 0.$$

Le contrôle est dit non invasif sur la solution cible : lorsqu'elle est stabilisée, la commande s'annule idéalement.

Un travail expérimental et numérique de Costa, Pavlovskaia et Wiercigroch publié en 2024 étudie ce principe dans un oscillateur à impacts avec retards multiples. Les auteurs montrent que l'efficacité de la stabilisation dépend finement des exposants de Floquet de l'UPO ciblée et du choix du retard. L'UPO n'est donc pas seulement un objet descriptif : sa stabilité spectrale guide directement la conception du contrôle.

34. Data science : transformer une trajectoire en réseau d'états dynamiques

Pour la data science, l'approche UPO offre un changement de représentation.

Une série temporelle ou une trajectoire haute dimension peut d'abord être reconstruite dans un espace d'état. On cherche ensuite des quasi-récurrences, puis des solutions périodiques candidates. Chaque UPO devient un prototype dynamique, non pas seulement un centroïde géométrique.

On peut alors construire :

5. un dictionnaire d'UPO ;
6. des descripteurs de chaque UPO : période, énergie, moyenne, multiplicateurs de Floquet ;
7. une matrice de transition entre leurs voisinages ;
8. un spectre de relaxation de cette matrice ;

9. des ensembles quasi-invariants correspondant à des régimes persistants.

Le modèle réduit devient ainsi hybride : géométrique parce qu'il repose sur des solutions exactes ; probabiliste parce que le passage entre leurs voisinages est décrit statistiquement.

Cette représentation est proche, dans l'esprit, des modèles de Markov d'états, de l'analyse de Koopman et des opérateurs de transfert, mais elle conserve une interprétation dynamique particulièrement forte : chaque état discret est ancré sur une solution périodique des équations.

35. Apprentissage automatique et espaces latents

Dans un système de grande dimension, la principale difficulté n'est plus la définition d'une UPO mais sa découverte.

Supposons qu'un champ discrétisé possède N composantes :

$$X(t) \in \mathbb{R}^N, N \gg 1.$$

Un autoencodeur apprend une transformation

$$z = E(X),$$

avec

$$z \in \mathbb{R}^m, m \ll N,$$

et un décodeur

$$X^{\wedge} = D(z).$$

On ne demande pas nécessairement au réseau de produire lui-même les UPO exactes. On l'utilise pour révéler les proximités, familles, quasi-récurrences et événements rares dans l'espace latent. Les candidats sont ensuite réinjectés dans un solveur dynamique exact de type Newton.

Cette articulation est importante sur le plan méthodologique :

$$machine\ learning \rightarrow réduction\ et\ détection \rightarrow solveur\ des\ équations \rightarrow UPO\ exacte.$$

La donnée aide donc à explorer l'espace des solutions sans abandonner la contrainte physique.

36. Une lecture processuelle du chaos par les UPO

La théorie des UPO permet finalement de prolonger la lecture du chaos développée dans la première partie.

Avant le chaos, la dynamique peut être organisée par un petit nombre d'objets stables : équilibre, cycle limite, tore. Lorsque ces objets perdent successivement leur stabilité, ils ne sont pas nécessairement détruits ; beaucoup persistent comme solutions instables.

Le chaos peut alors être lu comme une prolifération d'états organisés qui ne peuvent plus, pris individuellement, retenir la trajectoire.

On peut résumer :

$$équilibre\ stable \rightarrow cycle\ stable \rightarrow cycles\ bifurqués \rightarrow cycles\ instables\ nombreux \rightarrow réseau\ d'UPO \rightarrow chaos.$$

Cette chaîne ne doit pas être interprétée comme l'unique route possible dans tous les systèmes. Les bifurcations globales, homocliniques ou les routes quasi-périodiques peuvent intervenir. Elle offre néanmoins un fil pédagogique puissant : la complexité croissante ne fait pas disparaître les structures précédentes ; elle les transforme en éléments instables d'une organisation plus large.

La trajectoire chaotique devient alors le mouvement qui relie ces structures.

Conclusion générale — Le chaos comme architecture de structures instables

La théorie des UPO donne une réponse particulièrement riche à une question simple : que reste-t-il d'un cycle lorsque le système devient chaotique ? Il reste beaucoup plus qu'un souvenir de bifurcation. Une multitude de cycles périodiques instables peuplent l'attracteur. Ils possèdent chacun une période, des multiplicateurs de Floquet, des moyennes d'observables et des variétés stables et instables.

La trajectoire chaotique passe temporairement près de ces solutions, les suit, puis les quitte. Une bibliothèque d'UPO peut donc servir à reconstruire les statistiques, identifier les régimes, analyser les transitions, estimer la prédictibilité et concevoir des stratégies de contrôle.

La hiérarchie spectrale devient particulièrement lisible :

$$Jacobien\ des\ équilibres \rightarrow Floquet\ des\ cycles\ et\ UPO \rightarrow Lyapunov\ de\ l'attracteur \rightarrow spectre\ de\ transition\ entre\ UPO$$

Le dernier étage réintroduit les temps de relaxation au cœur même du chaos. Une matrice de transition construite sur les voisinages des UPO possède des modes propres lents qui décrivent le mélange, les quasi-invariants et la mémoire statistique du régime chaotique.

Cette approche transforme donc le chaos : d'un signal apparemment désordonné, on passe à une architecture de solutions exactes instables et de transitions entre elles. Elle fournit un pont naturel entre bifurcations, géométrie de l'espace des phases, théorie spectrale, statistiques et data science.

Bibliographie détaillée et commentée

Références générales et fondatrices

Cvitanović, P., Artuso, R., Mainieri, R., Tanner, G. & Vattay, G., *Chaos: Classical and Quantum (ChaosBook)*, ouvrage en ligne, versions régulièrement mises à jour.
C'est la référence la plus complète pour la théorie des orbites périodiques, les trace formulas, les fonctions zêta dynamiques et les *cycle expansions*. Elle explique pourquoi les UPO peuvent servir à reconstruire les propriétés statistiques d'un système hyperbolique et comment organiser efficacement la contribution d'un très grand nombre de cycles. Pour le présent document, c'est la référence théorique de fond sur le passage d'un attracteur chaotique à une description par cycles.

Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 4e éd., Springer, 2023.
Ouvrage de référence moderne sur la stabilité, Hopf, Floquet, bifurcations de cycles, Neimark–Sacker, doublement de période et bifurcations globales. Il constitue le lien théorique entre la première partie de ce document — pertes successives de stabilité — et la théorie des UPO : une UPO est un cycle que l'on continue au-delà de la région où il était éventuellement stable.

Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A., "Controlling chaos", *Physical Review Letters*, 64, 1196–1199, 1990, DOI 10.1103/PhysRevLett.64.1196.
Article fondateur de la méthode OGY. L'idée est de stabiliser, par de petites perturbations, une orbite périodique instable déjà présente dans l'attracteur. Cette référence est essentielle pour comprendre pourquoi les UPO ne sont pas seulement des objets descriptifs mais aussi des cibles de contrôle.

Pyragas, K., "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", *Physics Letters A*, 170, 421–428, 1992.
Référence fondatrice du contrôle par retard. Le retour utilise une différence entre l'état présent et l'état retardé d'une période ; le terme de contrôle s'annule sur l'orbite cible. Cette méthode reste très étudiée et relie directement période de l'UPO, stabilité de Floquet et conception de commande.

UPO et modèle de Lorenz

Maiocchi, C. C., Lucarini, V. & Gritsun, A., "Decomposing the dynamics of the Lorenz 1963 model using unstable periodic orbits: averages, transitions, and quasi-invariant sets", *Chaos*, 32, 033129, 2022, DOI 10.1063/5.0067673.
Référence centrale de cette partie. Les auteurs utilisent un ensemble complet d'UPO jusqu'à la période symbolique 14, classent les UPO selon leur proximité avec une trajectoire chaotique, étudient le *shadowing*, puis construisent une chaîne de Markov dont les états sont les voisinages des UPO. Les vecteurs propres sous-dominants de la matrice stochastique révèlent des ensembles quasi-invariants et donnent une lecture spectrale du mélange.

Maiocchi, C. C., Lucarini, V., Gritsun, A. & Sato, Y., "Heterogeneity of the attractor of the Lorenz '96 model: Lyapunov analysis, unstable periodic orbits, and shadowing properties", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 457, 133970, 2024, DOI 10.1016/j.physd.2023.133970.
Extension de la logique UPO à un modèle de plus grande dimension utilisé comme laboratoire de dynamique atmosphérique. L'article met en évidence une forte hétérogénéité de l'attracteur, des UPO ayant des nombres différents de directions instables et des fluctuations importantes des exposants de Lyapunov à temps fini. Il est particulièrement pertinent pour la prédictibilité dépendante de l'état.

UPO et turbulence

Kawahara, G. & Kida, S., "Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst", *Journal of Fluid Mechanics*, 449, 291–300, 2001.
Travail historique majeur montrant qu'une orbite périodique instable exacte de Navier–Stokes peut reproduire le cycle de régénération et les bouffées d'un écoulement turbulent de Couette. Cette publication a fortement contribué à installer l'idée des solutions invariantes exactes comme squelette de la turbulence.

Gibson, J. F., Halcrow, J. & Cvitanović, P., "Visualizing the geometry of state space in plane Couette flow", *Journal of Fluid Mechanics*, 611, 107–130, 2008.
Cette étude développe une lecture géométrique de l'espace d'état turbulent : équilibres, solutions cohérentes, variétés et trajectoires. Elle permet de comprendre la transition entre une description traditionnelle en champs de vitesse et une description de systèmes dynamiques de grande dimension.

Chandler, G. J. & Kerswell, R. R., "Invariant recurrent solutions embedded in a turbulent two-dimensional Kolmogorov flow", *Journal of Fluid Mechanics*, 722, 554–595, 2013.
Référence importante sur la recherche systématique de solutions récurrentes invariantes dans une turbulence bidimensionnelle. Elle illustre les méthodes numériques de récurrence et Newton-Krylov et montre comment des UPO peuvent être comparées aux statistiques du régime turbulent.

Page, J., Holey, J., Brenner, M. P. & Kerswell, R. R., "Exact coherent structures in two-dimensional turbulence identified with convolutional autoencoders", *Journal of Fluid Mechanics*, 991, A10, 2024, DOI 10.1017/jfm.2024.552.
Référence très moderne sur le couplage entre data science et théorie des UPO. Les autoencodeurs convolutionnels sont utilisés pour construire un espace latent qui sépare différentes familles de dynamique et fournit des conditions initiales efficaces pour la recherche d'UPO. Des orbites associées à des épisodes de forte dissipation sont ainsi trouvées. L'intérêt méthodologique est majeur : apprentissage pour explorer, solveur exact pour valider.

Wang, B., Ayats, R., Deguchi, K., Meseguer, A. & Mellibovsky, F., "Mathematically established chaos and forecast of statistics with recurrent patterns in Taylor–Couette flow", *Journal of Fluid Mechanics*, 1011, R2, 2025, DOI 10.1017/jfm.2025.151.
Étude récente particulièrement proche du fil du présent document. Les auteurs observent une cascade de Feigenbaum, construisent une carte réduite dont les points périodiques correspondent aux UPO de Navier–Stokes, puis montrent que les statistiques du régime chaotique peuvent être reconstruites à partir de ces orbites. Cette référence relie explicitement bifurcation, carte discrète, UPO et statistiques turbulentes.

Contrôle expérimental des UPO

Costa, D., Pavlovskaia, E. & Wiercigroch, M., "Feedback control of chaos in impact oscillator with multiple time-delays", *Chaos, Solitons & Fractals*, 181, 114570, 2024, DOI 10.1016/j.chaos.2024.114570.
Application expérimentale et numérique du contrôle d'une UPO dans un oscillateur à impacts. L'article étudie la stabilisation par rétroaction retardée étendue et montre que l'efficacité dépend du retard et des exposants de Floquet de l'orbite ciblée. Il illustre très concrètement le passage « identifier une UPO → analyser sa stabilité → concevoir le contrôle ».

Pourquoi conserver aussi des références plus anciennes ?

Les travaux récents ne remplacent pas les fondements : ils les rendent opératoires dans des systèmes de plus en plus grands. La théorie moderne des UPO s'appuie sur les idées de Poincaré, Smale, Ruelle et la théorie ergodique, puis sur les développements de la théorie des orbites périodiques et des *cycle expansions*. Les publications 2022–2025 montrent surtout une évolution méthodologique : on combine désormais ces concepts avec la continuation numérique, les solveurs Newton-Krylov, les opérateurs de transfert, la réduction des symétries et l'apprentissage automatique.

Pour un cours de haut niveau destiné à des data scientists, la progression recommandée serait donc : Maiocchi et al. (2022) pour comprendre le mécanisme sur Lorenz ; Kuznetsov (2023) pour le lien stabilité–Floquet ; Page et al. (2024) pour la réduction par machine learning ; Maiocchi et al. (2024) pour la prédictibilité de grande dimension ; Wang et al. (2025) pour le passage aux statistiques turbulentes ; Costa et al. (2024) pour le contrôle.