# De l’oscillateur non linéaire forcé aux cartes de Poincaré, logistique et de Hénon

*Une lecture physique, progressive et paramétrique du passage du temps continu au chaos discret*

> **Fil directeur.** Partir d’un oscillateur physique unique, construire sa carte de retour, comprendre ce que la dissipation, le forçage, la fréquence et la forme du potentiel font à cette carte, puis préciser dans quelles conditions une description logistique ou de type Hénon devient pertinente.

Ce texte reprend et développe les deux échanges précédents. Il conserve leur intuition centrale, mais ajoute un point de rigueur essentiel : la carte de Poincaré exacte d’un oscillateur différentiel lisse est bidimensionnelle et inversible. La carte logistique, non inversible, ne peut donc pas être identifiée sans précaution à cette carte exacte ; elle apparaît plutôt comme modèle réduit ou projeté lorsque l’on perd volontairement une partie de l’information dynamique. La carte de Hénon, elle, est structurellement beaucoup plus proche d’une carte de Poincaré dissipative bidimensionnelle.

## 1. Pourquoi partir d'un oscillateur unique ?

Le chaos est souvent enseigné à partir d'objets mathématiques déjà construits : la carte logistique d'un côté, la carte de Hénon ou l'attracteur de Lorenz de l'autre. Cette présentation est efficace, mais elle laisse ouverte une question physique : d'où viennent ces cartes ? Que représentent leurs paramètres ? Pourquoi une carte serait-elle unidimensionnelle dans un cas et bidimensionnelle dans un autre ?

Une manière plus physique consiste à partir d'un système continu suffisamment général pour contenir les ingrédients nécessaires : inertie, dissipation, non-linéarité et injection périodique d'énergie. L'oscillateur non linéaire amorti et forcé joue ce rôle de système mère :

$$\ddot{q}(t) + \gamma \dot{q}(t) + V'(q(t)) = F_0 cos(\Omega t).$$

Cette équation ne présuppose pas la forme du chaos. Elle dit simplement qu'une coordonnée $q$ possède une inertie $\ddot{q}$, perd de l'énergie par un terme $\gamma \dot{q}$, ressent une force interne issue d'un potentiel $V(q)$, et reçoit une excitation extérieure périodique d'amplitude $F_0$ et de pulsation $\Omega$.

## 2. Lecture physique terme par terme

Chaque terme joue un rôle distinct. Cette séparation est fondamentale, car elle permettra ensuite de lire les paramètres de la carte non comme de simples constantes mathématiques, mais comme la trace condensée de mécanismes physiques.

- $\ddot{q}(t)$ représente **l'inertie**. Elle empêche l'état futur d'être déterminé par la seule position : la vitesse porte une mémoire dynamique.
- $\gamma \dot{q}(t)$ représente **la dissipation**. Plus $\gamma$ est grand, plus la mémoire portée par la vitesse s'efface rapidement.
- $V'(q)$ représente **la géométrie interne**. Un potentiel quadratique donne une dynamique linéaire ; des termes d'ordre supérieur courbent les trajectoires, créent saturation, bistabilité, séparatrices ou franchissements de barrières.
- $F_0 cos(\Omega t)$ représente **l'injection d'énergie**. $F_0$ règle l'intensité de l'excitation ; $\Omega$ impose un temps extérieur et sélectionne les résonances.

> **Idée simple.** Le chaos dissipatif ne vient pas d'un seul terme. Il apparaît de la compétition entre injection d'énergie, dissipation et géométrie non linéaire, l'inertie assurant que le système conserve suffisamment de mémoire pour développer une dynamique de phase riche.

## 3. Mise sous forme d'un système du premier ordre

Introduisons la vitesse comme seconde variable d'état :

$$v(t) = \dot{q}(t).$$

L'équation du second ordre devient alors

$$\dot{q} = v,$$
$$\dot{v} = -\gamma v - V'(q) + F_0 cos(\Omega t).$$

À un instant donné, connaître $q$ seul ne suffit donc pas : il faut en principe connaître le couple $(q, v)$. C'est la première raison pour laquelle la carte naturelle d'un oscillateur inertiel est bidimensionnelle.

Comme le système dépend explicitement du temps, on peut introduire la phase du forçage,

$$\theta = \Omega t, \theta^{\cdot} = \Omega,$$

et écrire le système autonome étendu

$$q^{\cdot} = v,$$
$$v^{\cdot} = -\gamma v - V'(q) + F_0 cos\theta,$$
$$\theta^{\cdot} = \Omega.$$

La variable $\theta$ est périodique modulo $2\pi$. Cette périodicité fournit naturellement la section de Poincaré.

## 4. De la dynamique continue à la carte de Poincaré

La période du forçage est

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Observons le système à chaque fois que le forçage revient à la même phase, par exemple aux instants

$$t_n = t_0 + nT.$$

Définissons

$$q_n = q(t_n), v_n = v(t_n).$$

En intégrant les équations pendant exactement une période $T$, l'état $(q_n, v_n)$ est transformé en un nouvel état $(q_{n+1}, v_{n+1})$. On définit ainsi la carte de Poincaré stroboscopique :

$$(q_{n+1}, v_{n+1}) = P_{\gamma, F_0, \Omega, V}(q_n, v_n).$$

Ou, composante par composante,

$$q_{n+1} = P_1(q_n, v_n),$$
$$v_{n+1} = P_2(q_n, v_n).$$

> **Hypothèse minimale.** Aucune approximation de faible non-linéarité ou de forte dissipation n'est nécessaire pour définir $P$. La carte existe dès lors que l'équation différentielle possède une solution unique sur une période. En pratique, sa formule fermée est rarement accessible ; on la calcule numériquement ou on l'approxime localement.

La carte de Poincaré n'est donc pas une discrétisation arbitraire. Elle condense en une seule transformation tout ce qui s'est produit physiquement pendant un cycle de forçage.

## 5. Une discrétisation élémentaire pour voir les mécanismes

Il est utile de distinguer deux notions. La **discrétisation numérique** à petit pas $h$ sert à intégrer l'équation. La **carte de Poincaré**, elle, est une transformation physique sur une période $T$. La première n'est qu'un outil de calcul de la seconde.

Avec un schéma d'Euler semi-implicite très simple, l'équation de vitesse donne

$$\frac{v_{k+1}-v_k}{h} = -\gamma v_k - V'(q_k) + F_0 cos(\Omega t_k),$$

d'où

$$v_{k+1} = (1 - \gamma h)v_k - hV'(q_k) + hF_0 cos(\Omega t_k).$$

Puis, puisque $q^{\cdot} = v$,

$$q_{k+1} = q_k + hv_{k+1}.$$

En remplaçant $v_{k+1}$,

$$q_{k+1} = q_k + h(1 - \gamma h)v_k - h^2 V'(q_k) + h^2 F_0 cos(\Omega t_k).$$

Même à ce niveau très élémentaire, trois mécanismes apparaissent :

1. $(1 - \gamma h)v_k$ transporte une fraction de la vitesse précédente : c'est la **mémoire dissipative** ;
2. $-hV'(q_k)$ introduit la **géométrie et la non-linéarité** ;
3. $hF_0 cos(\Omega t_k)$ injecte **l'excitation extérieure**.

Après $N = T/h$ petits pas, la composition de ces transformations approxime une itération de la carte de Poincaré.

## 6. La dissipation devient un paramètre géométrique de la carte

Le rôle de $\gamma$ peut être établi exactement. Dans le plan $(q, v)$, le champ dynamique est

$$F(q, v, t) = \begin{pmatrix} v \\ -\gamma v - V'(q) + F_0 cos(\Omega t) \end{pmatrix}.$$

Sa divergence vaut

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial v}[-\gamma v - V'(q) + F_0 cos(\Omega t)).$$

Le premier terme est nul et le second vaut $-\gamma$, d'où

$$\nabla \cdot F = -\gamma.$$

La formule de Liouville implique qu'un petit élément d'aire $A(t)$ de l'espace des phases vérifie

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A.$$

La solution est

$$A(t) = A(0)e^{-\gamma t}.$$

Après une période $T$,

$$\frac{A(T)}{A(0)} = e^{-\gamma T}.$$

Le déterminant du Jacobien de la carte de Poincaré est donc

$$det(DP) = e^{-\gamma T} = exp\left(-\frac{2\pi\gamma}{\Omega}\right).$$

Le nombre sans dimension naturel est alors

$$\Gamma = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\Omega}.$$

$\Gamma$ mesure la quantité de dissipation accumulée pendant un cycle de forçage. C'est une manière très concrète de comparer un temps de relaxation interne, de l'ordre de $1/\gamma$, au temps extérieur $T$.

## 7. Que signifie physiquement $\Gamma$ ?

Lorsque

$$\Gamma \ll 1,$$

on a

$$e^{-\Gamma} \simeq 1 - \Gamma.$$

La contraction est faible. Une grande partie de l'information portée par la vitesse survit d'un cycle au suivant. La carte est peu contractante et sa bidimensionnalité est pleinement active.

Lorsque

$$\Gamma \sim 1,$$

une partie importante de l'aire de phase est perdue à chaque cycle, sans que la seconde variable soit totalement éliminée. C'est un domaine typique de cartes dissipatives bidimensionnelles.

Enfin, lorsque

$$\Gamma \gg 1,$$

on a

$$e^{-\Gamma} \ll 1.$$

La contraction transverse est très forte. Les trajectoires peuvent se concentrer près d'une structure de faible épaisseur et une description scalaire projetée peut devenir efficace.

> **Point de rigueur essentiel.** La carte de Poincaré exacte d'un système différentiel lisse reste inversible : elle provient d'un flot que l'on peut remonter dans le temps. Une restriction exacte à une variété invariante unidimensionnelle reste elle aussi inversible et ne peut donc pas devenir une carte logistique à repliement. Une carte logistique peut toutefois émerger comme carte de retour scalaire *projetée*, comme modèle empirique de maxima successifs, ou dans un système réellement non inversible : impacts, seuils, remise à zéro, boucle électronique discrète, générations successives, etc.

## 8. Dans quel sens peut-on parler de carte logistique ?

Supposons que l'on n'observe qu'un scalaire $x_n$ extrait de l'état complet : maximum d'amplitude, énergie d'un cycle, position au passage par une section supplémentaire, ou variable projetée. On cherche une relation réduite

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n).$$

Si la projection perd suffisamment d'information sur les variables cachées, $f_\mu$ peut devenir non inversible. Supposons qu'elle possède un maximum unique $x_c$ tel que

$$f_\mu'(x_c) = 0,$$

et

$$f_\mu''(x_c) < 0.$$

Le développement de Taylor au voisinage du maximum donne

$$f_\mu(x) = f_\mu(x_c) + \frac{1}{2} f_\mu''(x_c)(x - x_c)^2 + O\left((x - x_c)^3\right).$$

En posant

$$a = -\frac{1}{2} f_\mu''(x_c) > 0,$$

on obtient

$$f_\mu(x) \simeq f_\mu(x_c) - a(x - x_c)^2.$$

Après translation et changement d'échelle, cette géométrie appartient à la classe des cartes quadratiques unimodales, représentée par

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2,$$

ou, de manière équivalente du point de vue de l'universalité de Feigenbaum, par la carte logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n).$$

Le point universel n'est donc pas la formule $x(1 - x)$ elle-même, mais le mécanisme d'**étirement-repliement** associé à un maximum quadratique non dégénéré.

## 9. Le cas de Duffing : réduction amplitude-phase

Prenons un potentiel de Duffing à un seul puits :

$$V(q) = \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2 + \frac{1}{4}\beta q^4.$$

La force interne vaut

$$V'(q) = \omega_0^2 q + \beta q^3,$$

et l'équation devient

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q + \beta q^3 = F_0 cos(\Omega t).$$

Près de la résonance et pour une non-linéarité suffisamment faible, on cherche une réponse quasi harmonique à amplitude et phase lentes :

$$q(t) = A(t) cos(\Omega t - \phi(t)).$$

Les hypothèses du moyennage sont

$$|\dot{A}) \ll \Omega A,$$

$$|\dot{\phi}) \ll \Omega.$$

Au premier ordre, une convention usuelle conduit à

$$A^{\cdot} = -\frac{\gamma}{2}A + \frac{F_0}{2\Omega}sin\phi,$$

et

$$\phi^{\cdot} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{3\beta A^2}{8\Omega} - \frac{F_0}{2\Omega A}cos\phi.$$

Le signe de certains termes de phase dépend de la convention choisie pour $\phi$, mais la structure est robuste : amortissement de l'amplitude, pompage par le forçage, désaccord de fréquence, et décalage non linéaire proportionnel à $\beta A^2$.

## 10. Ce que l'équation d'amplitude nous apprend — et ce qu'elle ne peut pas faire

Près d'un seuil, une dynamique d'amplitude peut souvent être écrite sous la forme normale

$$A^{\cdot} = \sigma A - \kappa A^3,$$

avec $\kappa > 0$. Le terme $\sigma A$ mesure un gain net : si $\sigma < 0$, les petites amplitudes décroissent ; si $\sigma > 0$, elles croissent. Le terme $-\kappa A^3$ limite cette croissance et représente la saturation non linéaire.

Si l'on fait seulement un pas d'Euler sur une durée $T$, on écrit

$$A_{n+1} \simeq A_n + T\left(\sigma A_n - \kappa A_n^3\right),$$

soit

$$A_{n+1} \simeq (1 + \sigma T)A_n - \kappa T A_n^3.$$

Cette expression possède une courbure et peut même devenir non monotone si on l'utilise hors du régime de petit pas. Mais ce point ne doit pas être confondu avec la physique exacte.

> **Attention.** L'équation scalaire autonome $A^{\cdot} = G(A)$ ne peut pas produire de chaos déterministe. Son flot exact conserve l'ordre des états et son application temps-$T$ est monotone. Une carte non monotone obtenue par un pas d'Euler trop grand est alors un **artefact de discrétisation**, non une route physique vers le chaos. La cascade de Feigenbaum doit donc être recherchée dans une vraie carte de retour non inversible/projetée, ou dans une dynamique discrète physique, pas dans la simple intégration grossière d'une ODE scalaire.

## 11. Pourquoi la carte de Hénon est plus naturelle pour l'oscillateur

La carte de Poincaré exacte agit sur deux variables. Développons-la localement autour d'un état de référence $(q_*, v_*)$. Posons

$$x_n = q_n - q_*, y_n = v_n - v_*.$$

Une expansion de Taylor générale donne

$$x_{n+1} = a_{10}x_n + a_{01}y_n + a_{20}x_n^2 + a_{11}x_n y_n + a_{02}y_n^2 + \cdots, \; y_{n+1} = b_{10}x_n + b_{01}y_n + b_{20}x_n^2 + b_{11}x_n y_n + b_{02}y_n^2 + \cdots.$$

Sous des changements de coordonnées appropriés et dans un régime où un terme quadratique domine le repliement tandis qu'une direction est fortement contractante, une forme canonique représentative est la carte de Hénon :

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n,$$

$$y_{n+1} = bx_n.$$

En éliminant $y_n$, puisque $y_n = bx_{n-1}$,

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}.$$

Cette écriture est particulièrement parlante. Le terme $-ax_n^2$ réalise la courbure et le repliement ; le terme $bx_{n-1}$ réinjecte une partie de l'état précédent. Hénon peut donc être lu comme une carte quadratique dotée d'une **mémoire à un pas**.

## 12. Correspondance entre dissipation continue et paramètre $b$ de Hénon

Le Jacobien de la carte de Hénon est

$$DH(x, y) = (-2ax\ 1\ b\ 0).$$

Son déterminant vaut

$$det(DH) = -b.$$

La contraction d'aire par itération est donc $|b)$. Pour l'oscillateur, la contraction exacte sur une période est $e^{-\gamma T}$. On peut donc établir l'analogie structurelle

$$|b) \leftrightarrow e^{-\gamma T} = exp\left(-\frac{2\pi\gamma}{\Omega}\right).$$

Cette relation n'est **pas** une identification numérique universelle. Les changements de coordonnées, les normalisations et les approximations locales modifient les coefficients. Elle exprime néanmoins la même fonction dynamique : $b$ et $e^{-\gamma T}$ quantifient tous deux la quantité d'aire de phase, donc de mémoire transverse, conservée d'une itération à la suivante.

## 13. Analyse détaillée des paramètres : qui fait quoi ?

L'intérêt de partir de l'oscillateur est que les paramètres de la carte cessent d'être abstraits. Ils peuvent être reliés à quatre leviers physiques : injection, dissipation, résonance et géométrie du potentiel.

### 13.1. $F_0$ : le paramètre moteur le plus naturel

$F_0$ mesure l'amplitude de la force extérieure. Si tous les autres paramètres sont fixés, augmenter $F_0$ revient à éloigner progressivement le système de son comportement linéaire de petite amplitude. Le mouvement explore alors des régions où $V(q)$ est de plus en plus non linéaire.

On peut résumer cette idée par

$$F_0 \uparrow \Rightarrow amplitude\ explorée \uparrow \Rightarrow non - linéarité\ effective \uparrow.$$

Selon le potentiel et la fréquence, cette augmentation peut conduire à une réponse périodique, puis à des bifurcations, à des franchissements de séparatrice, à des fenêtres périodiques ou à un attracteur chaotique.

Ainsi, $F_0$ est souvent le **paramètre moteur** le plus intuitif : c'est la quantité que l'expérimentateur augmente pour pousser le système vers des régimes nouveaux.

## 13.2. $\gamma$ : dissipation, mémoire et dimension effective

$\gamma$ ne pousse pas directement le système vers le chaos ; il règle plutôt la manière dont l'information dynamique survit. Le temps de relaxation associé est de l'ordre de

$$\tau_\gamma \sim \frac{1}{\gamma}.$$

Comparé à la période extérieure $T$, il donne

$$\Gamma = \gamma T \sim \frac{T}{\tau_\gamma}.$$

Si $\tau_\gamma \gg T$, la vitesse varie lentement et garde une mémoire forte. Si $\tau_\gamma \ll T$, la vitesse se détend rapidement au cours d'un cycle. Cette lecture relie directement $\gamma$ à une description en termes de temps de relaxation.

En termes très simples :

- $F_0$ dit **combien on pousse** le système ;
- $\gamma$ dit **à quelle vitesse il oublie** ce qui s'est passé au cycle précédent.

## 13.3. $\Omega$ : horloge extérieure et sélecteur de résonance

$\Omega$ intervient de deux façons. D'abord, il fixe la période stroboscopique

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Ensuite, il mesure le désaccord avec les fréquences internes du système. Pour un oscillateur presque linéaire, on introduit souvent

$$\Delta \simeq \Omega - \omega_0,$$

ou, dans les équations moyennées,

$$\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega}.$$

Une variation de $\Omega$ peut donc servir elle aussi de paramètre de bifurcation : on ne change pas nécessairement la force maximale, mais la manière dont le forçage se synchronise avec l'oscillateur.

## 13.4. Les coefficients de $V(q)$ : la géométrie cachée de la carte

Le potentiel ne règle pas seulement une raideur. Il dessine le paysage dans lequel évolue la trajectoire. Sa dérivée $V'(q)$ est la force interne ; sa courbure locale détermine les fréquences ; ses minima et maxima déterminent les zones de piégeage et les barrières.

La forme de $V$ peut donc changer qualitativement la carte de Poincaré, même si $F_0$, $\gamma$ et $\Omega$ restent inchangés.

# 14. Comment la forme du potentiel change la carte

## 14.1. Potentiel harmonique : aucune source de repliement

Prenons

$$V(q) = \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2,$$

d'où

$$V'(q) = \omega_0^2 q.$$

L'équation devient linéaire :

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = F_0 cos(\Omega t).$$

Après disparition du transitoire, la réponse est périodique à la fréquence imposée. La carte de Poincaré tend vers un point fixe. Il peut y avoir amplification résonante, mais pas de chaos déterministe : il manque le mécanisme non linéaire de courbure et de repliement.

## 14.2. Duffing durcissant ou adoucissant : la fréquence dépend de l'amplitude

Prenons

$$V(q) = \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2 + \frac{1}{4}\beta q^4.$$

Si $\beta > 0$, la raideur effective augmente avec l'amplitude : l'oscillateur est **durcissant**. Si $\beta < 0$ dans un domaine où le potentiel reste physiquement pertinent, il est **adoucissant**.

Dans les deux cas, l'amplitude modifie la fréquence propre effective. Le système ne revient donc plus, après une période du forçage, avec un simple déphasage linéaire : la phase accumulée dépend de l'amplitude. C'est l'une des sources majeures de courbure de la carte de retour.

## 14.3. Double puits : séparatrice et franchissements

Prenons

$$V(q) = -\frac{a}{2}q^2 + \frac{b}{4}q^4, a > 0, b > 0.$$

Alors

$$V'(q) = -aq + bq^3.$$

Les équilibres du potentiel sont donnés par

$$-aq + bq^3 = 0,$$

soit

$$q\left(-a + bq^2\right) = 0.$$

On obtient donc

$$q_0 = 0,$$

et

$$q_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Les points $q_{\pm}$ sont les minima des deux puits ; $q = 0$ est la barrière centrale. À faible forçage, une trajectoire peut rester confinée dans un puits. Lorsque $F_0$ augmente, elle peut atteindre la séparatrice puis passer d'un puits à l'autre.

Le retour stroboscopique combine alors rotations locales, étirements près des structures instables et replis après franchissement : une géométrie particulièrement propice au chaos dissipatif.

## 15. Tableau de lecture physique des paramètres

| Paramètre | Signification physique | Effet principal sur la carte | Lecture vulgarisée |
|---|---|---|---|
| $F_0$ | Amplitude du forçage | Explore des régions plus non linéaires ; peut piloter les bifurcations | La force avec laquelle on pousse le système |
| $\gamma$ | Amortissement | Fixe la contraction $e^{-\gamma T}$ et la mémoire transverse | La vitesse à laquelle le système oublie |
| $\Omega$ | Pulsation du forçage | Fixe $T$ et la position par rapport aux résonances | Le rythme auquel on sollicite le système |
| $V(q)$ | Paysage énergétique | Fixe courbures, saturation, puits, barrières et séparatrices | La forme du terrain sur lequel le système se déplace |
| $\beta, a, b, \ldots$ | Coefficients du potentiel | Règlent l'intensité et la nature de la non-linéarité | À quel point le terrain se courbe ou se dédouble |

## 16. Logistique et Hénon : deux niveaux de description, pas deux mondes séparés

Une description logistique est pertinente lorsque l'on observe un scalaire et que la dynamique réduite est effectivement non inversible, avec une branche qui monte puis se replie :

$$x_{n+1} = \mu x_n\left(1 - x_n\right).$$

Elle est donc particulièrement naturelle pour des cartes de maxima, des variables projetées, des systèmes à seuils ou des dispositifs intrinsèquement discrets.

Une description de type Hénon est pertinente lorsque deux composantes dynamiques restent nécessaires et que la transformation sur un cycle est dissipative mais inversible :

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n,$$

$$y_{n+1} = bx_n.$$

Le paramètre $a$ mesure essentiellement la vigueur du repliement quadratique dans le modèle normalisé ; $b$ mesure la conservation d'une direction transverse et la contraction d'aire. Dans l'oscillateur, ces deux rôles proviennent respectivement de la non-linéarité du retour et de la dissipation accumulée sur un cycle.

## 17. Toutes les hypothèses, regroupées

1. **Forçage périodique.** Il permet de définir une section stroboscopique de période $T = 2\pi/\Omega$.
2. **Régularité et unicité du flot.** Elles rendent la carte de Poincaré exacte inversible sur le domaine où le flot est bien défini.
3. **Amortissement constant.** La relation simple $det(DP) = e^{-\gamma T}$ suppose $\gamma$ constant. Pour une dissipation variable, l'exponentielle contient l'intégrale de la divergence le long de la trajectoire.
4. **Réduction amplitude-phase.** Elle suppose une harmonique dominante, un voisinage de résonance et des variables $A$ et $\phi$ lentes.
5. **Forme normale d'amplitude.** $\dot{A} = \sigma A - \kappa A^3$ est une approximation locale près d'un seuil ; elle ne constitue pas à elle seule un générateur de chaos scalaire continu.
6. **Analogie avec Hénon.** Elle est locale et structurelle, non une identité universelle entre coefficients.
7. **Analogie avec la logistique.** Elle suppose une projection ou un mécanisme réellement non inversible qui autorise le repliement d'une variable scalaire.

## 18. Comment étudier concrètement un oscillateur donné ?

Une démarche pratique peut être organisée en six étapes.

1. Choisir $V(q)$, $\gamma$, $\Omega$ et un paramètre moteur, typiquement $F_0$.
2. Intégrer l'EDO sur un grand nombre de périodes en éliminant le transitoire.
3. Échantillonner $(q, v)$ à chaque période $T$ pour construire la carte de Poincaré.
4. Faire varier $F_0$ et observer points fixes, cycles, doublements de période, attracteurs et fenêtres de stabilité.
5. Calculer le Jacobien local de la carte, son déterminant et ses valeurs propres ; comparer la contraction observée à $e^{-\gamma T}$.
6. Tester si une projection scalaire $x_n$ possède une relation de retour presque fonctionnelle et unimodale. Si ce n'est pas le cas, conserver la description bidimensionnelle et rechercher une structure de type Hénon plutôt que de forcer artificiellement une carte logistique.

## 19. Conclusion : ce que la carte révèle réellement

Le passage de l'oscillateur à une carte n'est pas une simple opération de discrétisation. C'est une opération de **réduction physique** : on observe le système à une phase fixe du forçage et on condense tout ce qui s'est produit pendant un cycle dans une transformation d'état.

Cette transformation conserve la marque des mécanismes continus. La dissipation devient une contraction d'aire ; le forçage devient le paramètre qui pousse la trajectoire vers des régions nouvelles ; la fréquence fixe l'horloge de la carte et les résonances ; le potentiel détermine la courbure, les puits, les barrières et les séparatrices.

La carte logistique et la carte de Hénon prennent alors un sens physique complémentaire. La première représente un retour scalaire non inversible où l'information cachée a été éliminée ou perdue ; la seconde conserve une mémoire bidimensionnelle minimale et traduit beaucoup mieux la structure d'une carte de Poincaré d'oscillateur dissipatif.

> **Idée finale.** On peut lire la nature de la carte comme une mesure de la mémoire dynamique conservée entre deux cycles : plus la réduction perd d'information, plus une carte scalaire non inversible devient plausible ; plus les variables internes restent actives, plus une carte bidimensionnelle — puis multidimensionnelle — est nécessaire.

# Partie II — De l'équation aux dérivées partielles à la carte de retour

## 20. Du champ continu à une dynamique discrète

Lorsque l'on quitte l'oscillateur ponctuel pour une équation aux dérivées partielles, le problème change d'échelle. L'état du système n'est plus décrit par quelques nombres comme une position et une vitesse : il est décrit par un champ entier, par exemple une déformation $u(x,t)$, une température, une concentration ou une amplitude d'onde. À chaque instant, il faudrait en principe connaître la fonction $x \mapsto u(x,t)$ dans tout le domaine.

Une forme très générale d'EDP forcée périodiquement peut s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_\mu u + N(u) + F(x,t),$$

avec

$$F(x, t + T) = F(x,t).$$

L'opérateur $L_\mu$ contient la partie linéaire de la dynamique et peut dépendre d'un paramètre de contrôle $\mu$. Le terme $N(u)$ rassemble les non-linéarités. Le terme $F$ injecte une sollicitation extérieure et, parce qu'il est périodique, fournit une horloge naturelle de période $T$.

Le raisonnement qui avait conduit de l'oscillateur forcé à une carte de Poincaré reste valable. Si, à l'instant $t_n = nT$, le champ vaut

$$u_n(x) = u\big(x, t_n\big),$$

on intègre l'EDP pendant une période complète. On obtient

$$u_{n+1}(x) = u\big(x, t_n + T\big).$$

Cela définit un opérateur de retour

$$u_{n+1} = P_T[u_n).$$

La différence avec l'oscillateur est considérable : $P_T$ agit maintenant sur un espace de fonctions $H$,

$$P_T : H \to H.$$

La carte de Poincaré existe donc déjà au niveau de l'EDP, mais elle est de dimension théoriquement infinie. Le véritable problème physique devient : *combien de directions de cet espace de fonctions participent réellement à la dynamique observée ?*

Cette question fait immédiatement apparaître le spectre des modes propres.

## 21. Les modes propres comme coordonnées naturelles de l'EDP

Supposons, pour commencer, que l'opérateur linéaire possède des fonctions propres $\phi_k(x)$ vérifiant

$$L_\mu \phi_k = \lambda_k(\mu)\phi_k.$$

On développe alors le champ sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\phi_k(x).$$

Les fonctions $\phi_k$ décrivent les formes spatiales possibles et les coefficients $a_k(t)$ leurs amplitudes temporelles. La décomposition sépare donc la question « quelle forme spatiale ? » de la question « comment cette forme évolue-t-elle dans le temps ? ».

En remplaçant cette expansion dans l'EDP puis en projetant sur chaque mode, on obtient un système d'équations différentielles couplées,

$$\dot{a_k} = \lambda_k(\mu)a_k + N_k\left(a_1, a_2, \ldots\right) + F_k(t).$$

Le terme linéaire $\lambda_k a_k$ indique si le mode décroît ou croît lorsqu'il est isolé. Les termes $N_k$ assurent les échanges non linéaires entre modes. Les termes $F_k$ représentent la projection du forçage sur chacun d'eux.

Si

$$Re\lambda_k \ll 0,$$

le mode correspondant décroît rapidement. Son temps de relaxation est grossièrement

$$\tau_k \sim \frac{1}{|Re\lambda_k)}.$$

À l'inverse, lorsque

$$Re\lambda_k \simeq 0,$$

le mode devient lent. Il ne peut plus être éliminé sans perdre une partie importante de la dynamique.

Le spectre devient ainsi une sorte de tri naturel : les modes fortement amortis forment un arrière-plan rapidement asservi ; les modes proches de l'instabilité constituent les degrés de liberté actifs.

Dans le cas le plus simple,

$$Re\lambda_1 \simeq 0, Re\lambda_{k\geq 2} \ll 0,$$

et le champ peut être approché par

$$u(x,t) \simeq A(t)\phi_1(x).$$

Une dynamique de dimension infinie vient alors d'être ramenée à un petit nombre de variables. C'est la réduction modale, et c'est elle qui rend possible le passage vers des cartes de faible dimension.

## 22. Exemple détaillé : une onde non linéaire forcée

Considérons sur l'intervalle $0 < x < L$ l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta u^3 = F_0\psi(x)cos(\Omega t),$$

avec les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Cette équation peut représenter, suivant l'interprétation des coefficients, une corde, une poutre ramenée à une variable de déplacement, un milieu élastique ou une cavité possédant une non-linéarité cubique. Chaque terme a une lecture physique précise :

- $u_{tt}$ porte l'inertie ;
- $\gamma u_t$ dissipe l'énergie ;
- $-c^2 u_{xx}$ couple les points voisins et produit la propagation ;
- $\alpha u$ fixe une raideur linéaire locale ;
- $\beta u^3$ introduit la saturation ou le durcissement/adoucissement non linéaire ;
- $F_0 \psi(x) cos(\Omega t)$ injecte une énergie périodique avec une forme spatiale $\psi(x)$.

## 22.1. Les modes linéaires

Avec les conditions de Dirichlet choisies, les modes propres spatiaux sont

$$\phi_n(x) = sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

et

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} = -k_n^2 \phi_n, k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

On écrit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x).$$

Dans le problème linéaire, chaque mode possède une pulsation propre

$$\omega_n^2 = c^2 k_n^2 + \alpha = c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \alpha.$$

Le spectre $\{\omega_n\}$ nous dit donc déjà quels modes peuvent entrer en résonance avec le forçage de pulsation $\Omega$.

## 22.2. Hypothèse de mode dominant

Supposons maintenant trois choses :

1. le forçage $\psi(x)$ possède un fort recouvrement avec le premier mode ;
2. $\Omega$ est proche de $\omega_1$ ;
3. les autres modes restent suffisamment éloignés de leurs résonances et suffisamment amortis.

On peut alors poser

$$u(x,t) \simeq A(t)\phi_1(x).$$

Cette approximation n'affirme pas que les autres modes sont rigoureusement nuls. Elle affirme qu'ils sont petits ou asservis à $A(t)$ dans le régime étudié.

On obtient immédiatement

$$u_t = \dot{A}\phi_1, u_{tt} = \ddot{A}\phi_1,$$

et

$$u_{xx} = A\phi_1'' = -k_1^2 A\phi_1.$$

Le terme non linéaire vaut

$$u^3 = A^3\phi_1^3.$$

## 22.3. Projection de Galerkin

On remplace ces expressions dans l'EDP, on multiplie l'équation par $\phi_1(x)$ et on intègre de $0$ à $L$. On obtient

$$A''\int_0^L \phi_1^2 dx + \gamma A'\int_0^L \phi_1^2 dx + \left(c^2k_1^2 + \alpha\right)A\int_0^L \phi_1^2 dx + \beta A^3\int_0^L \phi_1^4 dx = F_0 cos(\Omega t)\int_0^L \psi\phi_1 dx.$$

Pour

$$\phi_1(x) = sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

les deux intégrales fondamentales sont

$$\int_0^L \phi_1^2 dx = \frac{L}{2},$$

et

$$\int_0^L \phi_1^4 dx = \frac{3L}{8}.$$

En divisant par $L/2$, il vient

$$A'' + \gamma A' + \omega_1^2 A + \frac{3\beta}{4}A^3 = F_{eff} cos(\Omega t),$$

avec

$$\omega_1^2 = c^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \alpha,$$

et

$$F_{eff} = F_0\frac{\int_0^L \psi(x)\phi_1(x)dx}{\int_0^L \phi_1^2(x)dx}.$$

Si le forçage possède exactement la forme du premier mode,

$$\psi(x) = \phi_1(x),$$

alors

$$F_{eff} = F_0.$$

Nous retrouvons donc explicitement un oscillateur de Duffing :

$$A'' + \gamma A' + \omega_1^2 A + \beta_{eff}A^3 = F_{eff} cos(\Omega t),$$

avec

$$\beta_{eff} = \frac{3\beta}{4}.$$

Le résultat est important : l'EDP n'a pas été « remplacée arbitrairement » par Duffing. Duffing est apparu comme dynamique du mode spatial dominant après projection.

## 23. Du Duffing modal à la carte de Poincaré

Le système réduit possède deux variables d'état,

$$X = (A, V), V = \dot{A}.$$

Il s'écrit

$$\dot{A} = V,$$

$$\dot{V} = -\gamma V - \omega_1^2 A - \beta_{eff} A^3 + F_{eff} cos(\Omega t).$$

Le forçage possède la période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

On observe le système à chaque période. La carte exacte du modèle réduit est donc

$$\left(A_{n+1}, V_{n+1}\right) = P_T\left(A_n, V_n\right).$$

Cette carte est bidimensionnelle. Elle conserve la position modale et sa vitesse ; elle est donc l'équivalent modal de la carte étudiée précédemment pour l'oscillateur ponctuel.

La dissipation détermine la contraction de la carte. Le champ $(A, V)$ possède la divergence

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial A} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial V} = 0 - \gamma = -\gamma.$$

Après une période,

$$|detDP_T) = e^{-\gamma T}.$$

Le nombre

$$\Gamma = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\Omega}$$

mesure donc, là encore, la quantité de mémoire transverse conservée d'un cycle au suivant.

L'EDP laisse ainsi une trace très lisible dans la carte : la structure spatiale détermine $\omega_1$ et $\beta_{eff}$ ; le forçage détermine $F_{eff}$ ; la dissipation détermine la contraction.

## 24. Dans quel sens une carte logistique peut-elle émerger ?

Il faut être précis. La carte de Poincaré exacte du Duffing modal est une carte à deux variables. La carte logistique,

$$x_{n+1} = r x_n\left(1 - x_n\right),$$

est scalaire et non inversible. Elle ne peut donc pas être identifiée sans précaution à la carte exacte d'un flot différentiel lisse de dimension finie.

La logistique apparaît lorsque l'on observe seulement un scalaire et que cette observation élimine une partie de l'information. On peut par exemple définir $M_n$ comme le maximum d'amplitude atteint au cours du $n$-ième cycle,

$$M_n = \max_{t\in[nT,(n+1)T)} |A(t)).$$

On cherche ensuite empiriquement une relation de retour

$$M_{n+1} = f\left(M_n; F_0, \gamma, \Omega, \beta_{eff}\right).$$

Si, dans une plage de paramètres, les points $\left(M_n, M_{n+1}\right)$ se concentrent près d'une courbe unique possédant un maximum quadratique $M_c$, alors

$$f'\left(M_c\right) = 0, f''\left(M_c\right) < 0.$$

Un développement local donne

$$f(M) \simeq f\left(M_c\right) - C\left(M - M_c\right)^2, C > 0.$$

Après translation et changement d'échelle, cette géométrie appartient à la classe universelle des cartes quadratiques unimodales, représentée par

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$$

ou par

$$x_{n+1} = r x_n\left(1 - x_n\right).$$

Le mot important est donc **projection**. Ce n'est pas l'EDP complète qui devient logistique ; c'est une observable scalaire, après élimination des variables cachées, qui peut présenter un retour de type logistique.

Le paramètre $r$ n'est pas égal universellement à $F_0$. Il résume l'effet combiné de $F_0$, de la résonance, de la dissipation et des coefficients du potentiel. Dans une expérience numérique, on peut cependant faire varier $F_0$ et observer que la forme de $f$ se déforme continûment ; $F_0$ joue alors le rôle de paramètre moteur de la famille de cartes.

## 25. Pourquoi Hénon est souvent plus naturel que la logistique

Si l'on conserve les deux variables $(A, V)$, la carte demeure bidimensionnelle :

$$A_{n+1} = P_1\left(A_n, V_n\right),$$
$$V_{n+1} = P_2\left(A_n, V_n\right).$$

Près d'une région où une direction est fortement contractante tandis qu'une autre subit un étirement puis un repliement quadratique, une carte de retour dissipative peut prendre, après changement d'échelle, une forme de type Hénon,

$$x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n,$$
$$y_{n+1} = b x_n.$$

Le terme $-\ ax_n^2$ représente le repliement. Le terme $y_n$ conserve une mémoire transverse. Le paramètre $b$ contrôle la contraction d'aire puisque

$$|detDH) \ = \ |b).$$

Pour le Duffing modal, la contraction exacte sur une période est

$$e^{-\gamma T}.$$

Il est donc naturel d'établir l'analogie structurelle

$$|b) \ \sim e^{-\gamma T}.$$

Cette relation n'est pas une égalité universelle entre coefficients : les changements de coordonnées et les normalisations modifient les valeurs numériques. Elle exprime un rôle physique commun. Dans les deux cas, le paramètre indique combien d'information transverse survit d'une itération à la suivante.

Ainsi, la logistique décrit bien une observable fortement projetée ; Hénon conserve au contraire une mémoire bidimensionnelle minimale. Pour une EDP réduite à un mode inertiel, Hénon est généralement plus proche de la structure de la véritable carte de Poincaré.

## 26. Deux modes actifs : la dimension de la carte augmente

La réduction à un seul mode cesse d'être légitime si deux fréquences propres deviennent simultanément importantes. Posons alors

$$u(x,t) \simeq A_1(t)\phi_1(x) + A_2(t)\phi_2(x).$$

Pour la même non-linéarité cubique, la projection de $u^3$ produit des termes d'auto-interaction et de couplage. Avec

$$\phi_1 = sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \phi_2 = sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),$$

on a

$$\int_0^L \phi_i^2 dx = \frac{L}{2},$$

$$\int_0^L \phi_i^4 dx = \frac{3L}{8},$$

et

$$\int_0^L \phi_1^2 \phi_2^2 dx = \frac{L}{4}.$$

Les termes impairs mixtes s'annulent par symétrie pour ces deux modes. On obtient alors, à ce niveau de troncature,

$$\ddot{A}_1 + \ \gamma \dot{A}_1 + \omega_1^2 A_1 + \frac{3\beta}{4} A_1^3 + \frac{3\beta}{2} A_1 A_2^2 = F_1 cos(\Omega t),$$

$$\ddot{A}_2 + \ \gamma \dot{A}_2 + \omega_2^2 A_2 + \frac{3\beta}{4} A_2^3 + \frac{3\beta}{2} A_2 A_1^2 = F_2 cos(\Omega t).$$

La dynamique possède maintenant quatre variables d'état,

$$X = \left(A_1, \dot{A}_1, A_2, \dot{A}_2\right).$$

La carte de Poincaré devient

$$X_{n+1} = P_T\left(X_n\right), X_n \in \mathbb{R}^4.$$

De nouveaux phénomènes deviennent possibles : échange d'énergie entre modes, résonances internes, battements, verrouillages de phase, quasi-périodicité et bifurcations secondaires. Il devient alors artificiel de vouloir tout forcer dans une logistique ou une Hénon à deux dimensions.

Cette étape met en lumière une idée générale : **la dimension utile de la carte est déterminée par le nombre de degrés de liberté lents qui survivent à la réduction**.

## 27. Le spectre permet d'anticiper la dimension dynamique

Le rôle du spectre peut être résumé par trois situations.

Si un seul mode est proche de l'instabilité,

$$Re\lambda_1 \simeq 0, Re\lambda_{k\geq 2} \ll 0,$$

une description par une amplitude dominante peut être suffisante.

Si deux ou quelques modes vérifient

$$Re\lambda_1 \simeq Re\lambda_2 \simeq 0,$$

plusieurs amplitudes doivent être conservées et la carte devient multidimensionnelle.

Enfin, si une bande entière de modes possède de faibles taux d'amortissement ou devient instable, la réduction à quelques coordonnées cesse d'être fiable. On entre dans le domaine du chaos spatio-temporel et, à un niveau plus avancé, de la turbulence.

Il serait excessif d'identifier mécaniquement « un mode critique » à « une dimension de carte », car un mode inertiel possède par exemple amplitude et vitesse, et une bifurcation oscillante fait intervenir une paire complexe. Mais le principe reste solide : le spectre indique combien de directions dynamiques ne peuvent plus être éliminées.

## 28. Contre-exemple instructif : réaction-diffusion scalaire

Considérons maintenant une EDP du premier ordre en temps,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu u - gu^3 + F_0\psi(x)cos(\Omega t),$$

avec les mêmes conditions de Dirichlet. Les modes sont encore

$$\phi_n(x) = sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

mais leur taux de croissance linéaire est

$$\lambda_n(\mu) = \mu - D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Le premier mode devient linéairement critique lorsque

$$\mu_c = D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Si seul ce mode est conservé,

$$u(x,t) \simeq A(t)\phi_1(x),$$

la projection donne

$$A^{\cdot} = [\mu - D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2)A - \frac{3g}{4}A^3 + F_1 cos(\Omega t).$$

Cette équation est scalaire et périodiquement forcée. Son application exacte sur une période conserve l'ordre des solutions : deux trajectoires ne peuvent pas se croiser. Sa carte stroboscopique scalaire est donc monotone. Elle ne peut pas produire, à elle seule, le repliement d'une carte logistique.

Ce contre-exemple est précieux. Il montre que « non-linéarité + forçage périodique + un mode » ne suffit pas automatiquement pour obtenir une logistique chaotique. Pour obtenir un repliement effectif, il faut une dimension cachée supplémentaire, une projection non inversible, plusieurs modes, un retard, une commutation, un impact ou un autre mécanisme qui fasse perdre de l'information à l'observation scalaire.

## 29. Exemple de sélection de modes : l'équation de Swift-Hohenberg

Une autre famille très instructive est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu u - \left(1 + \nabla^2\right)^2 u - g u^3.$$

Sur un domaine périodique, cherchons un mode de Fourier

$$u(x,t) \propto e^{ikx+\lambda t}.$$

Comme

$$\nabla^2 e^{ikx} = - k^2 e^{ikx},$$

on obtient immédiatement la relation de dispersion

$$\lambda(k) = \mu - \left(1 - k^2\right)^2.$$

Le maximum de $\lambda(k)$ se situe autour de

$$k = 1.$$

Lorsque $\mu$ franchit zéro, les modes dont le nombre d'onde est proche de $1$ sont les premiers à devenir instables. Le système ne choisit donc pas arbitrairement sa structure : le spectre linéaire sélectionne une bande spatiale préférentielle.

Si l'on ajoute un forçage périodique,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu u - \left(1 + \nabla^2\right)^2 u - g u^3 + F_0 \psi(x) cos(\Omega t),$$

on peut construire la carte stroboscopique du champ, puis la projeter sur les quelques amplitudes critiques. Lorsque plusieurs nombres d'onde voisins sont actifs, la carte réduite est naturellement multidimensionnelle.

Swift-Hohenberg illustre donc une autre route : l'EDP fournit elle-même, par son spectre, la sélection des structures qui devront ensuite être suivies dans la carte.

## 30. Comment les paramètres de l'EDP se retrouvent dans la carte

L'intérêt de la démarche est de ne pas laisser les paramètres de la carte devenir abstraits. Ils peuvent être reliés aux mécanismes de l'EDP.

### 30.1. Le forçage $F_0$

$F_0$ mesure la quantité d'énergie injectée. Lorsque $F_0$ augmente, la réponse quitte progressivement le voisinage linéaire, explore des amplitudes plus fortes et rencontre les termes non linéaires. C'est souvent le paramètre expérimental le plus naturel pour parcourir un diagramme de bifurcation.

En langage simple : $F_0$ indique **avec quelle force on pousse le système**.

### 30.2. La pulsation $\Omega$

$\Omega$ joue un double rôle. Elle fixe d'abord la période de la carte,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Elle détermine ensuite la proximité des résonances modales. Un même $F_0$ peut donc produire une réponse faible loin de la résonance et une réponse très non linéaire près d'une fréquence propre.

En langage simple : $\Omega$ indique **à quel rythme on pousse le système**.

### 30.3. La dissipation $\gamma$

Dans le modèle inertiel, $\gamma$ fixe la contraction accumulée pendant une période,

$$|detDP_T) = e^{-\gamma T}.$$

Une grande valeur de $\gamma T$ efface rapidement les directions transverses ; une petite valeur conserve davantage de mémoire.

En langage simple : $\gamma$ indique **à quelle vitesse le système oublie**.

### 30.4. La géométrie spatiale et le domaine

La longueur $L$, les conditions aux limites et l'opérateur spatial fixent le spectre des $k_n$ et des $\omega_n$. Modifier la géométrie peut donc déplacer les résonances, changer le nombre de modes actifs et modifier la dimension de la carte sans toucher au forçage.

En langage simple : la géométrie indique **quelles formes le système sait naturellement prendre**.

### 30.5. La non-linéarité

Le coefficient $\beta$ ou $g$ ne crée pas seulement une correction quantitative. Il règle les échanges entre modes, la saturation et la courbure de la carte de retour. Dans le premier mode de l'onde cubique, la projection transforme $\beta$ en

$$\beta_{eff} = \frac{3\beta}{4}.$$

Avec deux modes, le même $\beta$ génère aussi les couplages

$$\frac{3\beta}{2}A_1A_2^2 et \frac{3\beta}{2}A_2A_1^2.$$

En langage simple : la non-linéarité indique **comment les formes se déforment et se parlent entre elles**.

## 31. Une démarche pratique pour passer d'une EDP à une carte

Pour une EDP forcée donnée, le raisonnement peut être organisé en huit étapes.

1. **Définir l'EDP, le domaine et les conditions aux limites.** Sans eux, le spectre spatial n'est pas défini.
2. **Linéariser autour du régime de référence.** On obtient l'opérateur $L_\mu$.
3. **Calculer ou estimer le spectre.** On identifie les modes fortement amortis et les modes lents ou critiques.
4. **Choisir une base modale et projeter.** On obtient les équations d'amplitude et leurs coefficients de couplage.
5. **Vérifier la validité de la troncature.** Les amplitudes rejetées doivent effectivement rester faibles ou asservies.
6. **Construire la carte de Poincaré.** Avec un forçage périodique, on échantillonne toutes les périodes $T$.
7. **Choisir le niveau de description.** Si deux ou plusieurs variables restent actives, on conserve la carte multidimensionnelle. Si l'on projette sur une observable scalaire, on vérifie empiriquement si une relation de retour unimodale existe réellement.
8. **Faire varier le paramètre moteur.** On suit les points fixes, cycles, multiplicateurs de Floquet, bifurcations secondaires puis, si le chaos apparaît, les exposants de Lyapunov ou les orbites périodiques instables.

La dernière étape relie directement cette partie au cadre développé dans le document : la carte n'est pas seulement un moyen de visualiser le chaos ; elle est l'objet sur lequel la stabilité des régimes successifs peut être analysée.

## 32. Conclusion : de l'EDP à la carte, une réduction de la complexité

Le passage d'une EDP à une carte de retour peut être résumé par la chaîne

$$EDP \rightarrow spectre\ linéaire \rightarrow modes\ actifs \rightarrow équations\ d'amplitude \rightarrow carte\ de\ Poincaré.$$

La carte logistique et la carte de Hénon ne sont donc pas deux modèles qu'il faudrait plaquer arbitrairement sur une EDP. Elles correspondent à des niveaux de réduction différents.

Une carte logistique est plausible lorsqu'une observable scalaire perd suffisamment d'information pour produire un retour non inversible à maximum quadratique. Une carte de type Hénon devient naturelle lorsque deux directions dynamiques restent indispensables : l'une assure l'étirement et le repliement, l'autre conserve une mémoire transverse dissipative. Lorsque plusieurs modes restent actifs, la carte doit devenir multidimensionnelle.

Le spectre fournit ainsi le fil directeur : il indique quelles composantes du champ meurent rapidement et lesquelles doivent être conservées. À mesure qu'un paramètre rapproche de nouveaux modes de l'instabilité, la dimension dynamique effective augmente. On passe alors progressivement d'une description par quelques amplitudes à un chaos de plus haute dimension, puis éventuellement au chaos spatio-temporel.

Cette lecture donne un sens physique aux cartes : elles ne sont pas des objets abstraits posés à côté des EDP ; elles sont des condensés de la dynamique continue, construits après sélection des modes et choix de l'information que l'on décide de conserver.