Piloter le chaos par ses modes naturels

Orbites périodiques instables, radar chaotique et contrôle orienté durée de vie

Synthèse pédagogique

Août 2026

Sommaire

- Introduction — Du chaos subi au chaos piloté
- I. Contrôler le chaos par les UPO
  - Lorenz comme laboratoire ; monodromie et Floquet
  - OGY, Pyragas et commande ciblée sur la direction instable
  - Schéma-bloc et simulations de stabilisation
- II. Un radar CW chaotique : rendre irrégulier un principe déterministe
  - Noise radar et spécificité du chaos déterministe
  - Architecture du radar et traitement retard-Doppler
  - Simulations, intérêts et limites face aux radars modernes
- III. La fatigue comme critère de sélection des UPO
  - Rainflow, loi S-N et Miner
  - Méthode de la « moindre UPO »
  - Monte Carlo, capture idéale puis contrôle Floquet
  - Applications en mécanique et électronique
- IV. Vers un principe général : piloter un système par ses modes naturels
- Conclusion
- Bibliographie détaillée et commentée

Introduction — Du chaos subi au chaos piloté

Le chaos dynamique est souvent présenté par ce qu'il retire à l'ingénieur : la périodicité, la répétabilité d'une trajectoire et, à long terme, la possibilité de prévoir l'état exact du système. Cette présentation est juste, mais elle est incomplète. Un attracteur chaotique n'est pas un espace sans structure. Il contient au contraire une multitude de solutions particulières, dont des **orbites périodiques instables** — les UPO (*unstable periodic orbits*) — qui constituent autant de régimes naturels du système. Elles sont périodiques, donc organisées, mais instables : une trajectoire qui les approche peut les suivre pendant un certain temps puis s'en écarter.

Cette observation suggère un changement de perspective. Au lieu de chercher seulement à supprimer le chaos par une commande forte, on peut chercher à **utiliser les structures déjà présentes dans l'attracteur**. Le système chaotique devient alors un réservoir de comportements naturels. La fonction du contrôle n'est plus de lui imposer de l'extérieur une trajectoire étrangère, mais de choisir une trajectoire qu'il sait déjà produire et de neutraliser seulement les directions qui la rendent instable.

Cette idée sert de fil conducteur aux trois études réunies ici. La première expose le contrôle d'une UPO dans le système de Lorenz et montre pourquoi le calcul de Floquet permet d'agir précisément sur la direction instable. La deuxième détourne cette logique vers un problème de forme d'onde : un radar continu peut émettre une modulation chaotique déterministe, irrégulière mais reproductible, puis mesurer retard, amplitude et Doppler par corrélation. La troisième applique la sélection d'UPO à un problème de mécanique : parmi plusieurs orbites accessibles, on cherche celle qui produit le plus faible dommage de fatigue, puis on la stabilise.

Ces trois exemples sont volontairement simples. Les simulations sont des **démonstrateurs conceptuels** et non des modèles de qualification industrielle. Leur intérêt est de faire apparaître une architecture commune :

$$attracteur\ chaotique \rightarrow modes\ naturels\ (UPO) \rightarrow évaluation \rightarrow sélection \rightarrow stabilisation.$$

L'idée centrale peut ainsi se résumer : **le chaos peut être piloté par ses propres structures invariantes**.

I. Contrôler le chaos par les UPO

1. Le système de Lorenz comme laboratoire

Le système de Lorenz est utilisé ici comme laboratoire minimal. Il est défini par

$$\dot{x} = \sigma(y - x),$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y,$$

$$\dot{z} = xy - \beta z.$$

Pour les paramètres classiques

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3},$$

le système possède l'attracteur chaotique bien connu à deux lobes. Deux trajectoires initialement très proches se séparent exponentiellement, mais elles restent confinées dans le même ensemble attractif et en explorent les mêmes grandes régions.

Il faut bien distinguer deux niveaux. La **trajectoire chaotique** est irrégulière. L'**attracteur**, lui, possède une organisation. Une UPO est une solution exacte de la dynamique telle que

$$X_p\left(t + T_p\right) = X_p(t),$$

où $X_p = \left(x_p, y_p, z_p\right)^T$ et T_p est sa période. L'orbite est dite instable si une perturbation transverse croît au cours des périodes successives.

Cette propriété explique pourquoi une trajectoire chaotique peut sembler suivre une UPO sans jamais s'y installer. Elle arrive dans son voisinage, la « suit » pendant une fraction de temps, puis s'en échappe le long de sa direction instable. Le chaos peut donc être vu, en partie, comme une circulation entre des structures périodiques instables.

2. De la stabilité d'une UPO à la matrice de monodromie

Pour savoir comment stabiliser une UPO, il faut mesurer la croissance des perturbations autour d'elle. On écrit

$$X(t) = X_p(t) + \delta X(t).$$

À l'ordre linéaire,

$$\delta \dot{X} = J(t)\delta X,$$

avec

$$J(t) = \frac{\partial F}{\partial X})_{X_p(t)}.$$

Comme $X_p(t)$ est périodique, le Jacobien l'est aussi :

$$J\left(t + T_p\right) = J(t).$$

On introduit la matrice fondamentale $\Phi(t)$ telle que

$$\dot{\Phi}(t) = J(t)\Phi(t), \Phi(0) = I.$$

Après une période, on obtient la **matrice de monodromie**

$$M = \Phi\left(T_p\right).$$

Les valeurs propres μ_i de M sont les multiplicateurs de Floquet :

$$Mr_i = \mu_i r_i.$$

Un multiplicateur vérifiant

$$|\mu_i) > 1$$

correspond à une direction instable. Un multiplicateur proche de zéro correspond à une forte contraction. Pour un flot autonome, un multiplicateur trivial vaut 1 et correspond au déplacement de phase le long de l'orbite.

Ce calcul transforme la question « pourquoi l'orbite est-elle instable ? » en une question beaucoup plus exploitable : **dans quelle direction faut-il agir ?**

3. Deux familles historiques : OGY et Pyragas

La méthode d'Ott, Grebogi et Yorke (OGY) exploite le fait qu'une trajectoire chaotique finit naturellement par passer près de nombreuses UPO. Lorsqu'elle arrive près de l'orbite choisie, une petite variation d'un paramètre accessible est appliquée afin de déplacer localement la trajectoire vers la variété stable de l'UPO. Le contrôle peut donc rester faible parce qu'il attend une circonstance favorable au lieu de contraindre continuellement le système.

Pyragas a proposé une autre idée particulièrement élégante : le contrôle retardé

$$u(t) = K[X\left(t - T_p\right) - X(t)).$$

Lorsque la trajectoire est exactement sur l'UPO,

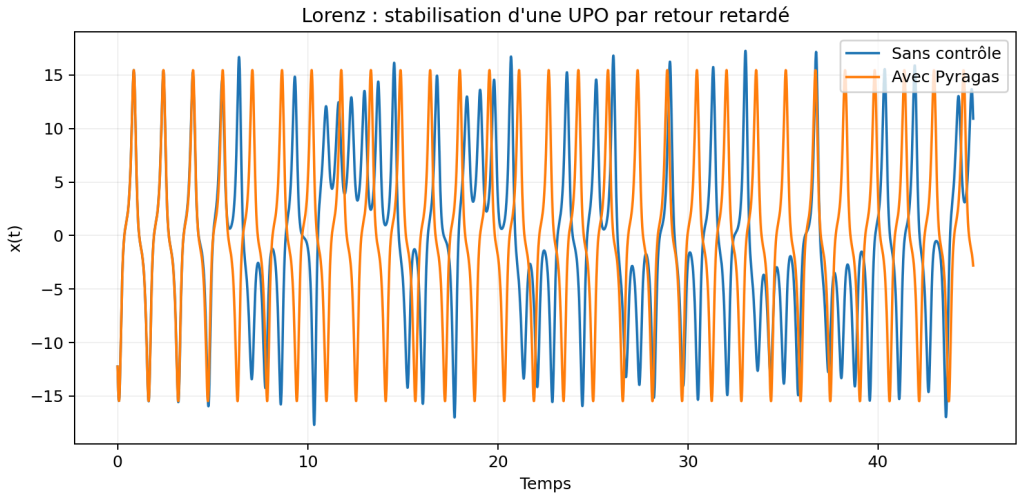
$$X\left(t - T_p\right) = X(t),$$

donc

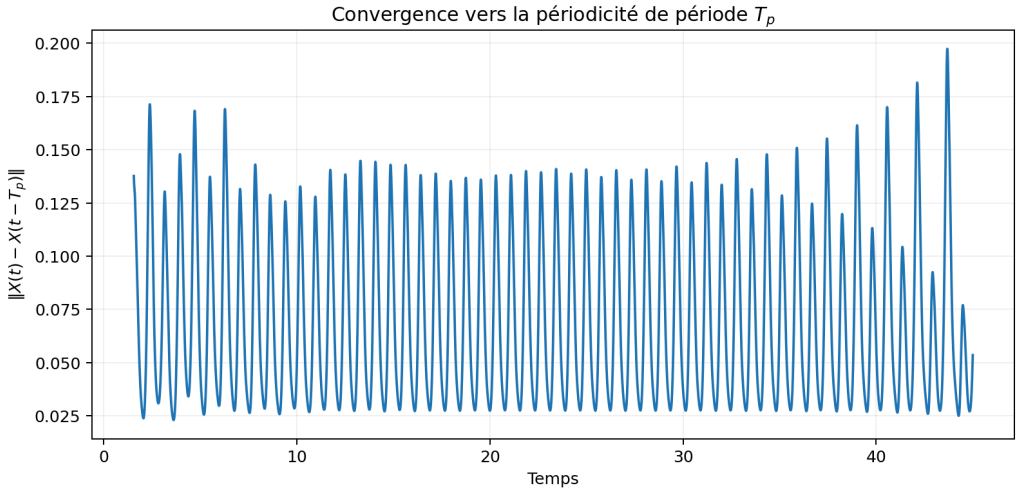
$$u(t) = 0.$$

Le contrôle est alors dit **non invasif** : il disparaît lorsque l'objectif est atteint. Cette propriété explique l'intérêt expérimental de la méthode.

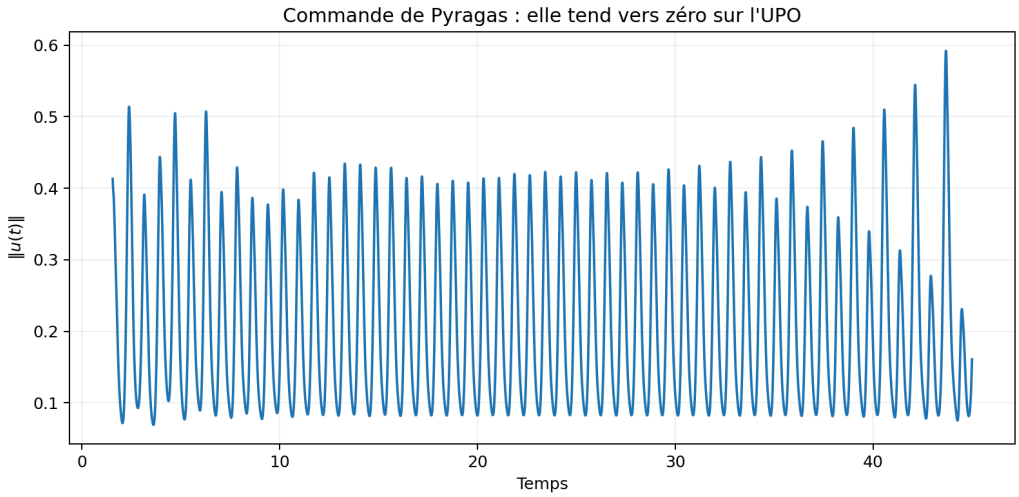
La simulation simple réalisée sur Lorenz avec un gain scalaire de Pyragas a montré un fort *shadowing* de l'UPO, mais pas une stabilisation parfaite. C'est un résultat pédagogique important : connaître la période ne suffit pas toujours. La direction de la commande doit tenir compte de la géométrie réelle de l'instabilité.



Simulation du contrôle retardé : le signal contrôlé quitte le comportement chaotique pour suivre une dynamique presque périodique.



Erreur de périodicité $\| X(t) - X\left(t - T_p\right) \|$ *: le contrôle retardé réduit fortement l'écart à l'UPO.*



Norme de la commande retardée : elle décroît lorsque la trajectoire se rapproche du régime périodique.

4. Le contrôle ciblé par la direction instable de Floquet

Pour aller plus loin, on peut utiliser directement le mode instable de Floquet. Soient $r_u(t)$ le mode droit instable et $l_u(t)$ son mode adjoint gauche, normalisés de telle façon que

$$l_u(t)^T r_u(t) = 1.$$

Si

$$e(t) = X(t) - X_p(t),$$

alors

$$\alpha_u(t) = l_u(t)^T e(t)$$

mesure l'amplitude de l'erreur dans la direction instable. Une commande minimale peut prendre la forme

$$u(t) = -\, k r_u(t) \alpha_u(t).$$

La commande ne cherche donc pas à corriger tout l'état. Elle corrige principalement la composante qui provoquerait l'échappement hors de l'UPO.

Dans une simulation sur une UPO courte de Lorenz de période voisine de

$$T_p \simeq 1.55865,$$

le multiplicateur instable était de l'ordre de

$$\mu_u \simeq 4.71,$$

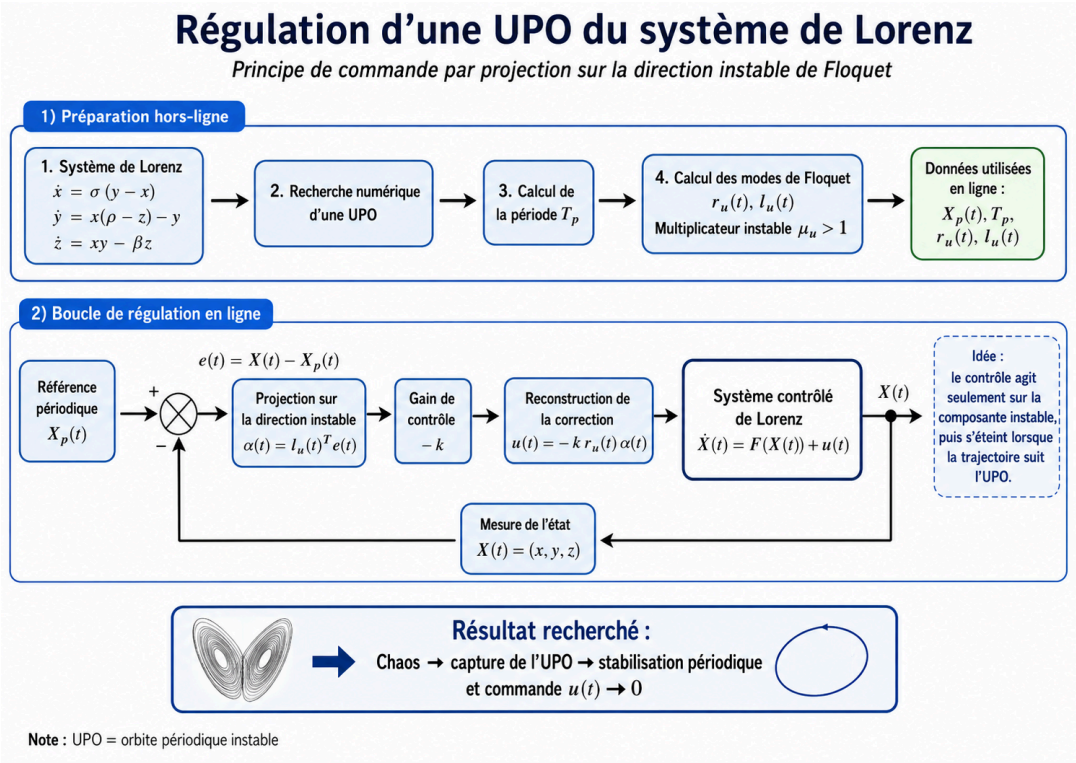
soit un exposant de Floquet

$$\lambda_u = \frac{ln|\mu_u)}{T_p} \simeq 0.995.$$

Avec un gain $k = 2$, supérieur au taux naturel d'expansion, la trajectoire a été stabilisée numériquement sur l'UPO et la commande s'est éteinte à mesure que l'erreur devenait très faible.

5. Schéma-bloc du contrôle d'une UPO

Le schéma suivant synthétise la boucle de régulation. Il sépare la préparation hors ligne — identification de l'UPO, période, modes de Floquet — et l'action en ligne — mesure, estimation de l'erreur, projection sur la direction instable et correction.



Principe de régulation d'une UPO du système de Lorenz.

Le point essentiel du schéma est le bloc de projection. Une boucle classique utiliserait directement l'erreur vectorielle $e(t)$. Ici, on extrait d'abord

$$\alpha_u(t) = l_u(t)^T e(t),$$

puis on reconstruit la correction le long de $r_u(t)$. La connaissance de Floquet transforme donc une commande brute en **commande géométriquement ciblée**.

Cette architecture ouvre une idée plus générale : si l'attracteur contient plusieurs UPO, on peut non seulement stabiliser une orbite, mais aussi **choisir laquelle stabiliser en fonction d'un objectif de mission**.

II. Un radar CW chaotique : rendre irrégulier un principe déterministe

6. Le point de départ : qu'est-ce qu'un noise radar ?

Un *noise radar* remplace la forme d'onde radar traditionnelle par un signal aléatoire ou pseudo-aléatoire. Le récepteur conserve ou reconstruit une réplique du signal émis et détecte les cibles par corrélation. Pour un écho simple,

$$r(t) = As(t - \tau)e^{j2\pi f_D t} + n(t),$$

où A est l'amplitude complexe de l'écho, τ le retard, f_D le Doppler et $n(t)$ le bruit.

Le principe est donc proche de celui d'un radar à compression d'impulsion : la forme d'onde est choisie pour que son autocorrélation soit concentrée autour de l'origine. La distance est obtenue par le retard et la vitesse radiale par le Doppler. Les travaux sur les noise radars mettent notamment en avant les propriétés LPI/LPE, la coexistence spectrale et la possibilité de générer de nombreuses formes d'onde de type bruit.

Des démonstrateurs ont été testés par Fraunhofer FHR et le Turkish Naval Research Center Command. La littérature récente insiste cependant sur une nuance importante : un signal de noise radar n'est pas « invisible ». Si sa bande et sa durée sont connues, un récepteur énergétique peut toujours détecter une émission. L'intérêt opérationnel porte surtout sur la difficulté d'**exploiter** la forme d'onde, de la caractériser précisément et de générer une réponse cohérente adaptée.

7. La variante étudiée : un bruit qui n'est pas aléatoire

Le principe étudié ici consiste à remplacer le bruit aléatoire par une trajectoire chaotique déterministe. On part du système de Lorenz, puis on utilise par exemple sa variable $x_L(t)$ pour moduler la phase d'une onde continue :

$$\phi(t) = mx_L(t),$$

$$s_{RF}(t) = cos\left(2\pi f_c t + \phi(t)\right).$$

En bande de base complexe, on peut écrire

$$s(t) = e^{j\phi(t)}.$$

L'enveloppe peut ainsi rester constante, ce qui est favorable à l'amplification RF, tandis que la phase porte une évolution large bande et irrégulière.

Le paradoxe est précisément ce qui rend la proposition intéressante : le signal est **imprévisible trajectoriellement**, mais il n'est pas aléatoire. Si le récepteur connaît les paramètres du générateur et son état, il peut reproduire la réplique nécessaire à la corrélation.

8. Schéma-bloc du radar

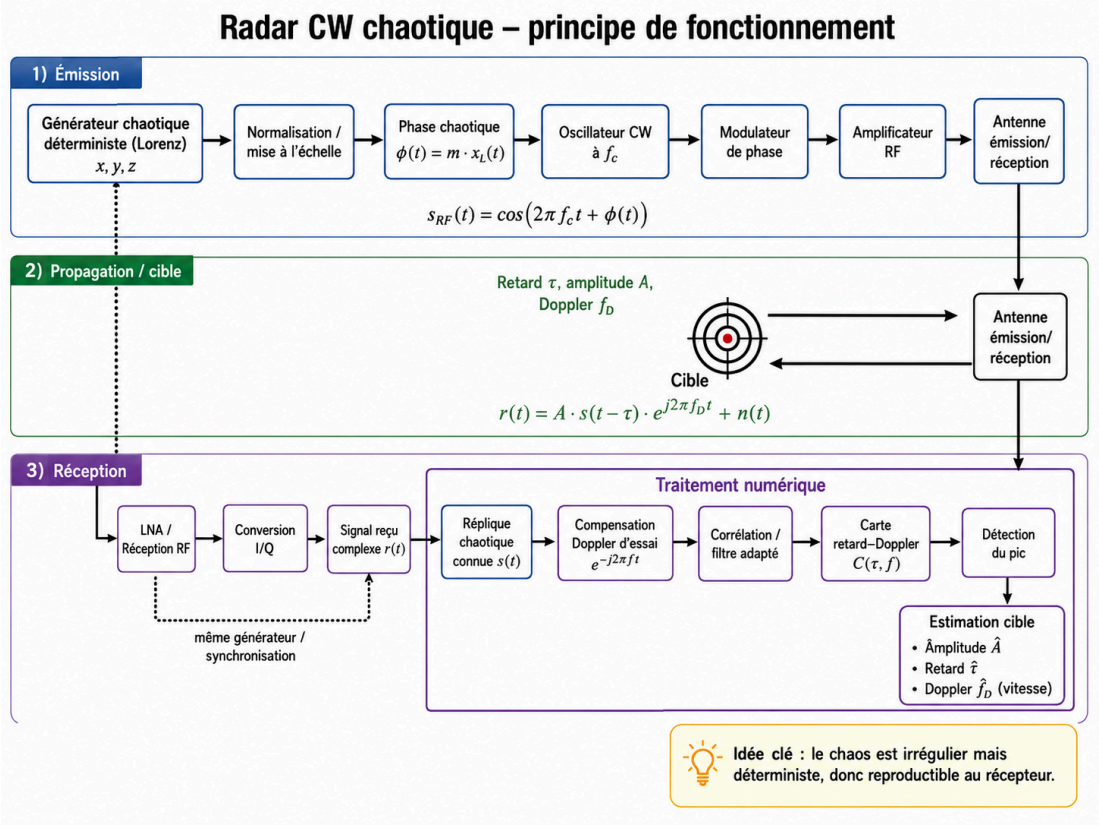


Schéma-bloc du radar CW à modulation chaotique.

Le schéma distingue trois étages.

À l'émission, le générateur chaotique produit $x_L(t)$, qui est normalisé et converti en phase. Une porteuse continue à f_c est ensuite modulée. Le radar peut donc être vu comme un **CW à phase chaotiquement modulée**, plutôt que comme un CW monochromatique.

La cible introduit trois grandeurs principales : un retard τ, une amplitude A et un Doppler f_D. Au récepteur, la conversion I/Q fournit le signal complexe $r(t)$. Une réplique connue de $s(t)$ est utilisée dans une banque de corrélateurs retard-Doppler.

Pour chaque hypothèse de Doppler f, on calcule

$$C(\tau, f) = |\int r(t) s^{*}(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt).$$

Le maximum de cette fonction fournit les estimateurs

$$\left(\tau\hat{},f\hat{}_{D}\right)=\ arg\ \max_{\tau,f}\ C(\tau,f).$$

Une fois le retard et le Doppler compensés, une estimation cohérente de l'amplitude peut être écrite

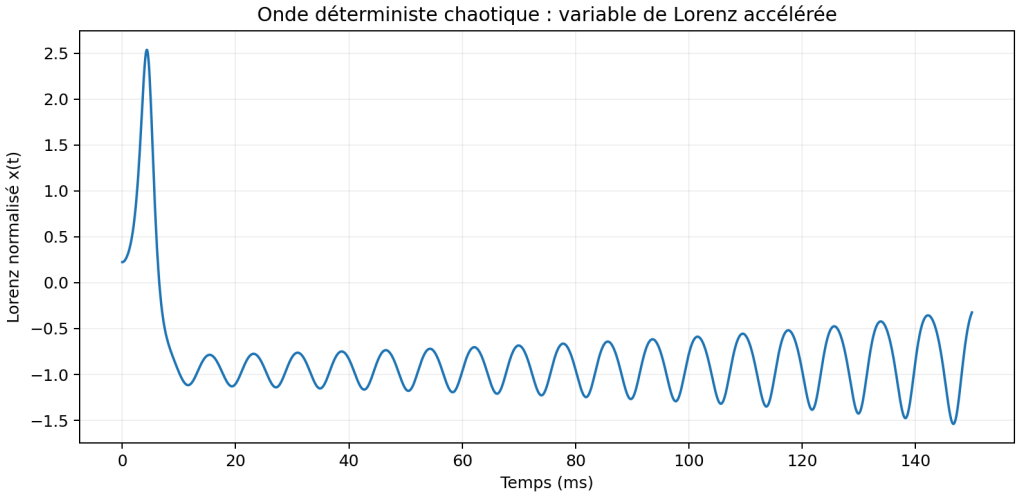
$$A\hat{}\ =\frac{|\sum_{n}^{*}s\left(t_{n}-\tau\hat{}\right)e^{-j2\pi f\hat{}_{D}t_{n}}r\left(t_{n}\right)|}{\sum_{n}|s\left(t_{n}-\tau\hat{}\right)|^{2}}.$$

9. Résultats de la simulation radar

La simulation pédagogique a utilisé un signal de Lorenz accéléré dans le temps pour lui donner une bande utile dans l'échelle du modèle. La phase était modulée avec un indice $m\ =\ 3$. La cible simulée avait

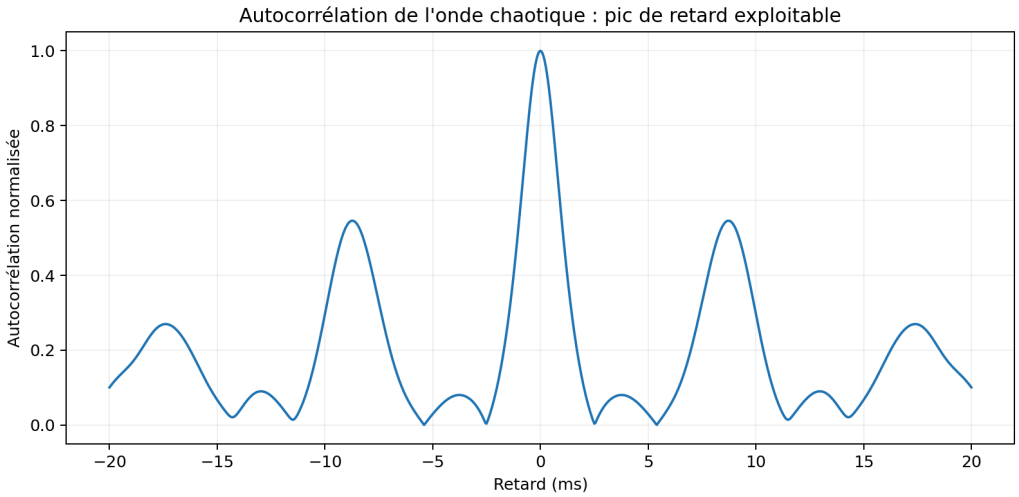
$$A\ =\ 0.35,\tau\ =\ 15ms,f_{D}\ =\ 180Hz.$$

Un bruit complexe d'environ 0 dB de SNR a été ajouté.



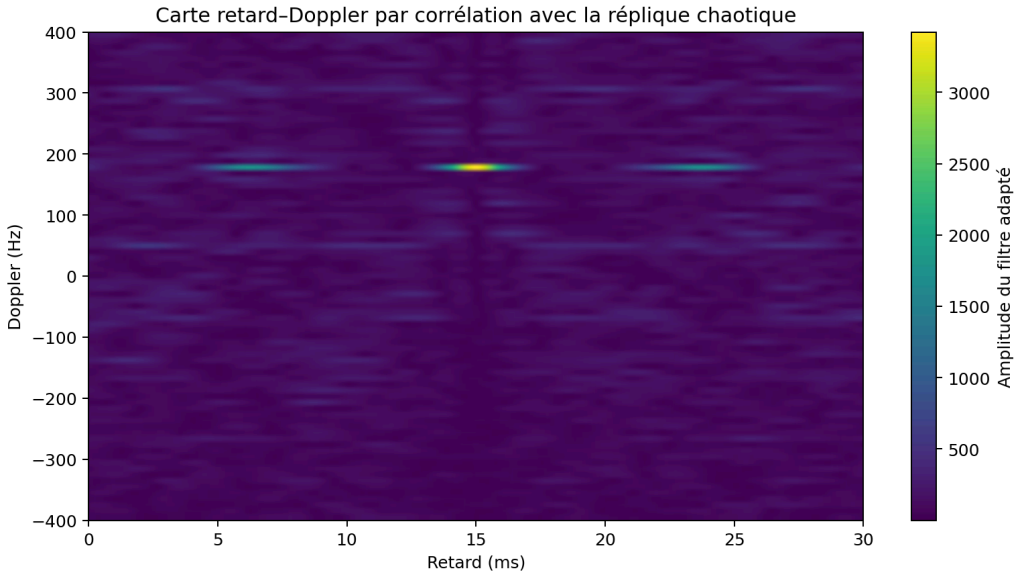
Variable de Lorenz utilisée comme modulateur déterministe chaotique.

La première courbe rappelle une précaution importante : il ne suffit pas d'utiliser le mot « chaos ». La bande temporelle du générateur doit être adaptée à la fonction radar. Dans un système réel, cette adaptation résulterait soit d'un oscillateur chaotique physique rapide, soit d'une mise à l'échelle numérique.



Autocorrélation du signal chaotique : la présence d'un pic central rend possible l'estimation du retard.

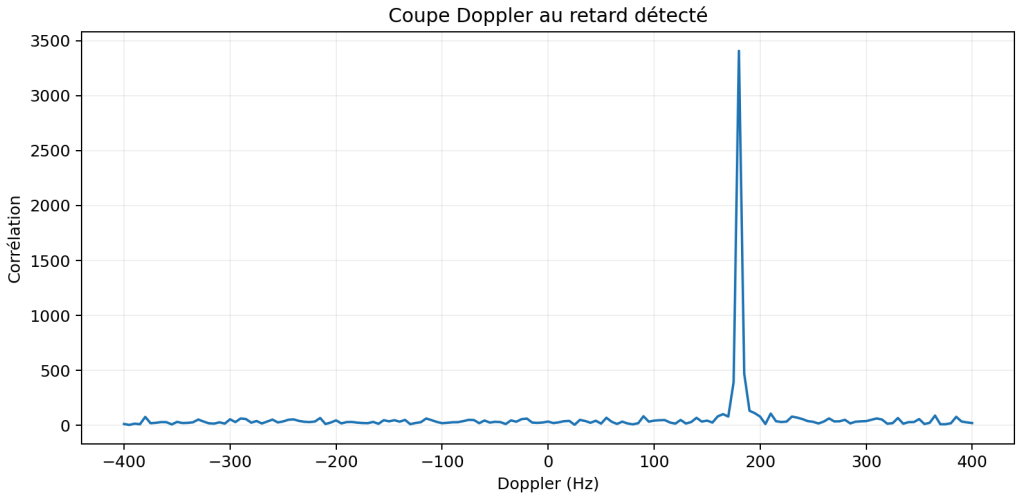
L'autocorrélation présente un pic central nettement identifiable. Sa largeur gouverne directement la résolution en retard. Les lobes secondaires ne sont pas nuls : ils constituent un critère de conception de la forme d'onde, exactement comme pour un noise radar classique.



Carte retard-Doppler de la simulation. Le maximum apparaît au voisinage de 15 ms et 180 Hz.

La carte retard-Doppler est le résultat le plus important de la simulation. Malgré le bruit, le maximum est localisé au couple attendu. Le traitement retrouve

$$A\hat{} \simeq 0.351, \tau\hat{} = 15.00ms, f\hat{}_D = 180Hz.$$



Coupe Doppler au retard détecté : le pic se situe à 180 Hz.

Cette simulation ne démontre évidemment pas la supériorité opérationnelle d'un radar chaotique. Elle valide un point plus limité et plus utile : **une forme d'onde chaotique déterministe peut remplir le rôle d'un code radar continu et être traitée par corrélation retard-Doppler**.

10. Intérêt comparé : radar classique, noise radar et radar chaotique

Le tableau suivant reprend les avantages potentiels et les limites discutés. La colonne « radar chaotique » décrit un concept de recherche ; elle ne doit pas être lue comme une performance industrialisée.

Critère	FMCW / radar classique	Noise radar	CW chaotique déterministe
Maturité technologique	Très élevée	Démonstrateurs et recherche avancée	Recherche / démonstrateur conceptuel
Mesure distance-Doppler	Très maîtrisée	Possible par corrélation	Possible par corrélation
Forme d'onde d'apparence bruitée	Variable	Oui	Oui
Reproductibilité	Déterministe simple	Référence mesurée ou séquence connue	Générateur dynamique connu
Diversité de formes d'onde	Paramétrique	Très grande	Très grande via état initial et paramètres
LPI/LPE potentiel	Dépend de la modulation	Motivation importante	Potentiel similaire à étudier, non démontré supérieur

Critère	FMCW / radar classique	Noise radar	CW chaotique déterministe
Coexistence de plusieurs radars	Gérable mais coordination nécessaire	Signaux quasi-orthogonaux possibles	Générateurs/états différents potentiellement quasi-orthogonaux
Radar + communication	Possible	Possible	Très naturel dans la littérature chaos-RadComm
Adaptation de la forme d'onde	Paramètres de chirp/code	Tailoring statistique	Paramètres du chaos + changement de régime dynamique
Synchronisation	Relativement simple	Référence du bruit nécessaire	Point critique : synchronisation du générateur
Doppler	Très bien maîtrisé	Peut être délicat selon la waveform	Doit être optimisé conjointement au chaos

11. Quel avantage spécifique sur un noise radar classique ?

Le premier avantage potentiel n'est **pas** d'être « plus aléatoire ». Le chaos déterministe est au contraire moins aléatoire au sens mathématique qu'un vrai bruit. L'intérêt est la combinaison de quatre propriétés.

Premièrement, la forme d'onde peut être régénérée par un système dynamique de faible dimension, au lieu d'être stockée comme une très longue séquence. Deuxièmement, ses propriétés peuvent être réglées par les paramètres dynamiques et par la fonction d'observation $h(X)$. Troisièmement, un générateur chaotique peut, en principe, changer de régime sans changer d'architecture matérielle. Quatrièmement, la théorie des UPO suggère une possibilité plus originale : **piloter le générateur lui-même entre plusieurs régimes naturels**.

On pourrait ainsi imaginer un même oscillateur offrant différents comportements : chaos large bande pour la recherche, orbite contrôlée ou régime plus cohérent pour une phase de poursuite, puis retour au chaos. Cette idée reste spéculative, mais elle distingue conceptuellement le radar chaotique d'un simple noise radar : la forme d'onde n'est plus seulement tirée dans une famille statistique, elle devient la sortie d'un **système dynamique pilotable**.

La littérature récente sur les formes d'onde chaotiques pour radar-communication confirme que cette direction n'est plus purement théorique. Des travaux de 2023 et 2024 montrent des fonctions d'ambiguïté de type *thumbtack*, des architectures RadComm et des démonstrateurs optoélectroniques. En revanche, aucune de ces références ne suffit à

affirmer qu'un radar chaotique est globalement supérieur à un noise radar ou à un FMCW moderne : la comparaison doit rester fonction de la mission.

III. La fatigue comme critère de sélection des UPO

12. Pourquoi une UPO n'est pas automatiquement moins dommageable

L'intuition initiale pourrait être la suivante : une trajectoire périodique étant plus régulière qu'une trajectoire chaotique, elle devrait être moins sévère pour une structure mécanique. La simulation a montré que cette intuition est fausse en général.

La fatigue ne « voit » pas le caractère chaotique ou périodique d'un signal. Elle voit une suite de cycles d'amplitudes différentes. Une UPO peut être extrêmement dommageable si elle répète continuellement un grand cycle. À l'inverse, un signal chaotique peut contenir beaucoup de petits cycles et relativement peu de grandes excursions.

La comparaison doit donc être faite avec un outil de fatigue, ici le comptage rainflow et une règle de Miner simplifiée.

13. Rainflow, loi S-N et Miner

Le comptage rainflow transforme une histoire irrégulière de contrainte $\sigma(t)$ en une collection de cycles caractérisés par leurs amplitudes $S_{a,i}$ et leurs nombres n_i. La pratique est normalisée dans ASTM E1049.

Dans le démonstrateur, la durée de vie à amplitude constante est modélisée par une loi de Basquin simplifiée :

$$N_f(S_a) = N_{ref}\left(\frac{S_{ref}}{S_a}\right)^m.$$

Le dommage de Miner est alors

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_f(S_{a,i})}.$$

La rupture conventionnelle est associée à

$$D = 1.$$

Si le signal observé sur une durée T_{obs} est considéré comme statistiquement représentatif, une durée de vie équivalente est estimée par

$$L \simeq \frac{T_{obs}}{D}.$$

Les valeurs numériques retenues étaient pédagogiques :

$$N_{ref} = 10^6, S_{ref} = 80MPa, m = 5.$$

Miner est volontairement simple. La littérature moderne rappelle qu'il néglige l'ordre des séquences et de nombreux effets non linéaires ; il est donc utilisé ici comme **métrique comparative**, pas comme modèle de certification.

14. Première comparaison : une UPO courte peut être pire que le chaos

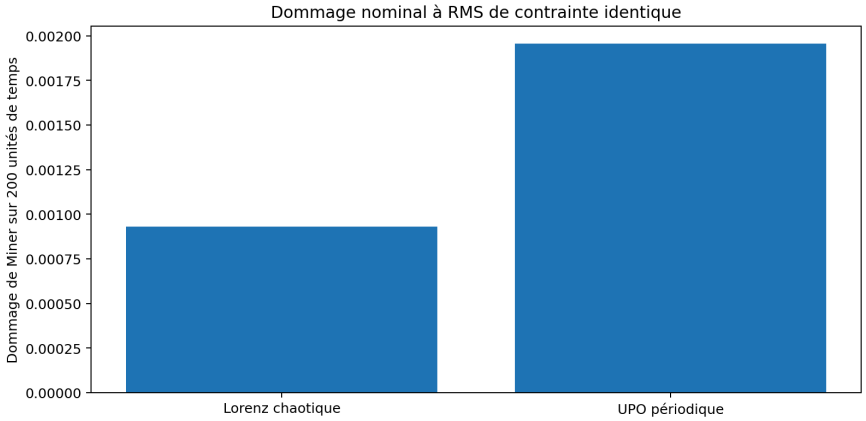
Dans une première simulation, le chaos et une UPO courte ont été normalisés à la même RMS de contrainte. Le dommage de Miner obtenu sur la même durée était environ

$$D_{chaos} \simeq 9.30 \times 10^{-4},$$

contre

$$D_{UPO} \simeq 1.96 \times 10^{-3}.$$

La durée de vie de l'UPO n'était donc qu'environ la moitié de celle du chaos. La raison apparaissait immédiatement dans les amplitudes rainflow : l'UPO répétait un grand cycle de façon systématique.



Exemple où l'UPO périodique est plus dommageable que le chaos, malgré une RMS identique.

Ce résultat constitue une règle de méthode : **il ne faut pas chercher une UPO quelconque ; il faut chercher la meilleure UPO pour le critère choisi**.

15. La méthode de la « moindre UPO »

Supposons qu'on dispose d'une bibliothèque

$$\{UPO_1, UPO_2, ..., UPO_N\}.$$

Pour chaque orbite, on calcule son spectre rainflow et son taux de dommage

$$\dot{D}_p = \frac{D_p}{T_p^{obs}}.$$

Le choix le plus simple est alors

$$UPO_{opt} = arg\ \min_p\ \dot{D}_p.$$

Dans une logique de contrôle réelle, on peut ajouter l'énergie de commande et le temps de capture :

$$J_p = w_D \dot{D}_p + w_E E_{u,p} + w_T T_{capture,p}.$$

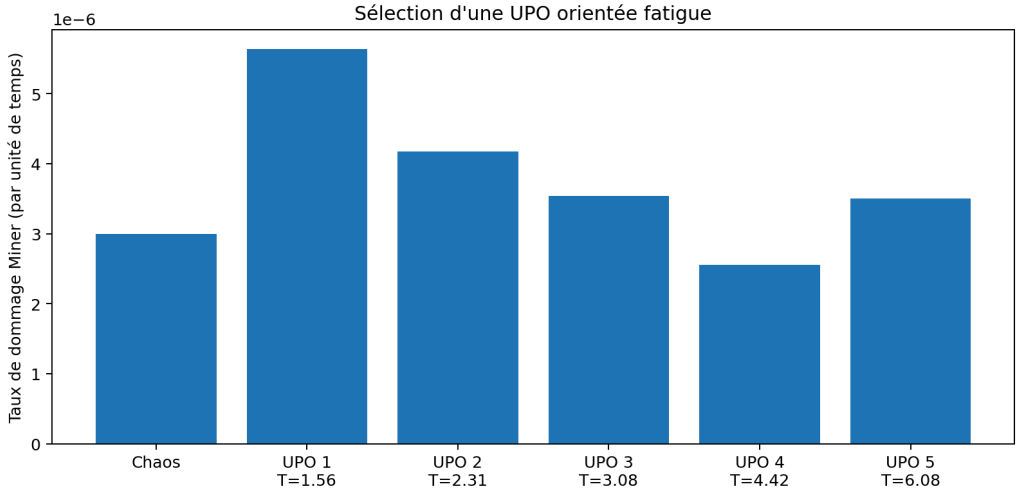
Cette formulation change profondément la logique du contrôle du chaos. Le but n'est plus seulement de rendre le système périodique. Le but est de **choisir le régime périodique qui remplit le mieux la mission**.

16. Recherche de cinq UPO et classement par dommage

Cinq UPO ont été recherchées numériquement dans le Lorenz classique, avec des périodes approximatives

$$T = (1.56, 2.31, 3.08, 4.42, 6.08).$$

La même conversion entre $x(t)$ et contrainte a été appliquée à toutes les orbites et au chaos. Le classement obtenu est représenté ci-dessous.

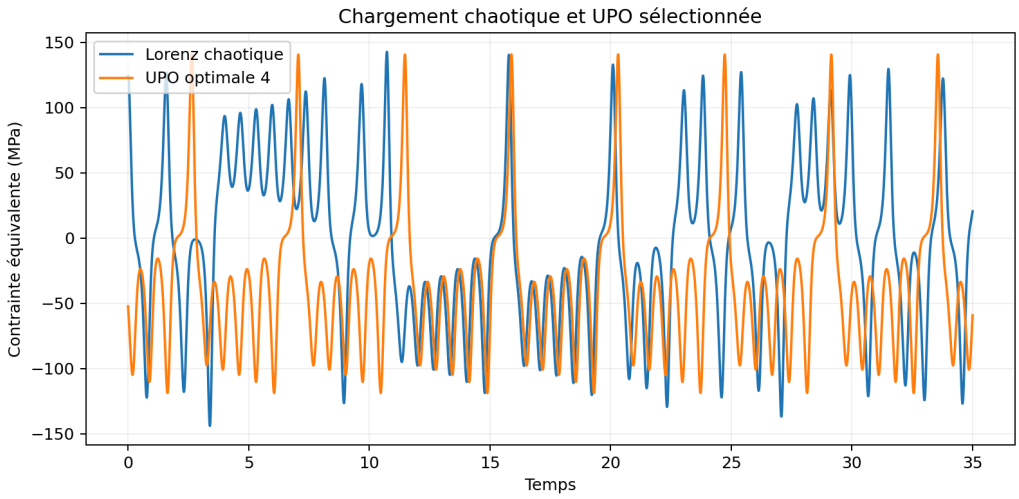


Taux de dommage de Miner du chaos et de cinq UPO. L'UPO 4 présente le plus faible dommage dans cette bibliothèque.

L'UPO 4, de période

$$T_4 \simeq 4.418,$$

était la seule, parmi les cinq testées, à offrir un gain net important par rapport au chaos de référence. Le gain nominal de vie était d'environ 17 % dans cette première comparaison.



Comparaison temporelle du chargement chaotique et de l'UPO 4 sélectionnée.

La courbe temporelle montre pourquoi la simple RMS est insuffisante. Les deux signaux peuvent atteindre des niveaux comparables, mais la **distribution des excursions** diffère. C'est cette distribution, pondérée par la pente très non linéaire de la loi S-N, qui gouverne le dommage.

17. Monte Carlo sur le matériau et sur la variabilité du chargement

Une première validation probabiliste a introduit une dispersion de la loi S-N, de la pente et du niveau de contrainte, ainsi qu'une variabilité entre fenêtres chaotiques. Sur 5000 tirages, la médiane de durée de vie est passée approximativement de

$$3.05 \times 10^5$$

pour le chaos à

$$3.83 \times 10^5$$

pour l'UPO 4, soit un gain médian voisin de 25 %. Le quantile défavorable restait également supérieur.

Cette simulation montrait que l'avantage n'était pas uniquement un artefact d'une réalisation nominale. Mais elle mélangeait plusieurs sources d'incertitude. Pour isoler l'effet du chaos lui-même, un deuxième Monte Carlo a donc fait varier uniquement les conditions initiales.

18. Monte Carlo sur les conditions initiales uniquement

Les conditions initiales ont été tirées suivant

$$X(0) \sim N\left([1\ 1\ 1\ ), diag\left(2^2, 2^2, 2^2\right)\right).$$

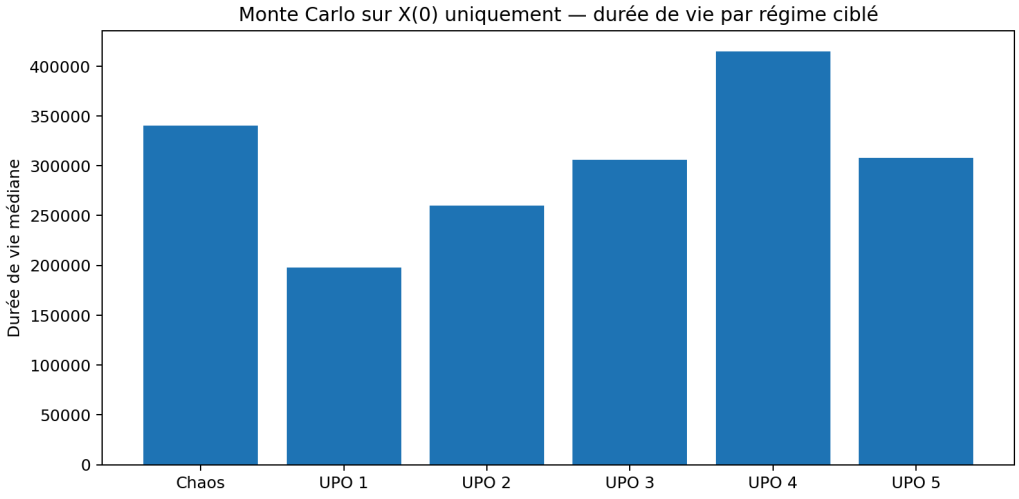
Le matériau, la loi S-N et la conversion en contrainte étaient identiques dans tous les essais. Pour le chaos libre, la durée de vie médiane était d'environ

$$3.41 \times 10^5,$$

avec une dispersion relativement limitée. Ce résultat est intéressant en lui-même : les trajectoires sont extrêmement sensibles à $X(0)$, mais les statistiques intégrées de l'attracteur sont beaucoup plus stables.

Les cinq UPO ont ensuite été comparées en supposant une capture idéale au premier passage suffisamment proche. Les vies médianes obtenues étaient approximativement :

Régime	Période	Vie médiane	Gain vs chaos
Chaos libre	—	3.405×10^5	1.00
UPO 1	1.559	1.978×10^5	0.58
UPO 2	2.306	2.602×10^5	0.76
UPO 3	3.084	3.059×10^5	0.90
UPO 4	4.418	4.146×10^5	1.22
UPO 5	6.084	3.081×10^5	0.91



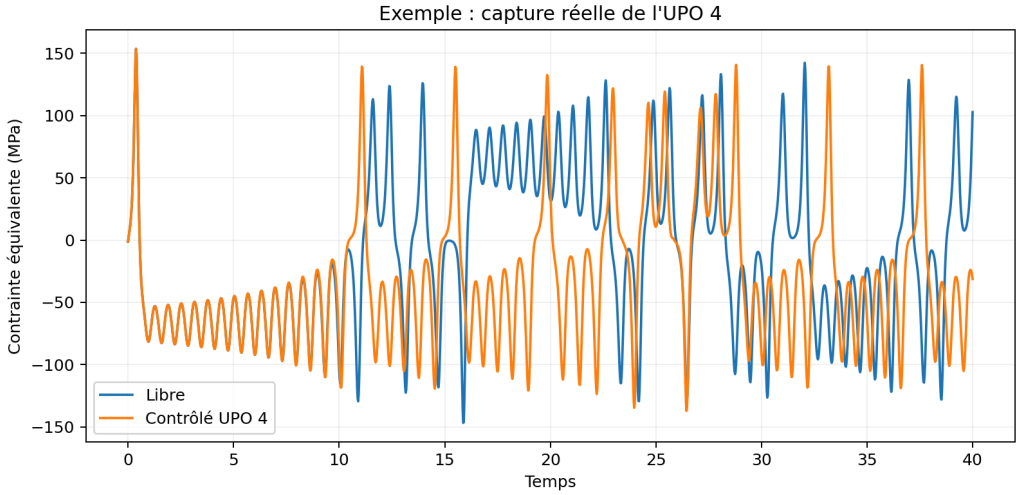
Monte Carlo sur les conditions initiales uniquement : l'UPO 4 reste la meilleure des cinq orbites testées.

Cette expérience montre que le classement des UPO ne disparaît pas lorsqu'on varie les conditions initiales. Elle montre aussi qu'une UPO favorable doit être évaluée non seulement par son dommage intrinsèque, mais par son **accessibilité** depuis l'état courant.

19. Remplacer la capture idéale par le contrôle Floquet

La dernière étape consistait à abandonner l'hypothèse artificielle d'une capture instantanée et à appliquer un véritable contrôle basé sur le mode instable de Floquet de l'UPO 4.

La trajectoire évolue d'abord librement. Lorsqu'elle entre dans un voisinage de l'UPO, la commande est activée. Dans l'expérience Monte Carlo, 100 conditions initiales ont été tirées. Le taux de capture observé a été de 100 % sur l'horizon choisi, avec un temps de capture médian proche de 13.25 unités de temps.



Exemple de trajectoire libre puis contrôlée vers l'UPO 4. La ligne de capture marque l'activation du contrôle.

Les résultats moyens étaient :

$$L_{libre,50} \simeq 3.62 \times 10^5,$$

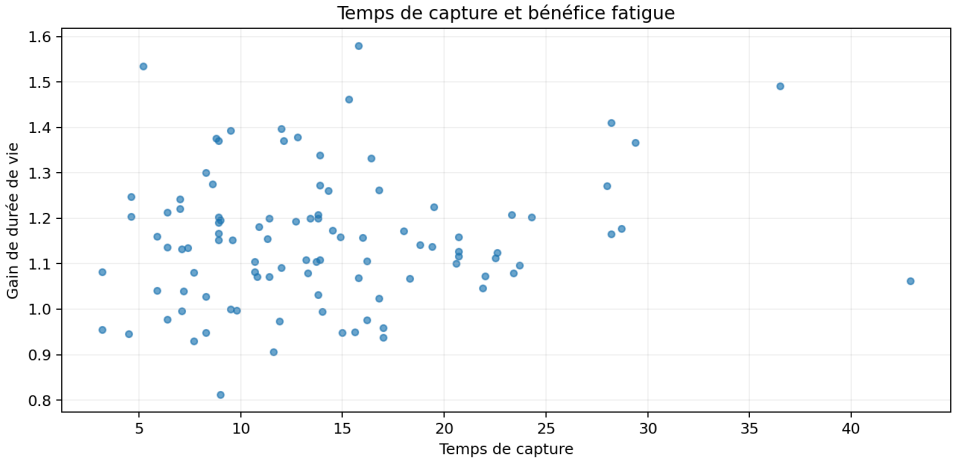
$$L_{ctrl,50} \simeq 4.11 \times 10^5.$$

Le gain médian condition par condition était donc proche de

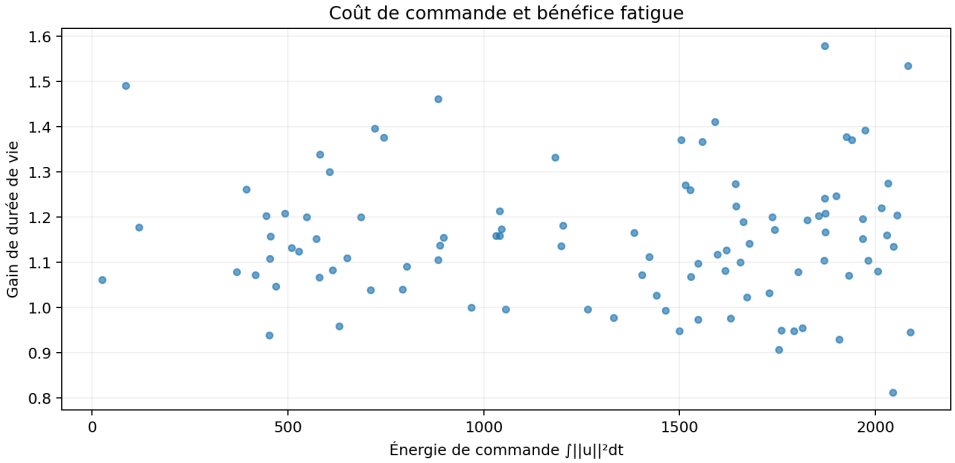
$$1.14.$$

L'avantage est plus faible que dans le cas de capture idéale, ce qui est physiquement logique : le système accumule du dommage pendant le transitoire chaotique et la commande n'est pas instantanée. La part médiane du dommage transitoire était toutefois faible dans cette simulation, de l'ordre de quelques pourcents.

Deux nuages de points sont particulièrement instructifs.



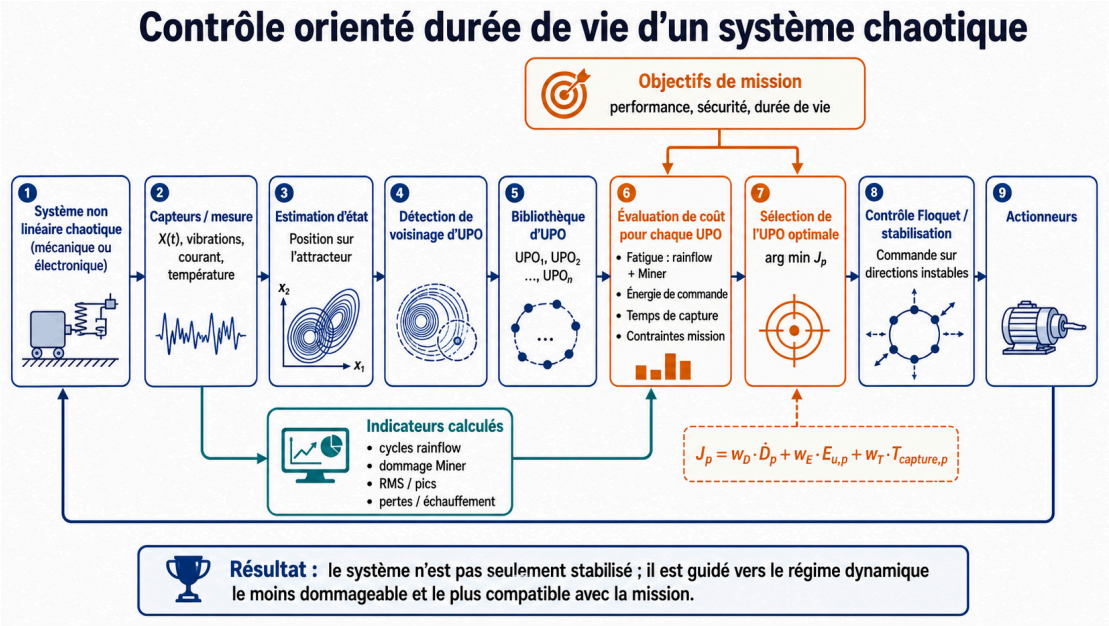
Temps de capture et gain de durée de vie : la relation n'est pas monotone, car le dommage dépend de l'histoire complète des cycles.



Énergie de commande et gain de durée de vie : un coût élevé ne garantit pas un gain élevé.

Ces deux figures montrent qu'un système de contrôle industriel ne devrait pas minimiser le dommage seul. Il faudrait introduire une fonction de coût multiobjectif et éventuellement refuser une capture si son bénéfice prévu est trop faible.

20. Schéma-bloc du contrôle orienté durée de vie



Architecture générale : mesurer l'état, identifier les UPO accessibles, calculer leur coût, sélectionner l'orbite optimale puis la stabiliser.

Le schéma peut se lire comme un cycle de décision.

Le système non linéaire fournit des mesures : vibration, courant, température ou autre variable d'état. Un estimateur reconstruit la position sur l'attracteur. Un détecteur cherche les UPO proches ou atteignables. Une bibliothèque contient leurs périodes, leurs modes de Floquet et leurs indicateurs de coût calculés hors ligne ou actualisés en ligne.

Le bloc central est l'évaluation :

$$J_p = w_D \dot{D}_p + w_E E_{u,p} + w_T T_{capture,p} + \cdots.$$

Le contrôleur ne choisit donc pas « l'UPO la plus stable », notion d'ailleurs paradoxale puisqu'elle est initialement instable. Il choisit l'UPO dont la **stabilisation est la plus avantageuse pour la mission**.

21. Applications possibles en mécanique

Plusieurs systèmes mécaniques non linéaires peuvent présenter des régimes complexes : rotors, engrenages avec jeu, structures avec impacts, frottements secs, pales, panneaux flexibles, systèmes avec butées, machines soumises à des excitations paramétriques.

Dans ces systèmes, la stratégie proposée pourrait avoir quatre usages.

Le premier est la réduction de fatigue : stabiliser une orbite dont le spectre rainflow est favorable. Le deuxième est l'évitement d'événements extrêmes : détourner une trajectoire qui approche une structure conduisant à un choc ou une excursion sévère. Le troisième est

le maintien de performance : choisir un régime compatible avec une vitesse, un débit ou un couple imposé. Le quatrième est la maintenance prédictive active : la bibliothèque d'UPO pourrait être réévaluée au fur et à mesure que la structure se dégrade.

Dans une application réelle, Miner devrait être remplacé ou complété par un modèle de fatigue adapté : correction de contrainte moyenne, multiaxialité, plasticité, propagation de fissure ou modèle probabiliste. La publication récente sur la fatigue sous dynamique chaotique et hyperchaotique confirme d'ailleurs que le choix du modèle de dommage devient critique lorsque le chargement est fortement non stationnaire.

22. Applications possibles en électronique et électronique de puissance

Les convertisseurs de puissance sont des candidats naturels parce qu'ils peuvent présenter des bifurcations, des doublements de période et des régimes chaotiques. Une UPO pourrait être évaluée non plus seulement par une contrainte mécanique, mais par les pertes et la fatigue thermo-mécanique.

Un modèle thermique simple de jonction peut être écrit

$$C_{th}\frac{dT_j}{dt} = P(t) - \frac{T_j - T_a}{R_{th}}.$$

Le signal $T_j(t)$ peut ensuite être soumis au rainflow afin d'obtenir une distribution de cycles thermiques. La fonction de coût pourrait combiner

$$J_p = w_P P_{loss,p} + w_T \Delta T_{j,p} + w_D D_{thermal,p} + w_E E_{u,p}.$$

La même logique s'applique aux oscillateurs RF, PLL, lasers et circuits non linéaires : une UPO peut être intéressante non parce qu'elle est « calme », mais parce qu'elle fournit une fréquence, une puissance ou une bande spectrale particulière avec un coût acceptable.

IV. Vers un principe général : piloter un système par ses modes naturels

23. Une nouvelle lecture du contrôle

Dans le contrôle classique, on part d'une consigne et l'on impose au système de la suivre. Dans le cadre proposé ici, la consigne peut être plus abstraite : « minimiser le dommage », « conserver une bande spectrale donnée », « réduire l'énergie de commande », « éviter une région dangereuse ».

Le système chaotique fournit alors lui-même une liste de solutions candidates :

$$UPO_1, UPO_2, \ldots, UPO_N.$$

Chaque UPO possède une signature : période, spectre de Floquet, énergie, spectre fréquentiel, dommage, échauffement, qualité de forme d'onde, accessibilité. On peut construire un vecteur de caractéristiques

$$Z_p = \left(T_p, \mu_{p,i}, \dot{D}_p, E_{u,p}, T_{capture,p}, Q_p, \ldots\right).$$

Le pilotage devient alors une décision dans une bibliothèque de **modes naturels**.

24. Ce qui rapproche le radar et la fatigue

Le radar chaotique et la fatigue semblent très éloignés. Pourtant, ils illustrent exactement la même idée.

Dans le radar, le chaos sert de générateur de diversité. Une trajectoire complexe produit une forme d'onde riche. Si plusieurs régimes peuvent être contrôlés, le système pourrait choisir une forme d'onde en fonction de la mission.

Dans la fatigue, le chaos est une source de chargements possibles. Plusieurs UPO constituent plusieurs régimes mécaniques naturels. Le système choisit celui qui minimise un coût.

Dans les deux cas,

$$dynamique\ non\ linéaire \rightarrow catalogue\ de\ régimes \rightarrow fonction\ de\ coût \rightarrow sélection \rightarrow commande\ faibl$$

Cette approche n'affirme pas que le chaos est toujours préférable. Elle propose plutôt de ne plus le traiter comme un résidu indésirable. Lorsque le système est naturellement non linéaire et peut entrer dans une dynamique chaotique, **ses structures internes peuvent devenir une ressource de contrôle**.

25. Limites et étapes nécessaires avant une application

Quatre limites doivent rester explicites.

Premièrement, trouver une bibliothèque suffisamment riche d'UPO devient difficile lorsque la dimension augmente. Des méthodes de Newton-Krylov, de recherche de récurrences et, récemment, des représentations latentes par autoencodeurs sont utilisées dans les systèmes de grande dimension.

Deuxièmement, la stabilité calculée sur un modèle peut différer de la stabilité réelle si les paramètres dérivent. Un contrôle robuste ou adaptatif serait indispensable.

Troisièmement, le coût de capture peut être comparable au bénéfice attendu. D'où l'importance d'une fonction multiobjectif et de la possibilité de ne pas contrôler.

Quatrièmement, les simulations de ce document sont des preuves de concept. Le Lorenz n'est ni un rotor réel, ni un convertisseur réel, ni un radar RF. La valeur du raisonnement réside dans l'architecture, pas dans la transposition directe des chiffres.

Conclusion

Les études réunies ici conduisent à une image du chaos plus constructive. Un attracteur chaotique n'est pas seulement une trajectoire imprévisible ; c'est un ensemble structuré contenant des orbites périodiques instables et des directions de stabilité mesurables. Les méthodes OGY, Pyragas et Floquet montrent qu'une petite commande peut exploiter cette structure.

Le radar chaotique illustre l'utilisation du chaos comme **source déterministe de complexité** : la forme d'onde semble bruitée, mais reste reproductible et corrélable. Son avantage potentiel sur un noise radar classique réside moins dans la furtivité que dans la possibilité de façonner et, peut-être, de piloter dynamiquement le générateur.

La fatigue illustre l'utilisation du chaos comme **réservoir de régimes mécaniques** : toutes les UPO ne sont pas favorables, mais certaines peuvent présenter un dommage inférieur au régime chaotique. Le contrôle devient alors orienté durée de vie.

La formulation la plus générale est donc :

$$observer\ le\ chaos \rightarrow identifier\ ses\ modes\ naturels \rightarrow évaluer\ leur\ coût \rightarrow choisir \rightarrow stabiliser$$

Ce cadre offre un pont entre dynamique non linéaire, contrôle, traitement du signal, fatigue et ingénierie des systèmes. Il transforme le chaos d'un obstacle à supprimer en un espace de possibilités à exploiter avec prudence.

Bibliographie détaillée et commentée

A. Contrôle du chaos, UPO et Floquet

[1] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. (1990). "Controlling chaos." ***Physical Review Letters*****, 64, 1196–1199. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.1196.**
Article fondateur de la méthode OGY. Il établit l'idée essentielle utilisée dans ce document : un attracteur chaotique contient de nombreuses orbites périodiques instables et de petites perturbations peuvent en stabiliser une lorsqu'une trajectoire passe dans son voisinage. C'est la référence historique du « chaos comme réservoir de régimes ».

[2] Ditto, W. L., Rauseo, S. N. & Spano, M. L. (1990). "Experimental control of chaos." ***Physical Review Letters*****, 65, 3211–3214. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.3211.**
Première démonstration expérimentale emblématique du contrôle OGY. Utile pour rappeler que l'idée n'est pas seulement numérique : des systèmes physiques peuvent être commutés entre plusieurs UPO.

[3] Pyragas, K. (1992). "Continuous control of chaos by self-controlling feedback." ***Physics Letters A*****, 170, 421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8.**
Référence fondatrice du contrôle retardé. Le terme $X(t - T) - X(t)$ s'annule sur l'orbite cible, ce qui donne une commande non invasive dans le régime stabilisé.

[4] Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. & Dayawansa, W. P. (1992). "Controlling chaotic dynamical systems." *Physica D*, 58, 165–192. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90107-X.
Extension structurée de l'OGY aux systèmes de dimension supérieure et à des matrices de retour plus générales. Très pertinente pour le passage de la carte simple au contrôle de systèmes vectoriels.

[5] Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.-C., Mancini, H. & Maza, D. (2000). "The control of chaos: theory and applications." *Physics Reports*, 329, 103–197. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00096-4.
Grande synthèse des méthodes de contrôle du chaos, incluant OGY, contrôle adaptatif, ciblage, synchronisation et applications. Reste une excellente référence de cadrage.

[6] "Mastering chaos: A review." *Annual Reviews in Control*, 58 (2024), 100966. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2024.100966.
Revue récente des techniques de stabilisation des systèmes chaotiques. Elle replace les méthodes historiques dans le contexte contemporain du contrôle non linéaire et aide à distinguer les familles de stratégies disponibles.

[7] Maiocchi, C. C., Lucarini, V. & Gritsun, A. (2022). "Decomposing the dynamics of the Lorenz 1963 model using unstable periodic orbits: averages, transitions, and quasi-invariant sets." *Chaos*. DOI: 10.1063/5.0067673.
Référence centrale pour la lecture moderne du Lorenz comme réseau d'UPO. Elle montre comment les UPO peuvent servir non seulement à comprendre la géométrie du chaos, mais aussi ses statistiques et ses transitions.

[8] Page, J., Holey, J., Brenner, M. P. & Kerswell, R. R. (2024). "Exact coherent structures in two-dimensional turbulence identified with convolutional autoencoders." *Journal of Fluid Mechanics*. DOI: 10.1017/jfm.2024.552.
Exemple moderne de recherche d'UPO dans une dynamique de grande dimension. L'utilisation d'autoencodeurs pour détecter des récurrences montre comment le concept peut être étendu au-delà des systèmes de faible dimension.

B. Noise radar et formes d'onde chaotiques

[9] De Palo, F., Galati, G., Pavan, G., Wasserzier, C. & Savci, K. (2020). "Introduction to Noise Radar and Its Waveforms." *Sensors*, 20, 5187. DOI: 10.3390/s20185187.
Introduction claire à la Noise Radar Technology. Elle discute les formes d'onde, la fonction d'ambiguïté, le PAPR, les lobes secondaires, le LPI/LPE et les besoins de coexistence spectrale.

[10] Savci, K. et al. (2020). "Noise radar – Overview and recent developments." *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*.
Vue d'ensemble opérationnelle et technologique, avec mention de démonstrateurs et d'essais. Utile pour situer le radar chaotique par rapport à une technologie de noise radar déjà expérimentée.

[11] Galati, G., Pavan, G., Savci, K. & Wasserzier, C. (2021). "Noise Radar Technology: Waveforms Design and Field Trials." *Sensors*, 21, 3216. DOI: 10.3390/s21093216.

Référence importante car elle ne reste pas au niveau théorique : elle décrit des essais terrain de démonstrateurs en Allemagne et en Turquie et analyse les limitations matérielles réelles des formes d'onde bruitées.

[12] Galati, G., Pavan, G., Savci, K. & Wasserzier, C. (2021). "Counter-Interception and Counter-Exploitation Features of Noise Radar Technology." *Remote Sensing*, 13, 4509. DOI: 10.3390/rs13224509.
Discussion précise des notions LPI/LPE. Utile pour éviter l'affirmation simpliste « bruit = radar invisible » et replacer l'intérêt dans la difficulté d'exploitation de la waveform.

[13] Wasserzier, C. et al. (2024). "Advancements and future trends in noise radar technology." *IET Radar, Sonar & Navigation*. DOI: 10.1049/rsn2.12611.
Éditorial récent qui synthétise les tendances : formes d'onde adaptées, électronique numérique, anti-interception et nouvelles applications. Il confirme que le noise radar reste un domaine de recherche actif.

[14] Pappu, C. S. & Carroll, T. L. (2023). "Chaotic waveform for optimal joint radar communication systems." *Chaos, Solitons & Fractals*, 169, 113261. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113261.
Référence directement liée au concept étudié. Les auteurs conçoivent des cartes chaotiques donnant une large bande, une bonne autocorrélation et une fonction d'ambiguïté de type *thumbtack*, tout en permettant une communication numérique.

[15] "Joint radar and communication system based on a chaotic optoelectronic oscillator." *Optics Communications*, 554 (2024), 130123. DOI: 10.1016/j.optcom.2023.130123.
Démonstration expérimentale d'un système RadComm utilisant un oscillateur optoélectronique chaotique. Elle montre que les formes d'onde chaotiques peuvent être produites physiquement à large bande et utilisées simultanément pour radar et communications.

[16] Yao, J.-L. et al. (2024). "Design of integrated radar and communication system based on solvable chaotic signal." *Scientific Reports*, 14, 31663. DOI: 10.1038/s41598-024-80956-4.
Travail récent sur un signal chaotique « solvable », avec analyse de fonction d'ambiguïté, erreur de détection et décodage. Intéressant pour la question de reproductibilité et de synchronisation du chaos déterministe.

[17] Chen, J. & Wang, M. et al. (2024). "Joint waveform design of radar detection, wireless communication and jamming based on chaotic composite modulation." *Electronics Letters*. DOI: 10.1049/ell2.70033.
Montre l'extension du chaos à des formes d'onde multifonctions radar-communication-brouillage. Cette référence illustre la flexibilité potentielle d'une source chaotique pilotée.

C. Fatigue, rainflow et dommage sous dynamique complexe

[18] ASTM E1049-85(2023), "Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis." DOI: 10.1520/E1049-85R23.
Référence normative pour le comptage de cycles, notamment rainflow. Elle justifie l'utilisation du rainflow comme interface entre un signal vibratoire irrégulier et une évaluation de fatigue.

[19] Miner, M. A. (1945). "Cumulative damage in fatigue." ***Journal of Applied Mechanics*****.**
Référence historique de la règle linéaire de cumul des dommages. La simplicité de Miner explique son intérêt pédagogique, mais aussi ses limites pour des histoires de chargement complexes.

[20] Hectors, K. et al. (2021/2022). "Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals: A Review." ***Metals*****, 11, 204.**
Revue des modèles de cumul en fatigue à grand nombre de cycles. Elle est utile pour replacer Miner parmi des modèles non linéaires plus élaborés et montrer qu'aucun modèle unique n'est universel.

[21] Hectors, K. (2022). "Method for statistical evaluation of cumulative damage models applied to block loading." ***Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*****. DOI: 10.1111/ffe.13820.**
Étude comparative statistique de plusieurs modèles de dommage. Elle souligne la nécessité d'une validation expérimentale rigoureuse et montre que Miner peut être nettement moins performant que certains modèles non linéaires.

[22] "Probabilistic formulation of Miner's rule and application to structural fatigue." (2023).
Référence intéressante pour la partie Monte Carlo : elle rappelle que les courbes S-N sont elles-mêmes probabilistes et propose une lecture probabiliste du dommage cumulé.

[23] "A probe into the fatigue crack growth in mechanical systems with hyperchaotic/chaotic dynamics." (2023), ***Mechanical Systems and Signal Processing*****.**
Référence particulièrement proche de notre question. Elle étudie expérimentalement et analytiquement la fatigue sous vibrations chaotiques et hyperchaotiques, compare ces régimes à des chargements périodiques et met en évidence la sensibilité de la durée de vie aux conditions initiales. Elle souligne aussi que Miner peut être insuffisant dans ce contexte.

D. Pour aller vers le pilotage par modes naturels

[24] Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. (1987). "Unstable periodic orbits and the dimension of chaotic attractors." ***Physical Review A*****, 36, 3522(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.36.3522.**
Montre que les UPO ne sont pas seulement des curiosités locales : elles peuvent servir à reconstruire des propriétés globales d'un attracteur chaotique. C'est une base conceptuelle pour le pilotage par bibliothèque de modes.

[25] So, P. & Ott, E. (1995). "Controlling chaos using time delay coordinates via stabilization of periodic orbits." *Physical Review E*, 51, 2955. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.2955.
Important pour les applications où l'état complet n'est pas directement mesuré. La méthode montre que des coordonnées retardées issues d'un signal scalaire peuvent suffire à reconstruire la dynamique locale nécessaire au contrôle.

[26] Lai, Y.-C., Ding, M. & Grebogi, C. (1993). "Controlling Hamiltonian chaos." *Physical Review E*, 47, 86. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.86.
Extension du contrôle aux systèmes où la structure stable/instable diffère fortement des attracteurs dissipatifs. Elle montre l'importance générale des directions invariantes pour construire une commande ciblée.

La bibliographie montre ainsi une continuité : les UPO ont d'abord été utilisées pour comprendre et contrôler le chaos ; elles servent aujourd'hui à décomposer des dynamiques de grande dimension. Les formes d'onde chaotiques sont parallèlement étudiées en radar et en communication, tandis que la fatigue sous dynamique chaotique devient un sujet expérimental. La combinaison « UPO + coût de mission + sélection + contrôle » proposée dans ce document se situe à l'intersection de ces courants plutôt qu'à l'intérieur d'un seul domaine établi.