Un modèle d'endommagement par fatigue pour chargements complexes

Du critère de Miner local à une dynamique d'activation dans les systèmes complexes

Document pédagogique enrichi par simulations Monte Carlo et bibliographie commentée

Ce document conserve le modèle proposé dans le texte source et l'organise en une progression logique. Les résultats numériques sont présentés comme des expériences pédagogiques : ils illustrent des mécanismes et des tendances, sans constituer une validation matériau ni un outil de dimensionnement.

Objectif pédagogique du modèle

Ce modèle est conçu comme un laboratoire pédagogique du passage du local au global en fatigue. Son objectif n'est pas de remplacer les méthodes de dimensionnement, le comptage rainflow, les modèles de propagation de fissure ou un calcul complet du champ de contraintes. Il cherche à montrer, avec un nombre volontairement limité de mécanismes, comment un chargement complexe peut être transformé en une pression de dommage locale, puis en une variable d'état globale dont l'évolution peut être étudiée statistiquement.

La démarche consiste à conserver quelques briques physiques interprétables : une loi S–N de type Basquin–Miner pour la sensibilité aux amplitudes, une représentation temps–fréquence pour décrire les signaux multiscalaires, un seuil d'activation, puis une dynamique d'endommagement. La simplicité est ici une hypothèse de travail : elle permet d'isoler séparément l'effet du RMS, de la distribution des amplitudes, de la mémoire, de l'intermittence et de la répartition spectrale avant d'envisager des modèles plus détaillés.

La valeur pédagogique du modèle tient donc moins à la précision absolue d'une durée de vie qu'à sa capacité à produire des comparaisons contrôlées. Chaque simulation conserve les mêmes paramètres matériau et ne modifie qu'une propriété du chargement. Les résultats doivent être lus comme des expériences numériques destinées à comprendre les mécanismes, à formuler des hypothèses et à préparer une confrontation avec des méthodes de référence ou des données expérimentales.

1. Du chargement complexe au Miner local

1.1. Pourquoi dépasser le simple comptage global des cycles

Lorsqu'une structure est soumise à un chargement variable dans le temps, la question de l'endommagement par fatigue se pose d'abord dans des termes très classiques. Il s'agit de comprendre comment une succession de sollicitations, parfois faibles, parfois fortes, parfois régulières, parfois très irrégulières, finit par dégrader progressivement le matériau jusqu'à provoquer une rupture. Dans les approches traditionnelles, ce problème est souvent traité par un comptage de cycles, puis par une loi de type Basquin ou Wöhler, enfin par une règle de cumul telle que le critère de Miner. Ce cadre fonctionne bien dès lors que le signal de chargement peut être ramené à une succession relativement claire de cycles d'amplitude donnée. Mais dès que le chargement devient complexe, large bande, multi-échelles, intermittent ou turbulent, ce point de vue atteint ses limites. Il devient alors nécessaire d'introduire une description plus proche de la structure réelle du signal.

L'idée centrale du modèle proposé consiste à conserver l'esprit physique de la fatigue classique, tout en le reformulant dans un langage adapté aux signaux complexes. Le point de départ n'est plus seulement la succession globale des cycles, mais la distribution locale en temps et en fréquence de l'énergie du

chargement. Autrement dit, au lieu de demander seulement combien de cycles le signal contient dans sa totalité, on cherche à savoir quelles composantes fréquentielles sont présentes à un instant donné, avec quelle amplitude, et quelle pression locale de dommage elles exercent sur le matériau. Cette reformulation conduit naturellement à utiliser une analyse en ondelettes, puis à construire une forme locale du critère de Miner, qui devient le cœur du modèle.

Soit donc un chargement x(t), éventuellement stationnaire au sens statistique global, mais présentant localement des variations complexes. Une transformée en ondelettes continue, par exemple avec une ondelette de Morlet, fournit une représentation W(ω,t) du signal dans le plan temps–fréquence. Le module |W(ω,t)| mesure l'importance locale, autour de l'instant t, de la composante fréquentielle ω. Le scalogramme |W(ω,t)|² représente alors une densité locale d'énergie ou de puissance.

À partir de là, on introduit une grandeur Λ(t) destinée à représenter la pression instantanée de dommage. Cette grandeur reprend l'intuition du critère de Miner.

1.2. Loi de Basquin–Miner et transposition locale temps–fréquence

$$= C\,Ai\hat{}(-m)$$

$$D = \Sigma\,(\ni / \ni) = (1/C)\,\Sigma\ \ni\ Ai\hat{}m$$

Dans le modèle proposé, cette logique est transposée localement dans le plan temps-fréquence. À une fréquence ω, le nombre de cycles par unité de temps est proportionnel à ω, tandis que l'amplitude locale associée à cette bande fréquentielle est lue à travers |W(ω,t)|.

$$\Lambda(t) = KM \int \omega\,|W(\omega,t)|\hat{}m\,d\omega$$

ou, sous forme discrète :

$$\Lambda(t) = KM\,\Sigma\,\omega_i\,|W(\omega_i\,,\,t)|\hat{}m\,\Delta\omega_i$$

Cette formule signifie qu'à l'instant t, chaque bande fréquentielle agit comme une source locale de cyclage. La fréquence ω compte le nombre de cycles par unité de temps, tandis que |W(ω,t)|^m mesure la sévérité de ces cycles du point de vue de la fatigue.

1.3. Variable d'endommagement et dynamique d'activation

La seconde étape consiste à introduire une variable d'endommagement scalaire D(t), comprise entre 0 et 1. L'évolution du dommage est décrite par une dynamique logistique :

$$dD/dt = K(t)\,(D + D0)\,(1 - D)$$

où D0 est un petit paramètre représentant une sensibilité initiale du matériau.

Le taux d'activation est défini par :

$$K(t) = K0\,\langle\,\Lambda(t) - S\,\rangle\hat{}p$$

où S est un seuil d'activation et p un exposant.

Le modèle complet peut être résumé par la chaîne :

$$x(t) \rightarrow W(\omega,t) \rightarrow \Lambda(t) \rightarrow K(t) \rightarrow D(t)$$

avec :

$$\Lambda(t) = KM \int \omega\,|W(\omega,t)|\hat{}m\,d\omega$$

$$K(t) = K0\,\langle\Lambda(t) - S\rangle\hat{}p$$

$$dD/dt = K(t)(D + D0)(1 - D)$$

Cette architecture possède un sens conceptuel fort, car elle relie plusieurs idées centrales de la théorie des systèmes complexes. La variable D(t) joue le rôle de variable d'ordre décrivant l'état macroscopique d'endommagement du système.

1.4. Extensions vers les systèmes complexes

Une analogie instructive peut être faite avec les modèles épidémiques. Dans ces modèles, la fraction d'individus infectés I(t) suit souvent :

$$dI/dt \;=\; \beta\, I\,(1 \;-\; I)$$

Cette forme logistique traduit un mécanisme d'auto-amplification limité par la population restante saine.

Si l'on généralise le modèle à l'espace, on obtient une équation réaction-diffusion :

$$\partial D/\partial t \;=\; K(x,t)(D \;+\; D0)(1 \;-\; D) \;+\; \kappa\,\nabla^2 D$$

Le premier terme représente la réaction locale (création de dommage), le second la propagation spatiale du dommage.

Si l'on introduit des fluctuations, on peut écrire une équation de Langevin :

$$dD \;=\; f(D,t)\,dt \;+\; g(D,t)\,dW_t$$

avec

$$f(D,t) \;=\; K(t)(D \;+\; D0)(1 \;-\; D)$$

La densité de probabilité p(D,t) satisfait alors l'équation de Fokker-Planck :

$$\partial p/\partial t \;=\; \;-\; \partial/\partial D\,(\,f(D,t)\,p\,) \;+\; 1/2\;\partial^2/\partial D^2\,(\,g^2(D,t)\,p\,)$$

Cette reformulation permet d'étudier la distribution statistique des états de dommage et des durées de vie.

Le modèle peut également être interprété à travers la percolation : lorsque la fraction de zones endommagées devient suffisante, un réseau connecté de défauts peut apparaître, conduisant à la rupture macroscopique.

Enfin, l'analogie avec le modèle d'Ising apparaît lorsque l'on considère que chaque élément du matériau peut être dans un état local sain ou endommagé, les interactions entre éléments produisant un comportement collectif macroscopique.

1.5. Architecture minimale et signification des paramètres

Le grand intérêt de cette construction est sa simplicité structurée. Elle repose sur trois briques principales :

- 1) une lecture temps-fréquence du chargement ;
- 2) un Miner local dans le plan temps-fréquence ;
- 3) une dynamique logistique d'endommagement.

Chaque paramètre possède une signification physique claire :

- KM règle l'échelle du Miner local,
- m correspond à l'exposant de fatigue de type Basquin,
- S représente un seuil d'activation,
- p règle la brutalité de l'activation,
- D0 représente la graine initiale de dommage.

Cette modélisation permet de comparer différents chargements complexes via la pression instantanée de dommage Λ(t), d'identifier les épisodes localement agressifs et d'estimer non seulement l'endommagement moyen mais aussi la distribution des durées de vie lorsque l'on adopte la description probabiliste.

Ainsi, le modèle constitue un pont entre la mécanique classique de la fatigue et la physique des systèmes complexes. Il conserve l'intuition des approches traditionnelles tout en intégrant la structure multi-échelles des signaux modernes et la dynamique collective de la dégradation.

2. Modèle générique : justesse topologique et calibration

2.1. Un squelette dynamique plutôt qu'une microphysique exhaustive

On n'obtient pas d'abord un modèle microscopique exhaustif de la métallurgie intime du matériau. On obtient plutôt un modèle générique d'endommagement, c'est-à-dire une architecture de dynamique qui respecte les grandes propriétés qualitatives que l'on attend physiquement. En ce sens, l'expression « topologiquement correct » est particulièrement appropriée.

Elle signifie que le modèle possède la bonne forme globale de comportement. Il part d'un état faiblement endommagé, introduit un seuil ou au moins une zone d'activation, permet une croissance accélérée lorsque les mécanismes de dégradation se renforcent mutuellement, et conduit finalement vers un état critique ou saturé. Autrement dit, il respecte la géométrie qualitative du phénomène, même si les coefficients précis ne peuvent pas être déduits a priori sans confrontation aux données.

Cette démarche est très fréquente dans la physique des systèmes complexes. On ne commence pas par tout décrire dans le détail microscopique. On cherche d'abord le bon squelette dynamique. Ensuite, on identifie les paramètres, les fonctions de transfert et les seuils à partir de l'observation.

Dans ce modèle, ce squelette dynamique est formé de trois briques.

La première est la transformation du signal de chargement en une pression instantanée de dommage $\Lambda(t)$, via une représentation temps–fréquence.

La deuxième est la conversion de cette pression en taux d'activation $K(t)$, avec une loi simple de seuil ou de puissance.

La troisième est la dynamique non linéaire de l'endommagement $D(t)$, qui impose la bonne topologie de croissance.

Dire que le modèle est générique signifie aussi qu'il peut s'appliquer à plusieurs familles de chargements et peut-être à plusieurs classes de matériaux, à condition de recalibrer ses paramètres. Ce n'est donc pas un modèle universel au sens où les paramètres seraient identiques partout. C'est un modèle universel dans un sens plus profond : la forme des mécanismes reste la même, alors que les constantes changent.

C'est exactement ce qui se produit dans beaucoup de lois réduites en physique : la structure est robuste, tandis que les paramètres sont contextuels.

2.2. Calibration par les données

La calibration par les données devient alors la seconde étape scientifique essentielle. Elle doit porter sur plusieurs niveaux.

Il faut d'abord calibrer la partie qui transforme le signal en $\Lambda(t)$, c'est-à-dire vérifier que la pondération spectrale choisie reflète correctement l'agressivité réelle du chargement.

Il faut ensuite calibrer la loi $K(t)$, donc le seuil S, l'exposant p et les constantes d'échelle.

Enfin, il faut calibrer la dynamique de $D(t)$, notamment le germe initial D_0 et éventuellement la manière dont on définit expérimentalement le niveau critique correspondant à la rupture.

Ce point est important, car le modèle n'est pas seulement un outil de prédiction. C'est aussi un modèle d'organisation des observables.

Il indique quelles grandeurs observer dans les données. Il suggère que la simple amplitude brute du signal x(t) n'est probablement pas la variable la plus pertinente. Il suggère plutôt que la structure temps–fréquence locale du signal joue un rôle central.

Il indique également que le dommage observé doit être mis en relation avec une dynamique cumulative non linéaire, et non avec une simple somme linéaire de contributions indépendantes.

2.3. Justesse topologique et justesse métrique

Il existe donc une distinction fondamentale entre deux niveaux.

Le premier niveau est celui de la justesse topologique. Le modèle doit posséder la bonne forme qualitative : seuil, activation, auto-amplification, saturation et éventuellement fluctuations.

Le second niveau est celui de la justesse métrique. À ce niveau, les données sont indispensables pour déterminer les bonnes échelles, les bons exposants et les fonctions effectives.

Sans calibration, le modèle reste un schéma physiquement suggestif. Avec calibration, il peut devenir un outil prédictif ou au moins comparatif.

Cette distinction entre topologie et métrique constitue en réalité le cœur de la démarche. L'objectif n'est pas d'obtenir immédiatement une exactitude analytique complète, mais de trouver une forme canonique du phénomène, suffisamment générale pour capturer la structure profonde de l'endommagement sous chargement complexe, tout en restant suffisamment souple pour être ancrée dans les données.

La formulation synthétique est la suivante :

« Le modèle proposé ne prétend pas reproduire directement toute la microphysique du matériau ; il constitue plutôt une loi d'évolution générique, topologiquement correcte, qui capture la structure qualitative de l'endommagement sous chargement complexe et dont les paramètres effectifs doivent ensuite être calibrés sur les données. »

3. Valeur pédagogique du modèle

Au-delà de son intérêt scientifique, ce modèle possède une qualité pédagogique rare : il permet d'expliquer un phénomène complexe avec peu de paramètres, chacun ayant un sens physique clair, et avec une structure logique facile à suivre. C'est exactement ce que l'on recherche dans un modèle utilisé en formation.

Dans beaucoup de domaines techniques, les modèles deviennent rapidement difficiles à enseigner parce qu'ils accumulent des corrections empiriques et des paramètres sans interprétation claire. L'apprenant finit alors par manipuler des formules sans comprendre la logique du phénomène. L'approche proposée suit au contraire une progression très naturelle, presque narrative, qui relie directement l'observation du signal au mécanisme d'endommagement.

3.1. Lire le chargement comme un signal multi-échelles

La première idée est que le matériau ne subit pas seulement une amplitude instantanée de contrainte ou de déformation ; il subit un signal dynamique x(t) qui contient des cycles de différentes échelles. Cette idée peut être illustrée simplement en montrant comment un signal réel contient à la fois des composantes lentes et rapides. L'analyse en ondelettes permet alors de visualiser ces contributions locales dans le plan temps–fréquence.

Dans un cadre pédagogique, cette étape est très efficace parce qu'elle montre immédiatement que la fatigue ne dépend pas uniquement d'un niveau moyen, mais de la structure énergétique du chargement.

3.2. Construire une pression instantanée de dommage

La seconde idée consiste à transformer cette structure spectrale en une pression instantanée de dommage notée Λ(t). La construction de cette grandeur s'appuie directement sur l'intuition du critère de Miner. Chaque bande fréquentielle correspond à un cyclage local ; plus la fréquence est élevée, plus il y a de cycles par unité de temps ; plus l'amplitude est grande, plus ces cycles sont agressifs.

La relation proposée est :

$$\Lambda(t) \;=\; KM \int \omega \,|W(\omega, t)|\hat{}m \, d\omega$$

- où :
- W(ω,t) représente la transformée en ondelettes du signal,
- ω est la fréquence,
- m est l'exposant de fatigue de type Basquin,
- KM est un coefficient d'échelle.

Cette formule résume l'idée que toutes les bandes fréquentielles actives contribuent au dommage en fonction du nombre de cycles qu'elles produisent et de leur amplitude.

3.3. Seuil d'activation et dynamique collective

La troisième idée est que cette pression de dommage n'agit pas immédiatement sur l'état global du matériau. Elle doit d'abord dépasser un certain niveau pour activer les mécanismes de dégradation. On introduit alors un taux d'activation K(t) dépendant de Λ(t) :

$$K(t) \;=\; K0 \,\langle\, \Lambda(t) \;-\; S \,\rangle\hat{}p$$

- où :
- S est un seuil d'activation,
- p est un exposant décrivant la sensibilité du processus,
- ⟨x⟩ représente la partie positive de x.

Cette loi signifie que le matériau peut tolérer certaines sollicitations sans dommage significatif, mais qu'au-delà d'un certain niveau les mécanismes de fatigue deviennent actifs.

La quatrième idée est que l'endommagement possède une dynamique collective. Une fois que des zones endommagées apparaissent, elles facilitent la propagation de nouveaux défauts. Cette propriété est décrite par une équation logistique :

$$dD/dt \;=\; K(t)\,(D \;+\; D0)\,(1 \;-\; D)$$

- où :
- D(t) représente la fraction d'endommagement du matériau,
- D0 est un petit paramètre représentant la présence initiale de micro-hétérogénéités.

Dans un cadre pédagogique, cette équation est particulièrement éclairante. Elle montre comment un phénomène peut être lent au début, puis s'accélérer, puis se stabiliser ou atteindre un état critique.

Cette forme de dynamique apparaît dans de nombreux domaines : propagation d'épidémies, croissance biologique, diffusion d'innovations. Ces analogies permettent aux apprenants de reconnaître des structures mathématiques communes entre disciplines différentes.

L'un des grands avantages pédagogiques de cette construction est que chaque paramètre possède une interprétation simple :

- KM règle l'échelle de la contribution spectrale dans le calcul de Λ(t).
- m provient de la loi de fatigue de Basquin.

- S représente le niveau minimal d'agression à partir duquel le dommage devient actif.
- p décrit la rapidité d'activation du processus.
- D0 correspond à la présence initiale de micro-hétérogénéités dans le matériau.

Cette interprétation claire transforme le modèle en un outil pédagogique structurant. Les apprenants peuvent explorer l'effet des paramètres et observer comment la dynamique change lorsque ces paramètres varient.

3.4. Analogies interdisciplinaires et exercices possibles

Le modèle crée également un pont entre plusieurs disciplines. La dynamique logistique rappelle les modèles épidémiologiques. L'idée d'un seuil d'activation évoque les transitions de phase. La construction d'une variable globale à partir d'interactions locales rappelle les modèles de percolation ou le modèle d'Ising. L'analyse temps–fréquence met en évidence la structure multi-échelles des excitations.

Ces parallèles permettent aux apprenants de comprendre que des structures mathématiques similaires apparaissent dans des domaines très différents et traduisent souvent des mécanismes physiques universels.

Enfin, le modèle reste suffisamment simple pour être manipulé en pratique. Les équations sont peu nombreuses et faciles à implémenter. On peut ainsi construire des exercices où les étudiants analysent un signal réel, calculent son scalogramme, évaluent $\Lambda(t)$, puis simulent l'évolution de $D(t)$.

Cette démarche relie directement les données expérimentales à la dynamique du modèle et renforce la compréhension.

Ainsi, le modèle possède une double valeur. Il constitue à la fois un cadre conceptuel pour analyser l'endommagement sous chargement complexe et un outil pédagogique efficace fondé sur quelques principes simples et physiquement interprétables.

4. Modélisation physique structurée et data science

Les modèles comme celui que vous avez construit — peu de paramètres, chacun ayant un sens physique clair, et une structure pédagogique simple — sont en réalité extrêmement utiles en data science. Ils jouent un rôle fondamental que l'on appelle souvent modélisation structurée ou modèle inductif guidé par la physique. Leur intérêt apparaît à plusieurs niveaux : interprétation, apprentissage à partir de peu de données, robustesse et capacité d'intégration avec les méthodes modernes de machine learning.

La première utilité concerne la réduction de la complexité du problème. Dans un système réel, les données brutes peuvent être très riches et très complexes : séries temporelles longues, bruitées, multi-échelles, avec des corrélations difficiles à analyser directement. Un modèle comme celui proposé agit comme une transformation structurée de ces données.

Il transforme un signal $x(t)$ complexe en quelques grandeurs synthétiques — par exemple $\Lambda(t)$, $K(t)$ ou $D(t)$ — qui concentrent l'information pertinente pour le phénomène étudié. En data science, cette étape est cruciale : elle correspond à ce que l'on appelle la construction de variables explicatives ou feature engineering. Un bon modèle physique agit comme un excellent extracteur de features, parce qu'il encode déjà l'essentiel de la structure du problème.

4.1. Interprétabilité, biais inductif et apprentissage avec peu de données

La deuxième utilité est liée à l'interprétabilité. Les algorithmes de machine learning modernes, notamment les réseaux neuronaux profonds, peuvent produire des modèles très performants mais souvent difficiles à

interpréter. À l'inverse, un modèle avec quelques paramètres physiquement significatifs permet de relier directement les résultats aux mécanismes du système.

Dans ce type de modèle, les paramètres comme l'exposant m, le seuil S ou la constante KM possèdent un sens physique clair. Lorsque ces paramètres sont ajustés sur les données, l'utilisateur ne se contente pas d'obtenir une prédiction ; il comprend également comment le système réagit aux sollicitations. Dans des domaines industriels ou scientifiques, cette interprétabilité est souvent indispensable.

Un troisième avantage concerne la capacité d'apprentissage avec peu de données. Les modèles purement statistiques ou les réseaux neuronaux nécessitent souvent de très grandes quantités de données pour être fiables. Un modèle physique introduit déjà une structure correcte du phénomène. Cela signifie que l'algorithme d'apprentissage n'a pas besoin de découvrir cette structure à partir des données : elle est déjà intégrée dans les équations.

Dans le modèle considéré, par exemple, les variables principales sont :

- Λ(t) : pression instantanée de dommage
- K(t) : taux d'activation du processus de dégradation
- D(t) : variable d'endommagement macroscopique

Cette structure constitue un biais inductif fort. Autrement dit, le modèle impose une hypothèse physique sur la structure du phénomène, ce qui rend l'apprentissage plus efficace.

Ces modèles jouent aussi un rôle important dans ce que l'on appelle aujourd'hui la data science guidée par la physique ou physics-informed modeling. Dans ce cadre, les données et les lois physiques ne sont pas opposées ; elles se complètent. Les équations fournissent la structure qualitative correcte — ce que l'on appelle la topologie du phénomène — tandis que les données servent à ajuster les paramètres et éventuellement à corriger certaines approximations.

Cette approche est au cœur de nombreuses méthodes modernes, comme les Physics-Informed Neural Networks (PINN), dans lesquelles les réseaux neuronaux apprennent une fonction tout en respectant des équations physiques.

4.2. Robustesse et contraintes physiques

Un autre intérêt important est la robustesse. Les modèles purement statistiques peuvent être très sensibles au bruit, aux changements de distribution des données ou aux situations non observées pendant l'apprentissage. Les modèles structurés par la physique sont souvent beaucoup plus robustes, parce qu'ils respectent des contraintes fondamentales.

Par exemple, dans le modèle d'endommagement étudié, la dynamique logistique impose naturellement que :

$$0 \leq D(t) \leq 1$$

Cette contrainte empêche l'apparition de résultats physiquement impossibles. En data science, ce type de contrainte agit comme une régularisation naturelle qui stabilise l'apprentissage.

4.3. Exploration des données et modèles hybrides

Ces modèles sont également très utiles pour structurer l'exploration des données. Dans une démarche d'EDA (exploratory data analysis), on cherche à comprendre quelles variables jouent un rôle important dans le système. Un modèle physique propose immédiatement une hypothèse sur les variables pertinentes.

Dans ce cas, la dynamique du système dépend principalement de la pression instantanée de dommage Λ(t), elle-même liée à la structure spectrale du signal x(t). Cela oriente directement l’analyse vers les grandeurs importantes : énergie locale, distribution fréquentielle, intermittence.

Ces modèles constituent également d’excellents modèles de base pour les méthodes de machine learning. Dans de nombreuses applications, on commence par un modèle physique simple, puis on utilise des techniques d’apprentissage pour corriger ses erreurs.

Par exemple, un réseau neuronal peut apprendre une fonction de correction :

$$D_pred(t) = D_modele(t) + \Delta ML(t)$$

où ΔML(t) est une correction apprise à partir des données.

Cette stratégie est souvent beaucoup plus efficace que d’entraîner un modèle entièrement statistique à partir de zéro. Le modèle physique fournit une approximation initiale raisonnable, et l’algorithme d’apprentissage affine ensuite cette approximation.

4.4. Formation et synthèse

Enfin, ces modèles ont une valeur pédagogique très forte pour la formation en data science. Ils permettent d’illustrer de manière concrète la relation entre données, modèles et phénomènes physiques.

Les étudiants peuvent comprendre comment un signal complexe est transformé en variables pertinentes, comment ces variables alimentent une équation dynamique et comment les paramètres sont ajustés à partir des données.

Cette démarche montre que la data science n’est pas seulement une collection d’algorithmes, mais aussi une manière de penser les systèmes complexes en combinant observation, modélisation et apprentissage.

En résumé, les modèles simples, structurés et physiquement interprétables jouent un rôle essentiel en data science. Ils servent à extraire des variables pertinentes à partir des données, à rendre les modèles interprétables, à réduire la quantité de données nécessaire pour l’apprentissage, à stabiliser les prédictions et à guider l’exploration des données.

Ils constituent également un pont naturel entre les approches traditionnelles de la modélisation scientifique et les méthodes modernes de machine learning. C’est précisément cette combinaison — simplicité structurelle, sens physique des paramètres et capacité à être calibré par les données — qui rend ce type de modèle particulièrement précieux dans une démarche de science des données.

5. Simulation numérique du modèle simplifié

5.1. Objectif et réduction mono-échelle

Afin d’isoler l’effet des statistiques du chargement, la simulation ne met pas encore en œuvre la transformée en ondelettes complète. La pression locale est réduite à un incrément de Miner à chaque pas. Cette réduction est volontaire : elle teste d’abord la sensibilité du modèle à l’amplitude, à la mémoire et à l’intermittence avant d’ajouter la dimension temps–fréquence.

$$\lambda_n = |X_n|^m / C$$

X_n est l’amplitude normalisée au pas n, m l’exposant de Basquin et C la constante S–N. Le Miner cumulé est :

$$D_M(N) = \Sigma_n \lambda_n$$

et la rupture Miner est définie, dans cette expérience pédagogique, par :

$$D_M = 1$$

La dynamique non linéaire est conservée sous la forme :

$$K_n = K_0 \langle \lambda_n - S \rangle^p$$

$$dD/dN = K(N)(D + D_0)(1 - D)$$

5.2. Calibration représentative

Paramètre	Valeur	Rôle
m	5	Pente inverse de la loi S–N ; rend le dommage très sensible aux fortes amplitudes.
C	2×10^5	Vie de référence N = 200 000 cycles pour une amplitude constante A = 1.
A_th	0,5	Seuil d’activation de la dynamique collective.
p	1	Activation linéaire au-dessus du seuil.
D_0	10^{-3}	Graine initiale de dommage.
D_crit	0,99	Critère numérique de rupture pour la variable dynamique.

K_0 est calibré pour que le modèle dynamique retrouve 200 000 cycles sous amplitude constante A = 1. Les comparaisons ultérieures utilisent donc exactement le même matériau numérique : seule la statistique du chargement varie.

5.3. Cas de référence : bruit gaussien de RMS égal à 1

Le premier signal est un bruit gaussien centré X ~ N(0,1), donc de RMS théorique égal à 1. Il ne possède pas de mémoire temporelle et sa kurtosis est proche de 3.

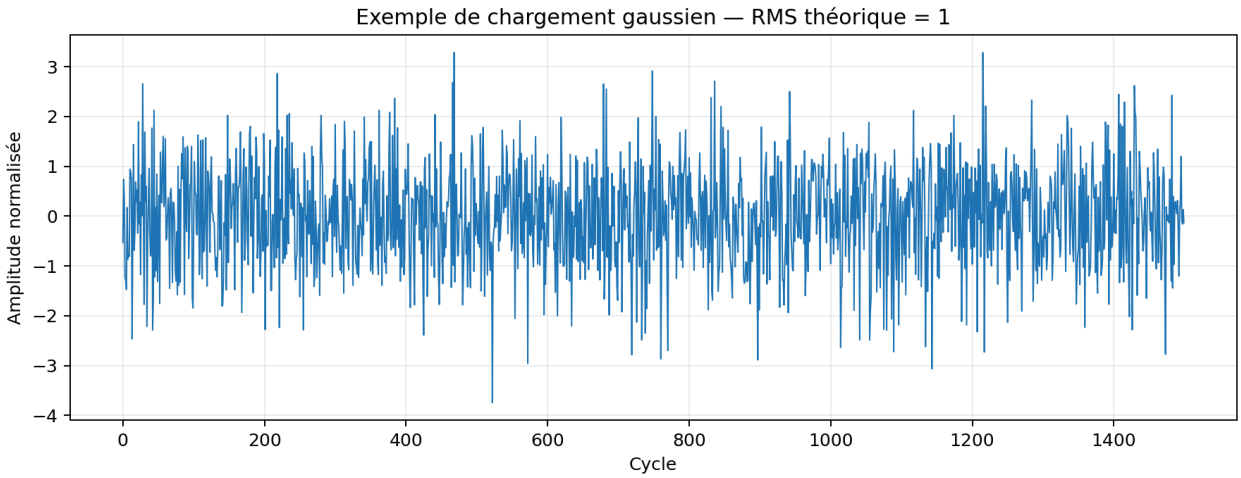


Figure 1 — Exemple de chargement gaussien de RMS théorique égal à 1. Les excursions rares au-delà de 2σ ou 3σ sont très fortement pondérées par la puissance m = 5.

Le RMS ne doit pas être confondu avec une amplitude constante. Avec m = 5, une excursion de niveau 3 contribue $3^5 = 243$ fois plus qu'une excursion de niveau 1. Pour une variable gaussienne standard :

$$E(|X|^m) = 2^{m/2}\,\Gamma((m+1)/2)\,/\,\sqrt{\pi}$$

Pour m = 5, E(|X|⁵) ≈ 6,383, d'où une durée de vie Miner moyenne proche de :

$$N_f, Miner \simeq C\,/\,E(|X|^5) \simeq 31\,300\ cycles$$

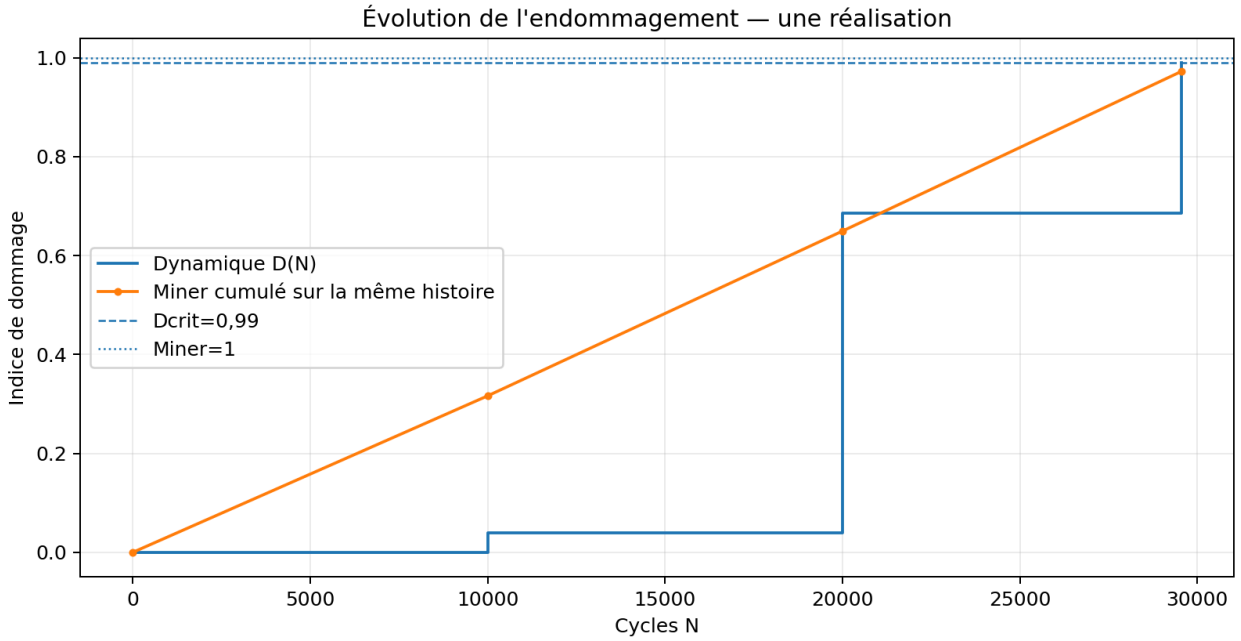


Figure 2 — Une réalisation : le cumul Miner et la variable D du modèle dynamique conduisent au même ordre de grandeur de vie. La dynamique seuil + logistique agit comme une correction structurée de Miner.

La figure 2 montre que Miner reste le point d'ancrage du modèle. Le cumul orange représente la consommation de vie classique. La variable D ajoute un état macroscopique borné, un seuil et une accélération non linéaire. Pour cette calibration, la correction reste faible : le modèle enrichit Miner plutôt qu'il ne le remplace.

5.4. Monte Carlo 4 × 1000 : mémoire, persistance et intermittence

Quatre familles de chargements, toutes renormalisées à RMS = 1, ont été appliquées au même modèle. Pour chacune, 1000 historiques indépendants ont été simulés.

Chargement	Mémoire / construction	Kurtosis moyenne	$E(\|X\|^5)$ moyen
Mémoire courte iid	Gaussien indépendant ; autocorrélation ≈ 0	3,00	6,383
AR(1), ρ = 0,9	Mémoire exponentielle forte	3,00	6,385
Mémoire longue H ≈ 0,8	Spectre ~ $f^{-0.6}$; persistance multi-échelles	3,00	6,381
Intermittent multiscalaire	Porteuse persistante modulée par une enveloppe lognormale	27,12	374,4

Chargement	Miner moyen	Dynamique moyenne	Écart-type dynamique	Q10	Médiane	Q90
Mémoire courte iid	31 314	30 435	683	29 555	30 443	31 328
AR(1), ρ = 0,9	31 345	30 477	1 677	28 293	30 573	32 534
Mémoire longue H ≈ 0,8	31 313	30 435	1 073	29 062	30 426	31 790
Intermittent multiscalaire	3 620	3 579	3 124	445	2 788	7 914

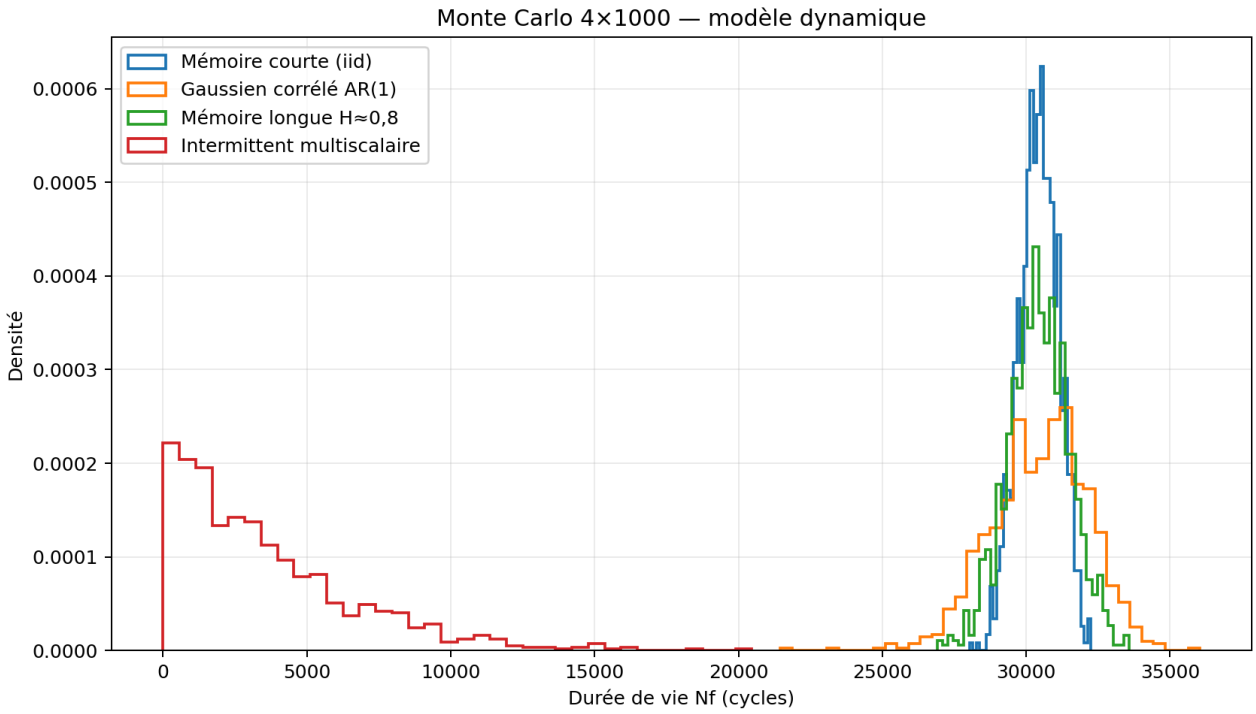


Figure 3 — Distributions de durée de vie du modèle dynamique pour 4 × 1000 réalisations. Les trois chargements gaussiens gardent presque la même moyenne, mais la mémoire élargit la dispersion. L'intermittence déplace entièrement la distribution vers les faibles vies.

Commentaire de la figure 3. Les trois premiers signaux ont la même loi marginale gaussienne et donc pratiquement le même E(|X|⁵). Leur vitesse moyenne de consommation de Miner reste presque identique : les centres des distributions sont voisins de 30 400 cycles. En revanche, la corrélation temporelle regroupe les fortes amplitudes en séquences plus ou moins persistantes. Cela élargit la distribution des vies : σ(Nf) passe d'environ 683 cycles pour le bruit iid à 1 073 pour la mémoire longue et 1 677 pour l'AR(1).

Le signal intermittent est qualitativement différent. À RMS identique, sa kurtosis moyenne vaut environ 27 et son moment E(|X|⁵) environ 374, contre 6,38 pour un gaussien. Quelques bouffées dominent donc le cumul de dommage. La durée de vie moyenne dynamique tombe à environ 3 579 cycles.

$$N_f, intermittent \;/\; N_f, iid \;\simeq\; 3\,579 \;/\; 30\,435 \;\simeq\; 0,118$$

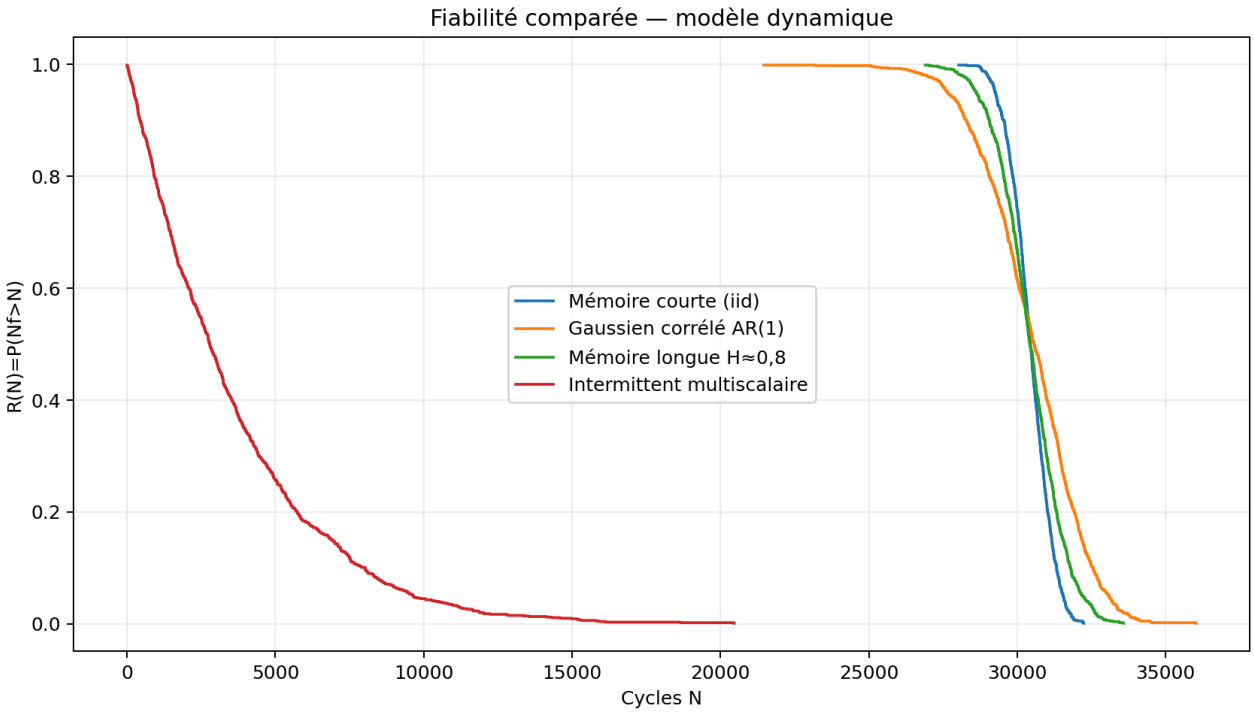


Figure 4 — Fonctions de survie R(N) = P(Nf > N). La mémoire agit surtout sur l’étalement du risque ; l’intermittence provoque un déplacement massif vers la gauche.

Commentaire de la figure 4. Une fonction de survie répond à une question d’ingénierie simple : quelle fraction des structures n’a pas encore atteint le critère de rupture après N cycles ? Les courbes gaussiennes ont un niveau central comparable mais des pentes différentes. La mémoire augmente donc l’incertitude sur la vie d’un échantillon sans modifier fortement la moyenne. Le signal intermittent, lui, produit une probabilité importante de rupture très précoce et une queue de survie étendue : la date d’apparition des bouffées extrêmes devient déterminante.

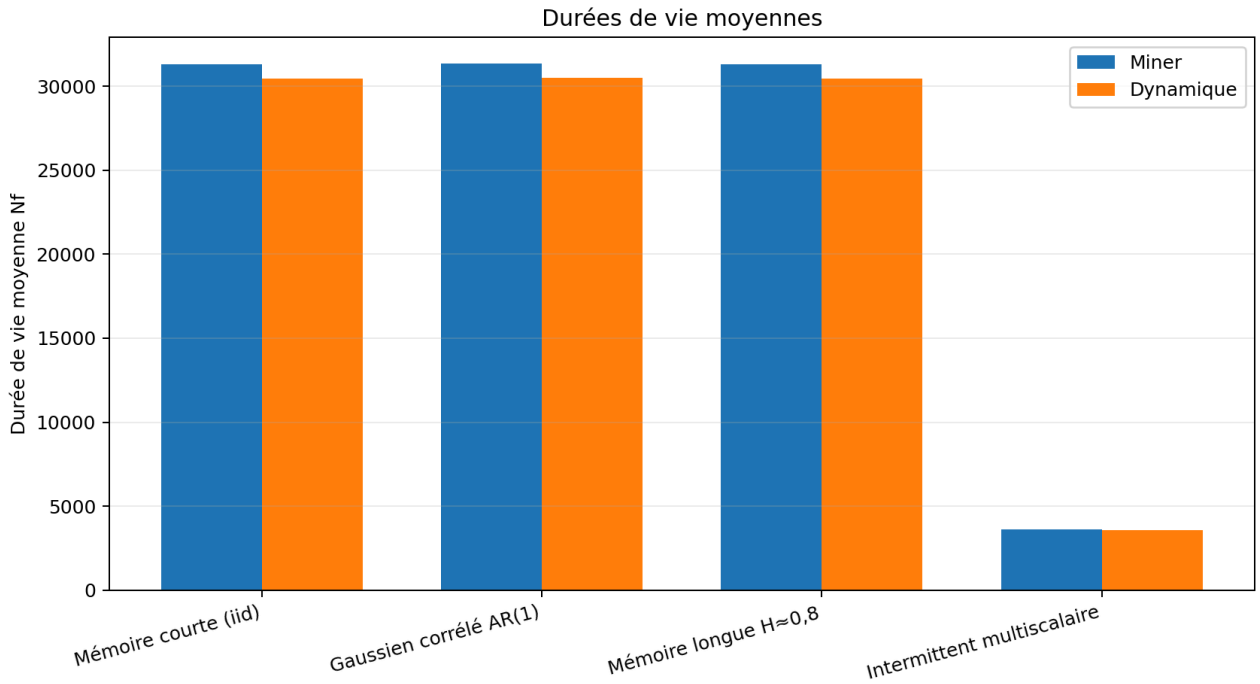


Figure 5 — Durées de vie moyennes : Miner pur et modèle dynamique. La nature du signal modifie beaucoup plus la vie que la correction logistique dans cette calibration.

Commentaire de la figure 5. Pour les trois chargements gaussiens, Miner donne environ 31 300 cycles et le modèle dynamique environ 30 400 cycles, soit une correction d’environ 3 %. Même dans le cas intermittent, les deux approches donnent des vies du même ordre, autour de 3 600 cycles. Cela signifie que la sensibilité principale aux pics se trouve déjà dans la brique de Miner local $|X|^m$. La loi logistique apporte surtout une variable d’état et une architecture extensible vers la diffusion, la mémoire matériau ou la percolation.

5.5. Lecture pédagogique : moyenne, dispersion et intermittence

- **Le RMS n’est pas un indicateur suffisant de sévérité.** Il ne fixe que le second moment. Une loi de dommage en puissance m = 5 est pilotée par des moments beaucoup plus élevés et donc par les queues de distribution.
- **La mémoire gaussienne agit surtout sur la dispersion.** Si la loi marginale reste gaussienne, le moment $E(|X|^5)$ reste presque constant. Les corrélations modifient principalement l’ordre temporel des événements et la variabilité de Nf.
- **L’intermittence agit sur la moyenne et la dispersion.** Les bouffées de forte amplitude augmentent les moments élevés et raccourcissent drastiquement la durée de vie moyenne.
- **Miner est conservé comme limite de référence.** Le modèle dynamique reste proche de Miner dans un cas simple, ce qui est souhaitable pour un modèle pédagogique destiné à prolonger les outils classiques.
- **La version ondelette reste une étape ultérieure.** Pour tester véritablement la localisation temps–fréquence, il faudra remplacer λ□ par $\Lambda(t)=K_M\int\omega|W(\omega,t)|^m d\omega$ et comparer des signaux ayant des contenus fréquentiels différents.

5.6. Résultats, interprétations et réserves

Résultat de simulation	Statut	Réserve
Même RMS ≠ même durée de vie	Très cohérent avec la littérature	La sévérité dépend aussi de la distribution des amplitudes, de la bande passante et du matériau.
Kurtosis / intermittence élevées raccourcissent la vie	Soutenu expérimentalement	La kurtosis seule n'est pas un descripteur complet ; facteur de crête et forme exacte de la distribution comptent.
Mémoire gaussienne : moyenne presque stable, dispersion accrue	Résultat du modèle	Doit être testé sur des données expérimentales dédiées ; il dépend de la loi locale et de la normalisation.
Dynamique logistique comme extension de Miner	Hypothèse pédagogique	Ce n'est pas une loi constitutive standard ; ses paramètres doivent être calibrés.
Approche temps–fréquence pour non-stationnarité	Cohérente avec les tendances actuelles	Le choix de l'ondelette et la pondération fréquentielle doivent être validés par des essais.

6. Extension temps–fréquence : multi-échelles, intermittence et benchmark rainflow

6.1. Pourquoi introduire réellement les ondelettes ?

La réduction mono-échelle utilisée au chapitre précédent permettait d'isoler l'effet de la distribution des amplitudes et de la mémoire, mais elle ne pouvait pas distinguer deux chargements possédant le même RMS et la même loi marginale tout en répartissant leur énergie à des fréquences différentes. La version temps–fréquence du modèle réintroduit donc explicitement la transformée continue en ondelettes. Une banque de Morlet est utilisée pour décomposer le signal en amplitudes locales dépendant du temps et de l'échelle.

$$W(a,b) \;=\; \int x(t)\,(1/\sqrt{a})\,\psi\,*\,[(t\,-\,b)/a]\,dt$$

Pour un signal mécanique, le coefficient brut d'ondelette n'est pas encore une amplitude physique indépendante de l'échelle. Les essais numériques ont montré que ce point est crucial : si l'amplitude de la banque n'est pas calibrée, une différence purement numérique entre échelles est élevée à la puissance m et peut dominer le dommage. La formulation finale utilise donc une réponse d'amplitude calibrée, que l'on peut noter A(ω,t).

$$A(\omega,t) \;=\; C_W(\omega)\,|W(\omega,t)|$$

La pression locale de dommage reprend alors l'idée de Miner : la fréquence mesure le nombre de sollicitations par unité de temps et l'amplitude locale est pondérée par l'exposant de Basquin.

$$\Lambda(t) \;=\; K_M \int \omega\,[A(\omega,t)]^{\mathrm{m}}\,d\omega$$

Dans les simulations, m = 5 et K_M est calibré sur un sinus de référence de RMS égal à 1 et de fréquence f_ref = 1/32. Cette calibration donne au modèle un point d'ancrage explicite : un sinus connu doit produire la même vitesse de dommage que la loi S–N de référence.

$$N(A) \;=\; C\,A^{-\mathrm{m}}, \quad C \;=\; 2\times 10^{5}, \quad m \;=\; 5$$

6.2. Signal aléatoire multiscalaire de RMS égal à 1

Le premier signal est construit comme la somme de quatre composantes stochastiques centrées autour de f_1 = 1/128, f_2 = 1/32, f_3 = 1/8 et f_4 = 1/4 cycle par pas de temps. Les quatre composantes reçoivent une énergie comparable et le signal final est renormalisé à RMS = 1. Il reste globalement gaussien, mais il possède une mémoire et une organisation temporelle multiscalaire.

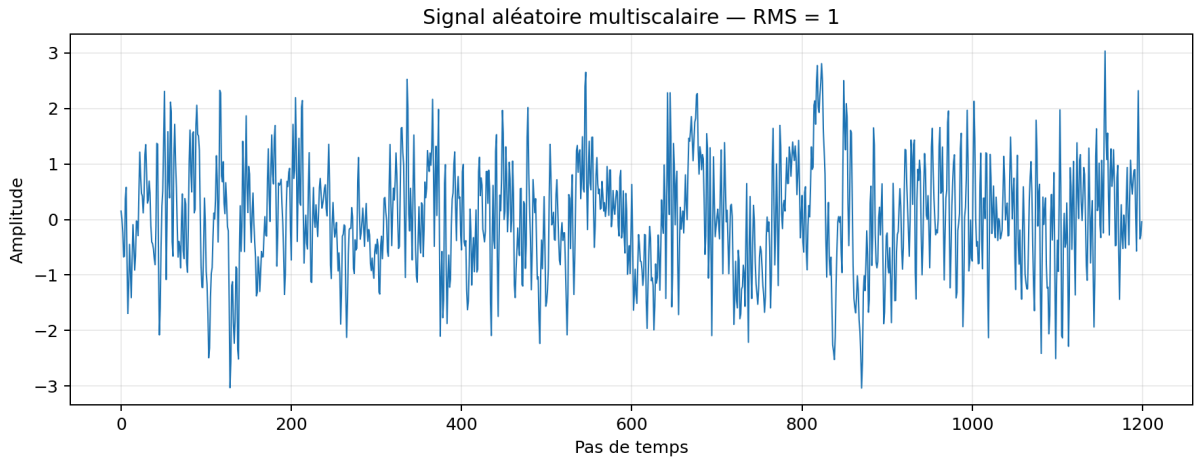


Figure 6.1 — Exemple de signal aléatoire multiscalaire de RMS = 1. Des fluctuations lentes et rapides coexistent ; le RMS seul ne décrit pas la répartition de l’énergie entre ces échelles.

Une première implémentation a mis en évidence une sensibilité excessive à la normalisation des coefficients d’ondelettes. Cette observation constitue un résultat méthodologique en soi : avec une loi en puissance m = 5, une erreur multiplicative de 20 % sur une amplitude est amplifiée en un facteur $1{,}2^5 \approx 2{,}49$ sur la contribution de dommage. Les résultats retenus ci-dessous utilisent donc la banque de Morlet recalibrée en amplitude.

6.3. Déplacement de l’énergie spectrale à RMS constant

Pour isoler l’effet spectral, le RMS est maintenu égal à 1 tandis que 80 % de la puissance est transférée progressivement de la bande la plus lente f_1 vers la bande la plus rapide f_4. Les deux bandes intermédiaires conservent chacune 10 % de la puissance. Pour chaque valeur du paramètre de transfert q, 300 réalisations ont été simulées.

q	Nf moyen	Q10	Médiane	Q90	f équiv.
0,0	$6{,}59\times10^{6}$	$5{,}11\times10^{6}$	$6{,}50\times10^{6}$	$8{,}11\times10^{6}$	0,0227
0,1	$3{,}32\times10^{6}$	$2{,}92\times10^{6}$	$3{,}32\times10^{6}$	$3{,}72\times10^{6}$	0,0362
0,2	$9{,}86\times10^{5}$	$8{,}55\times10^{5}$	$9{,}86\times10^{5}$	$1{,}13\times10^{6}$	0,0499
0,3	$4{,}03\times10^{5}$	$3{,}50\times10^{5}$	$4{,}00\times10^{5}$	$4{,}65\times10^{5}$	0,0648
0,4	$2{,}01\times10^{5}$	$1{,}72\times10^{5}$	$2{,}02\times10^{5}$	$2{,}31\times10^{5}$	0,0803
0,5	$1{,}17\times10^{5}$	$9{,}98\times10^{4}$	$1{,}16\times10^{5}$	$1{,}36\times10^{5}$	0,0961
0,6	$7{,}48\times10^{4}$	$6{,}36\times10^{4}$	$7{,}43\times10^{4}$	$8{,}57\times10^{4}$	0,1135
0,7	$5{,}12\times10^{4}$	$4{,}38\times10^{4}$	$5{,}09\times10^{4}$	$5{,}88\times10^{4}$	0,1312
0,8	$3{,}67\times10^{4}$	$3{,}10\times10^{4}$	$3{,}64\times10^{4}$	$4{,}23\times10^{4}$	0,1503
0,9	$2{,}72\times10^{4}$	$2{,}29\times10^{4}$	$2{,}72\times10^{4}$	$3{,}16\times10^{4}$	0,1707
1,0	$2{,}11\times10^{4}$	$1{,}79\times10^{4}$	$2{,}10\times10^{4}$	$2{,}47\times10^{4}$	0,1918

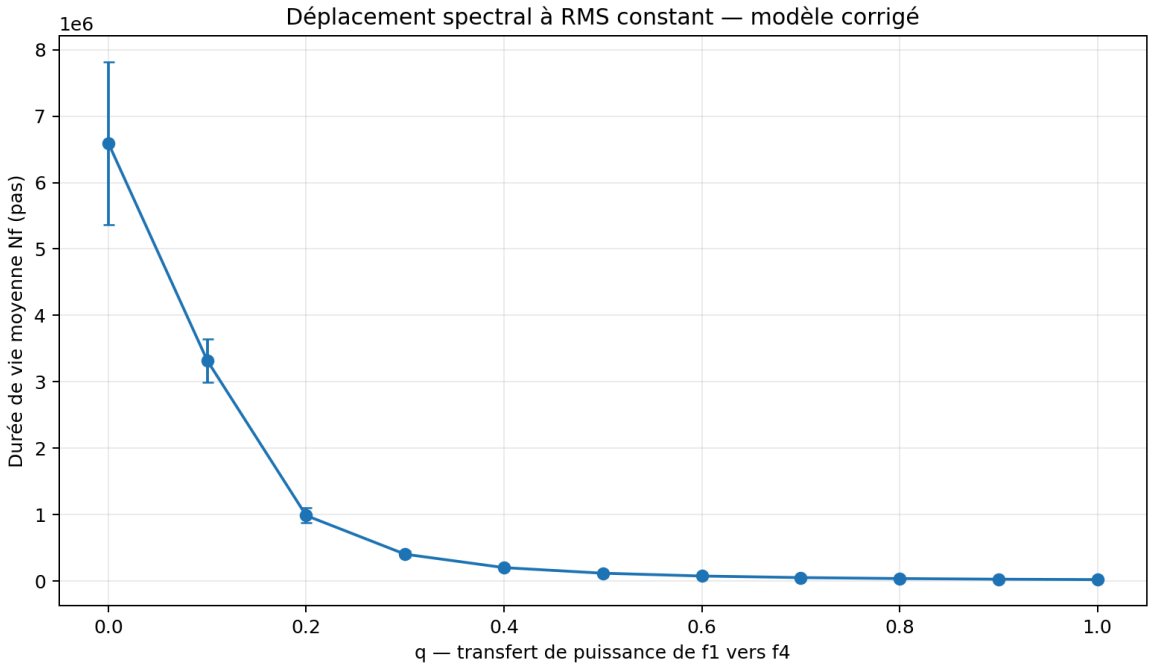


Figure 6.2 — Durée de vie moyenne lorsque la puissance est déplacée de la bande lente vers la bande rapide, à RMS constant. L’augmentation de la part haute fréquence réduit fortement la durée de vie dans le modèle.

La décroissance est très marquée : la durée de vie passe d’environ 6,6 millions de pas pour q = 0 à environ 21 000 pas pour q = 1. Ce résultat ne signifie pas qu’une haute fréquence est universellement plus dangereuse. Il traduit la structure choisie pour Λ(t), où le nombre de cycles par unité de temps croît avec ω. Dans une application mécanique réelle, il faudrait également introduire la fonction de transfert H(ω) entre l’excitation et la contrainte locale : une fréquence élevée fortement atténuée peut être moins sévère qu’une fréquence basse proche d’une résonance.

$$\Lambda(t) \;=\; K_M \int \omega \, |H(\omega)\, W_F(\omega, t)|^{\mathrm{m}} \, d\omega$$

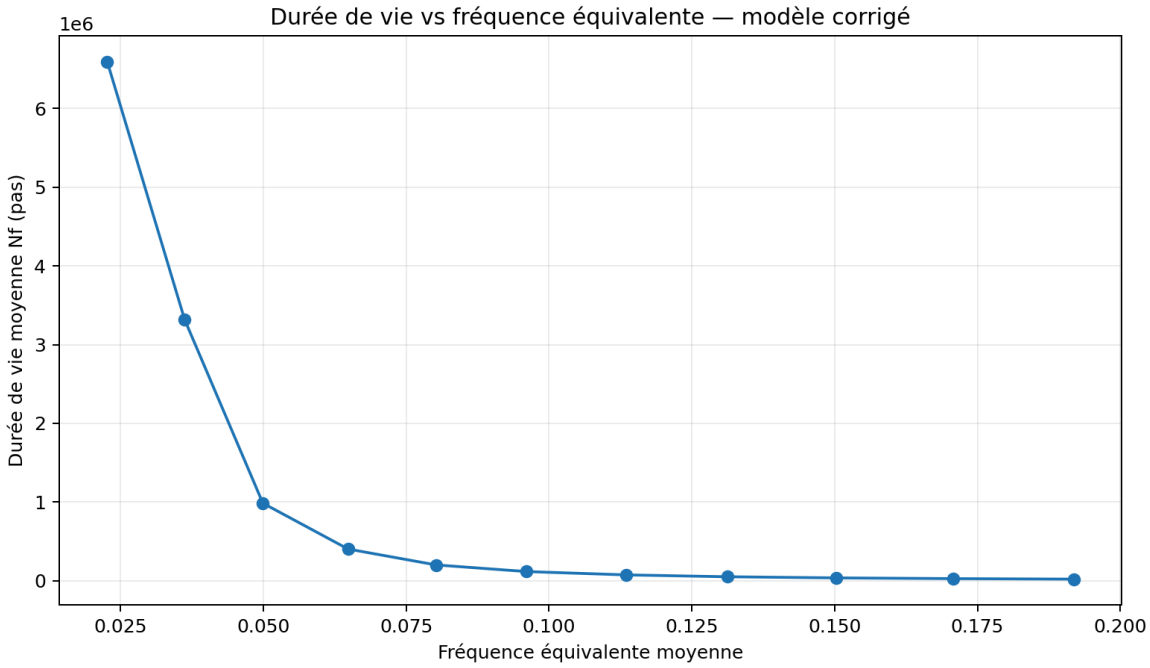


Figure 6.3 — Durée de vie moyenne en fonction de la fréquence équivalente. La relation est monotone sur cette expérience contrôlée, ce qui confirme que le spectre est une variable de fatigue à part entière et que le RMS n'est pas suffisant.

Allocation	Nf moyen	Q10	Médiane	Q90	f équiv.
100 % très basse f_1	$1{,}26\times10^{7}$	$6{,}34\times10^{6}$	$1{,}11\times10^{7}$	$2{,}05\times10^{7}$	0,0081
100 % basse f_2	$5{,}74\times10^{5}$	$3{,}89\times10^{5}$	$5{,}61\times10^{5}$	$7{,}68\times10^{5}$	0,0322
100 % haute f_3	$3{,}29\times10^{4}$	$2{,}66\times10^{4}$	$3{,}27\times10^{4}$	$3{,}95\times10^{4}$	0,1287
100 % très haute f_4	$1{,}20\times10^{4}$	$1{,}01\times10^{4}$	$1{,}19\times10^{4}$	$1{,}39\times10^{4}$	0,2313
25 % dans chaque bande	$2{,}67\times10^{5}$	$2{,}34\times10^{5}$	$2{,}65\times10^{5}$	$3{,}01\times10^{5}$	0,0899

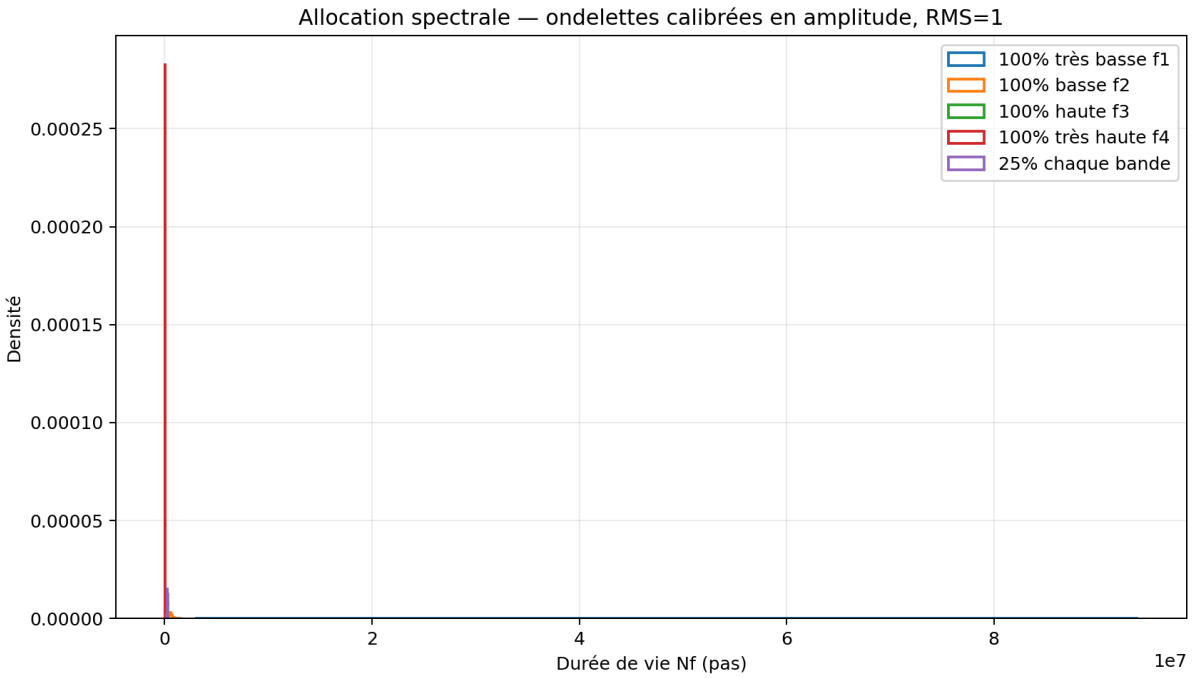


Figure 6.4 — Distributions de durée de vie pour cinq allocations spectrales canoniques, 1000 réalisations chacune. À RMS égal, les distributions se séparent fortement selon la bande dans laquelle l’énergie est concentrée.

Cette figure rend visible un point central du modèle : même énergie quadratique globale ne signifie pas même dommage. La durée de vie dépend de la combinaison fréquence × amplitude locale^m. Le cas réparti sur quatre bandes se situe entre les cas purs, mais sa dispersion reste notable parce que l’organisation temporelle de l’énergie varie d’une réalisation à l’autre.

6.4. Signal intermittent multiscalaire : même RMS, mais concentration temporelle de l’énergie

Le signal multiscalaire est ensuite rendu intermittent par multiplication par une enveloppe de volatilité lente de type lognormal. Après modulation, le signal est recentré et renormalisé à RMS = 1. Cette opération conserve l’énergie quadratique moyenne, mais crée de longues périodes calmes séparées par des bouffées de grande amplitude qui mobilisent simultanément plusieurs bandes.

$$x_\int(t) \;=\; x_multi(t)\, exp[\sigma_v\, Y(t) \;-\; \sigma_v^2/2]$$

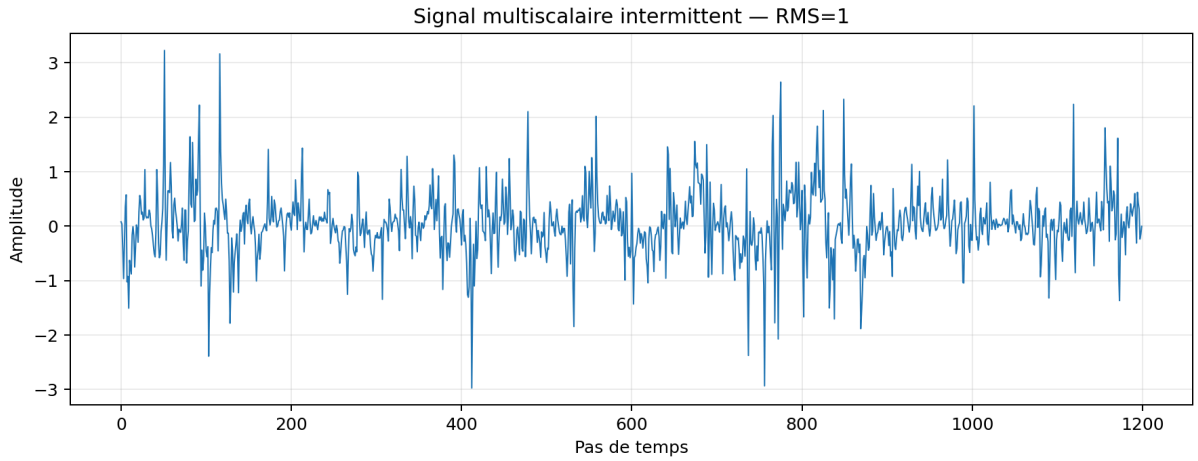


Figure 6.5 — Exemple de signal intermittent multiscalaire de RMS = 1. Les bouffées d'amplitude sont visibles malgré une énergie quadratique globale identique au cas multiscalaire gaussien.

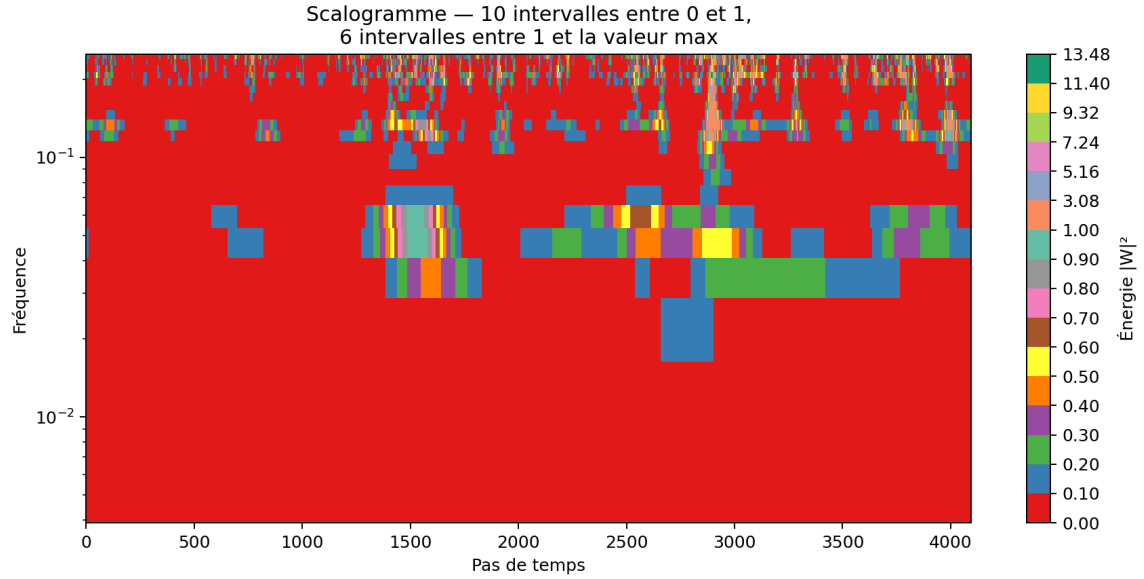


Figure 6.6 — Scalogramme du signal intermittent. Pour rendre visibles les faibles niveaux, la palette est discrétisée en dix intervalles entre 0 et 1, puis six intervalles au-dessus de 1. Cette représentation fait apparaître les paquets d'énergie localisés en temps et en fréquence.

Le choix d'une échelle de couleur non uniforme ne modifie pas les données ; il corrige seulement un problème de visualisation propre aux signaux intermittents. Une très petite fraction des coefficients atteint des valeurs élevées et écrase sinon le contraste de la majorité des coefficients compris entre 0 et 1.

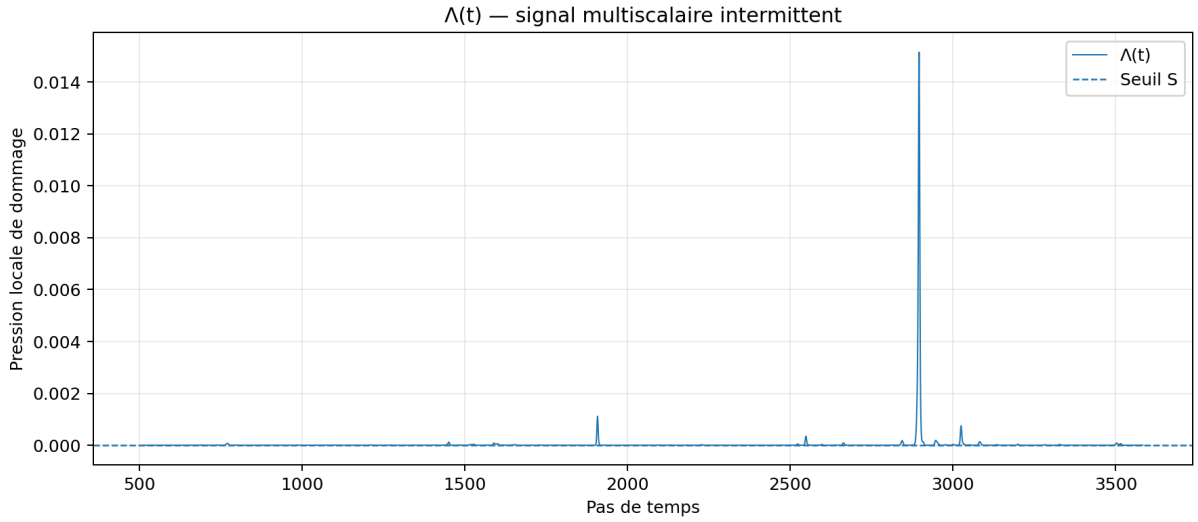


Figure 6.7 — Pression locale de dommage Λ(t). La loi en puissance m = 5 transforme les bouffées du scalogramme en pics de dommage très concentrés : quelques événements peuvent dominer une longue histoire de chargement.

Cette courbe illustre l’effet conjoint de l’intermittence et de la non-linéarité. Le RMS fixe seulement $E(X^2)$, alors que la loi S–N rend le dommage sensible à des moments d’ordre élevé. Dans le Monte Carlo, le signal multiscalaire gaussien possède $E(|X|^5) \approx 6{,}36$ et une kurtosis proche de 3 ; le signal intermittent atteint $E(|X|^5) \approx 246$ et une kurtosis proche de 23.

$$I_m = E(|X|^m) / [E(X^2)]^{m/2}$$

Signal	Nf moyen	Écart-type	Q10	Médiane	Q90	Kurtosis	$E\|X\|^5$
Multiscalaire gaussien	265 134	25 516	231 935	265 601	297 397	2,99	6,36
Multiscalaire intermittent	64 852	55 540	17 266	48 970	127 116	22,94	246,3

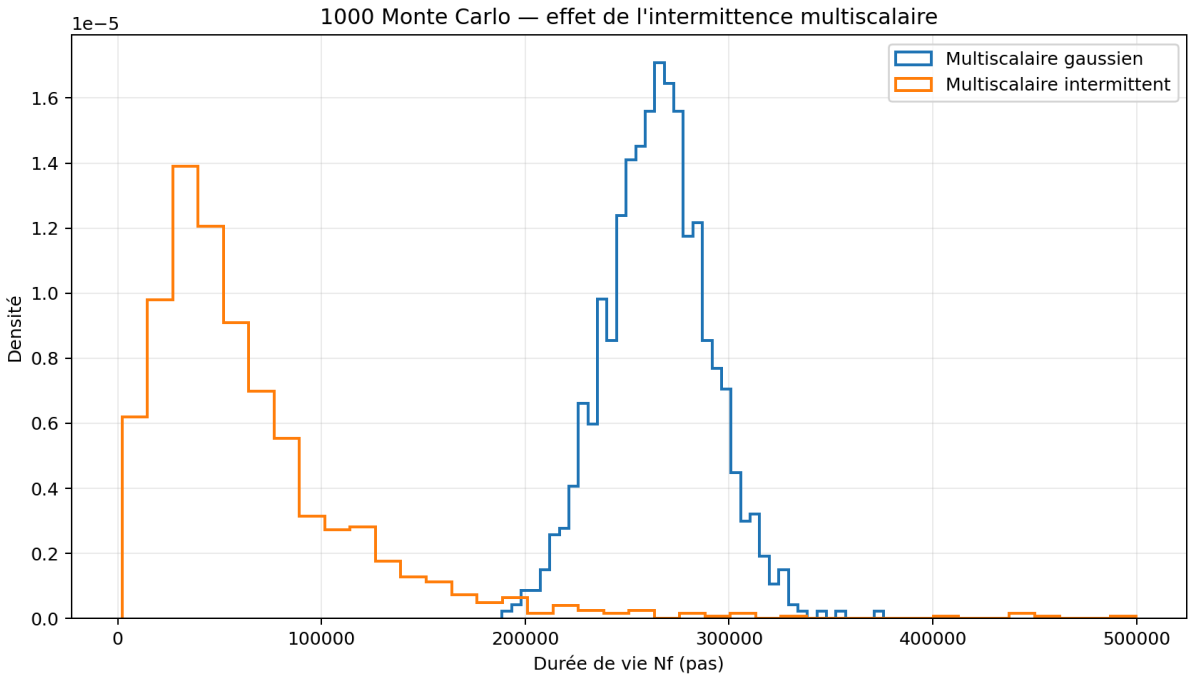


Figure 6.8 — Monte Carlo 1000 + 1000 : distributions de durée de vie du signal multiscalaire gaussien et du signal multiscalaire intermittent. À RMS identique, l'intermittence réduit la vie moyenne d'environ 75 % et élargit fortement la distribution.

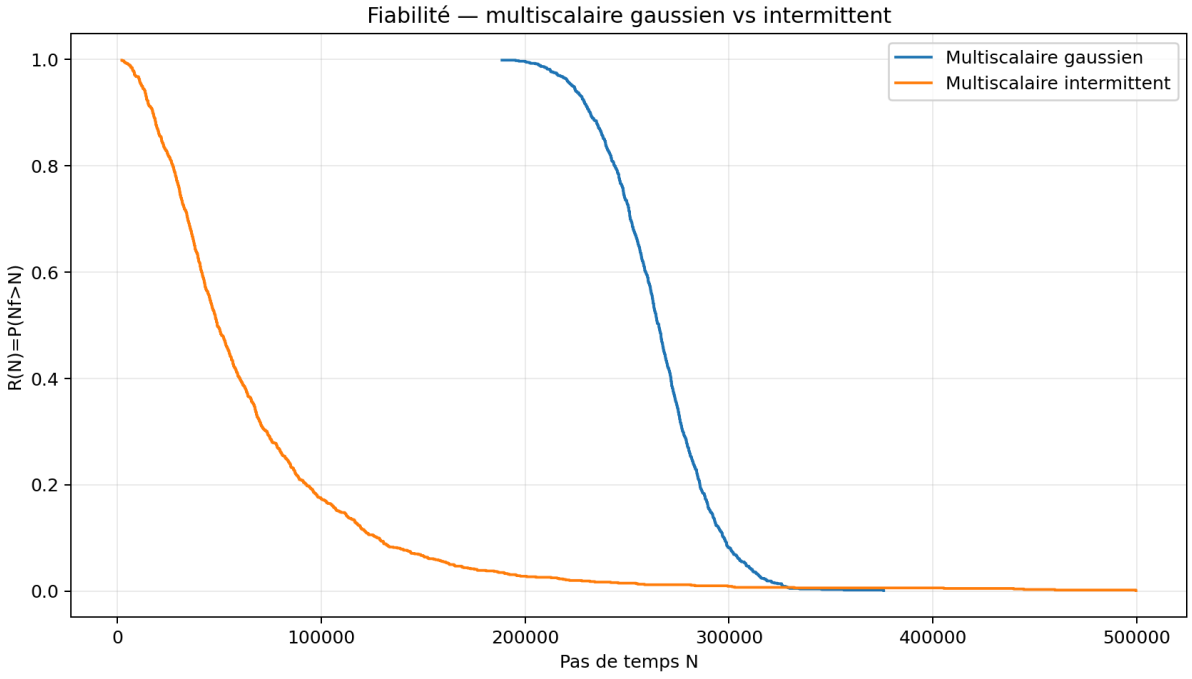


Figure 6.9 — Courbes de fiabilité correspondantes. L'intermittence ne déplace pas seulement la moyenne : elle augmente fortement la probabilité de ruptures très précoces, ce qui est essentiel dans une lecture probabiliste de la fatigue.

La fréquence équivalente moyenne des deux familles reste proche ; la diminution de vie ne peut donc pas être expliquée principalement par un déplacement du spectre. Le facteur dominant est ici la concentration temporelle et statistique des amplitudes, amplifiée par l'exposant m = 5. Ce résultat rejoint les observations expérimentales de fatigue vibratoire non gaussienne : à écart-type comparable, la kurtosis et la structure

des pics peuvent modifier sensiblement la durée de vie, même si la kurtosis seule ne suffit pas à caractériser tous les signaux complexes.

6.5. Benchmark : comparaison avec rainflow + Palmgren–Miner

La validation la plus importante consiste à comparer le modèle temps–fréquence à une méthode de référence qui ne partage pas sa construction. Les mêmes 1000 signaux intermittents multiscalaires RMS = 1 sont donc évalués par un comptage rainflow conforme à la logique ASTM E1049, puis par la règle de Palmgren–Miner utilisant exactement la même loi S–N. Pour chaque cycle rainflow de demi-étendue A_i et de multiplicité n_i, le dommage est :

$$D_RF \;=\; \Sigma_i \, n_i \, A_i^{\mathrm{m}} \,/\, C$$

Le comptage rainflow a été contrôlé sur un sinus de 100 périodes : il fournit environ 100,5 cycles équivalents, l'écart correspondant aux demi-cycles résiduels de bord. Le benchmark compare ensuite trois sorties : rainflow + Miner, ondelettes + Miner local, et ondelettes + dynamique logistique.

Méthode	Nf moyen	Écart-type	Q10	Médiane	Q90
Rainflow + Miner	33 305	30 652	8 034	25 812	65 067
Ondelette + Miner local	59 463	50 412	16 636	48 014	107 338
Ondelette + dynamique	59 162	50 193	16 546	47 759	106 798

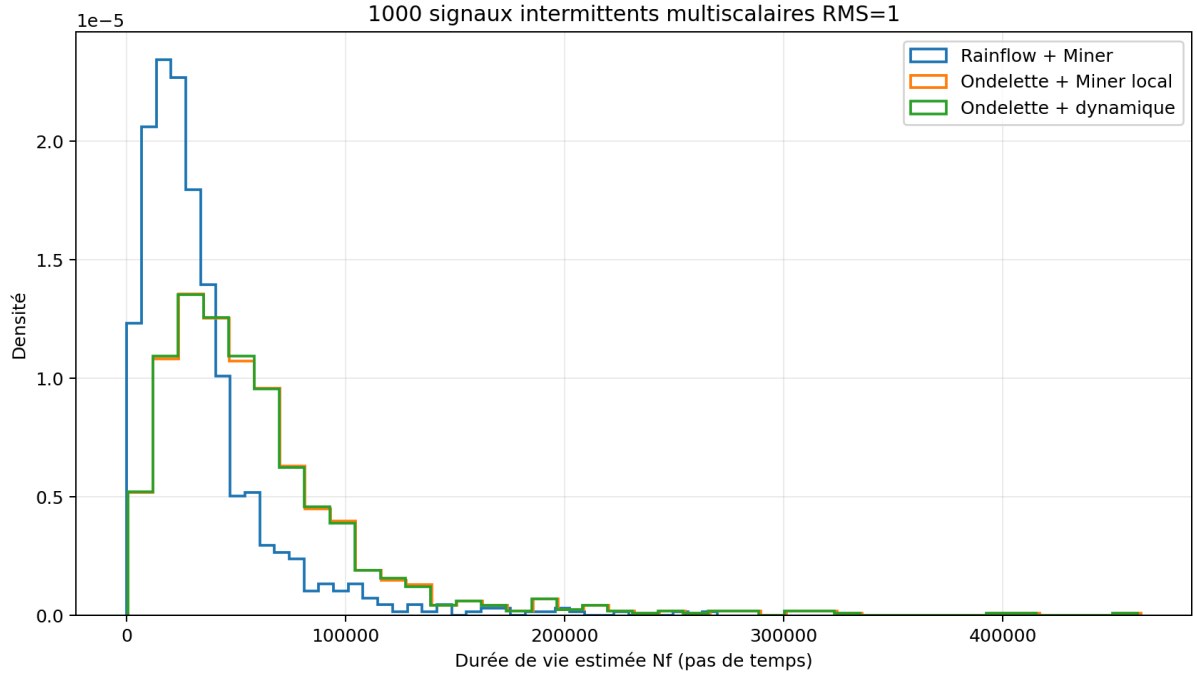


Figure 6.10 — Superposition des distributions de durée de vie. Les méthodes ondelettes conservent une forme de distribution comparable à rainflow, mais prédisent ici des vies plus longues avec la calibration sinusoïdale utilisée.

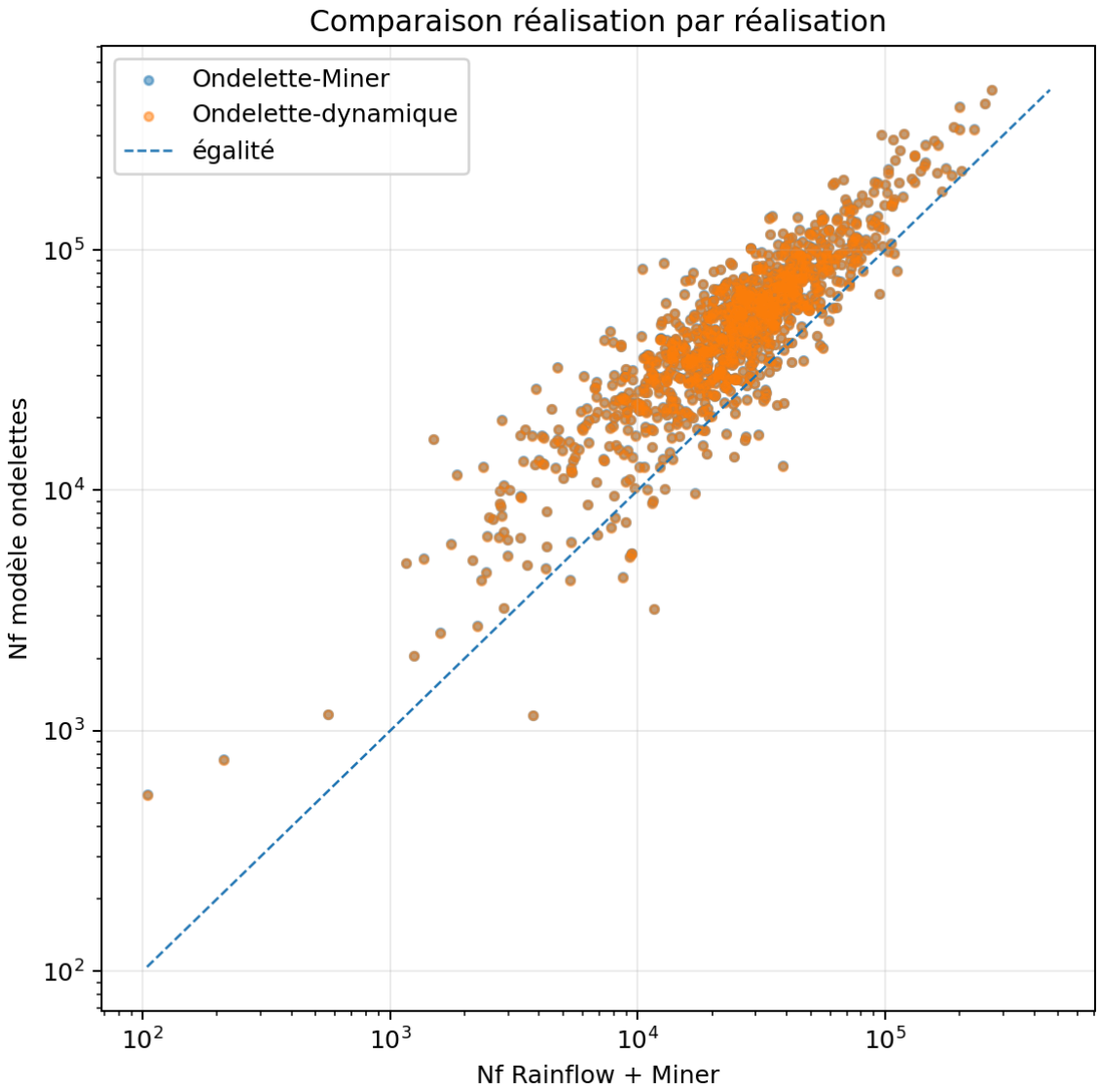


Figure 6.11 — Comparaison réalisation par réalisation. La proximité du nuage avec une tendance monotone montre que le modèle ondelettes identifie en grande partie les mêmes histoires de chargement comme sévères ou peu sévères que rainflow.

La corrélation est forte : le coefficient de Pearson calculé sur les logarithmes des vies vaut environ 0,88 et le coefficient de rang de Spearman environ 0,86. Ce résultat est plus important pédagogiquement que l’égalité des valeurs absolues : il indique que Λ(t) conserve une grande partie de l’information de sévérité contenue dans le comptage des cycles.

$$r_Pearson(\log N_f) \simeq 0,88\,, \quad \rho_Spearman \simeq 0,86$$

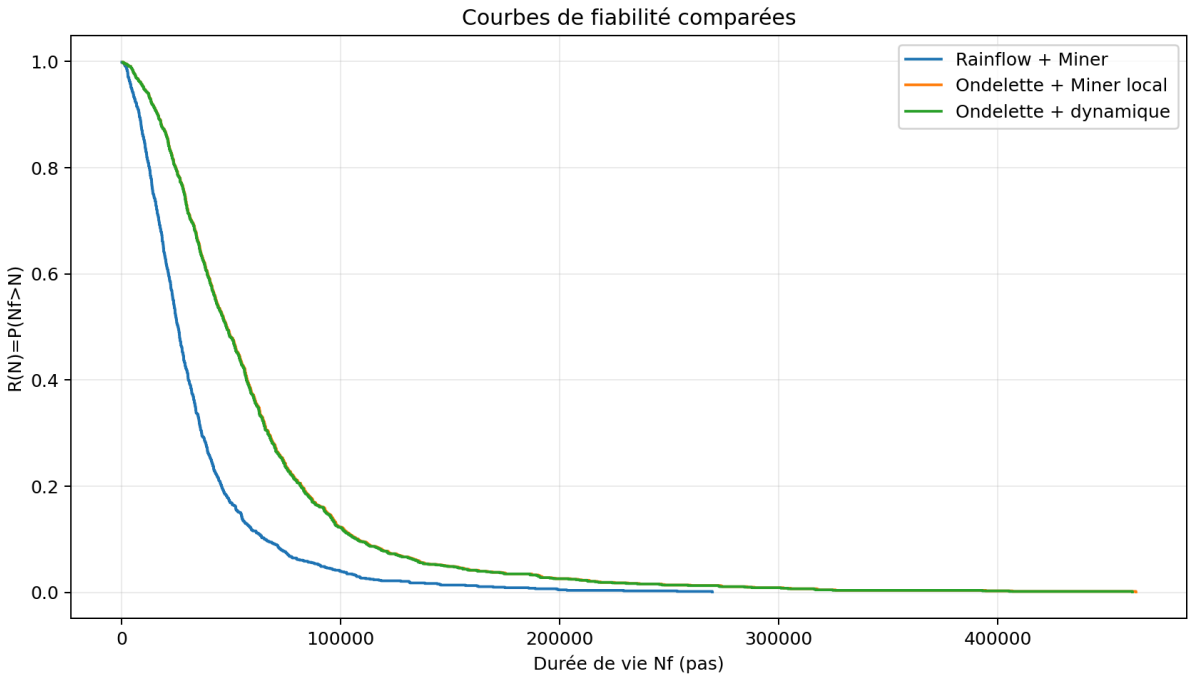


Figure 6.12 — Courbes de fiabilité. Les courbes ondelettes sont décalées vers les grandes vies, mais leur forme générale suit celle de rainflow : le désaccord est surtout métrique plutôt que topologique.

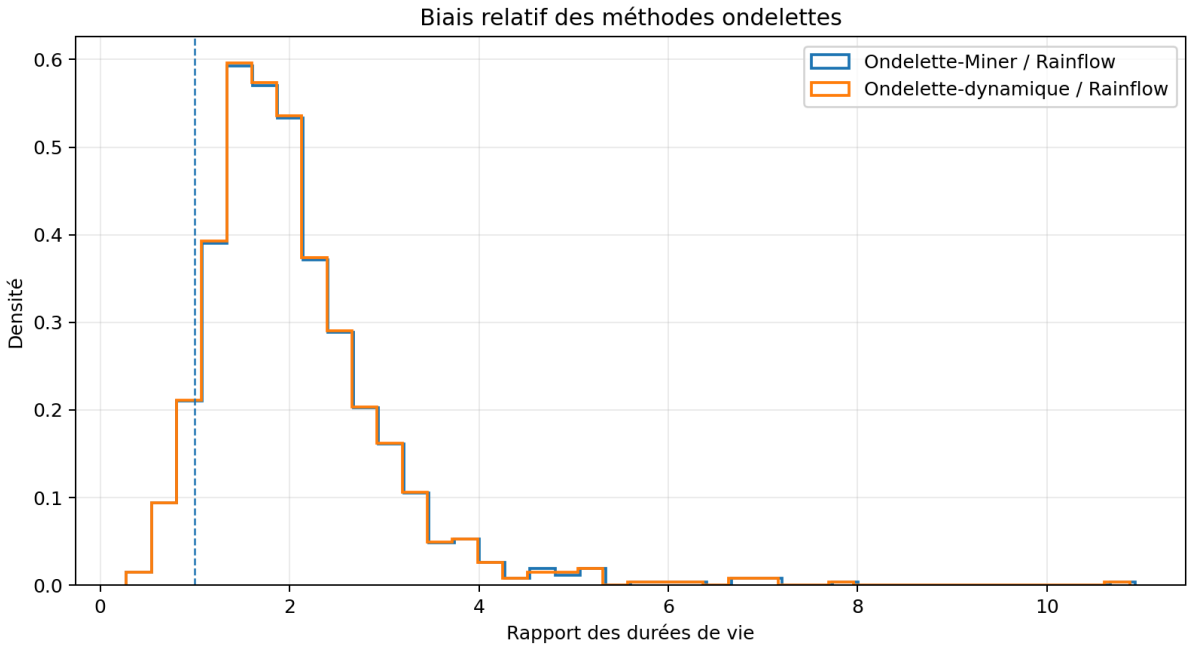


Figure 6.13 — Rapport Nf(ondelettes)/Nf(rainflow). Le rapport médian est voisin de 1,87 : avec la calibration actuelle, le modèle temps–fréquence sous-estime donc le dommage absolu d'un facteur proche de deux en valeur médiane, avec une dispersion non négligeable.

Cette comparaison conduit à une lecture nuancée. Le modèle possède une bonne justesse relative : il classe correctement les chargements et reproduit qualitativement la dispersion. En revanche, sa justesse métrique est encore insuffisante pour un usage prédictif. Un simple recalage de K_M pourrait corriger le biais moyen, mais la dispersion du rapport montre qu'un coefficient unique ne supprimera pas toutes les

différences. Rainflow décrit explicitement la géométrie des excursions maximum–minimum, alors que les ondelettes décrivent une concentration locale d'énergie dans le plan temps–fréquence : ces deux opérations ne sont pas mathématiquement équivalentes.

6.6. Bilan pédagogique et réserves

Dimension	Ce qu'elle mesure	Résultat principal
RMS	Énergie quadratique globale	N'est pas suffisant pour prédire la fatigue lorsque le spectre ou les queues changent.
Répartition spectrale	Position de l'énergie dans les fréquences	À RMS égal, déplacer l'énergie vers des bandes plus rapides réduit Nf dans le modèle calibré.
Mémoire	Organisation temporelle sans changer la loi marginale	Agit surtout sur la dispersion lorsque les amplitudes restent gaussiennes.
Intermittence	Concentration de l'énergie en bouffées et queues épaisses	Réduit fortement Nf et augmente le risque de ruptures précoces.
Rainflow	Géométrie explicite des cycles	Reste une référence robuste pour le cumul cyclique classique.
Ondelettes	Localisation temps–fréquence	Conservent bien le classement de sévérité, mais nécessitent une calibration précise pour la valeur absolue du dommage.

Le modèle peut ainsi être présenté comme un proxy continu et interprétable du dommage cyclique, particulièrement adapté à l'étude pédagogique de signaux non stationnaires, multiscalaires ou intermittents. Il ne doit pas être présenté comme un substitut validé à rainflow + Miner ni comme une loi universelle. Sa principale force est de rendre visibles, dans une chaîne unique, les rôles distincts de l'amplitude, de la fréquence, de l'intermittence et de la mémoire, puis de permettre une confrontation quantitative avec une méthode de référence.

Pour une étape ultérieure, la validation la plus rigoureuse serait une procédure calibration–validation : ajuster K_M sur une moitié des historiques en minimisant l'écart logarithmique à rainflow, puis tester sans recalage sur l'autre moitié et enfin sur des signaux expérimentaux. L'introduction d'une fonction de transfert structurale H(ω) serait également nécessaire pour passer du chargement externe à la contrainte réellement vue par la pièce.

$$K_M^{*} = arg\,min_K \Sigma_r \left[log\, N_f, wav(r;K) - log\, N_f, RF(r)\right]^2$$

6.7. Vers un pont statistique entre Rainflow et ondelettes : de Morlet à DOG3

Les essais précédents avaient montré que l'analyse de Morlet et le comptage Rainflow ne racontaient pas des histoires indépendantes : ils classaient déjà de façon assez proche les réalisations les plus sévères, mais ils divergeaient encore sur l'échelle quantitative du dommage. Le point d'achoppement n'était donc plus de savoir si l'ondelette « voyait » la fatigue, mais de comprendre si l'on pouvait rapprocher statistiquement sa représentation des cycles effectivement identifiés par Rainflow. Les quatre étapes qui suivent montrent comment le changement de forme d'ondelette, puis une calibration d'amplitude très simple, recentrent progressivement les statistiques de durée de vie.

6.7.1. Changer de géométrie : une ondelette plus proche d'un cycle Rainflow

Morlet est naturellement adaptée à l'analyse d'oscillations quasi harmoniques. Rainflow, au contraire, raisonne à partir d'excursions entre extrema et de cycles imbriqués. Il était donc naturel de remplacer l'ondelette oscillante par une forme plus proche de cette géométrie locale. La dérivée troisième d'une gaussienne (DOG3) présente une alternance de lobes qui rappelle un « S couché » et encode mieux les retournements successifs d'un cycle.

$$\psi_3(u) \propto \left(u^3 - 3u\right)e^{-u^2/2}$$

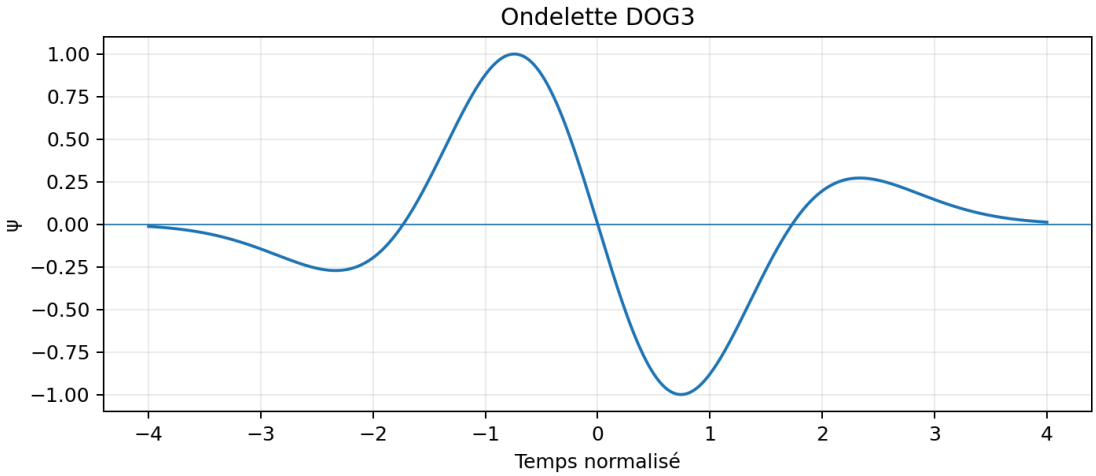


Figure 6.7-1 — Forme de l'ondelette DOG3 utilisée pour rapprocher la détection temps–échelle de la géométrie des cycles Rainflow.

Ce changement ne rend pas la transformée en ondelettes identique à Rainflow. Il modifie plutôt le dictionnaire de formes auquel le signal est comparé. Si la forme élémentaire ressemble davantage aux excursions recherchées par Rainflow, la hiérarchie statistique des événements doit se rapprocher de celle du comptage de cycles.

6.7.2. Premier test sur 1000 signaux intermittents multiscalaires

Le benchmark a été repris sur la même famille de 1000 signaux intermittents et multiscalaires de RMS 1. Pour chaque réalisation, Rainflow fournit un ensemble de cycles d'amplitudes A_k et de poids n_k. On peut résumer ce comptage par ses moments d'ordre q :

$M_q^{RF} = \sum_k n_k A_k^q$L'analyse DOG3 fournit de son côté des coefficients localisés en échelle et dans le temps. Le moment ondelette correspondant est construit sous la forme :

$M_q^{DOG3} = K_q \sum_{a,t} f_a |W_{DOG3}(a,t))^q \Delta lnf$La comparaison est particulièrement révélatrice : les corrélations deviennent très élevées pour tous les ordres q entre 2 et 8. Pour q = 5, précisément l'exposant retenu dans la loi de fatigue, Pearson sur les logarithmes atteint environ 0,963 et Spearman environ 0,955. DOG3 améliore donc nettement le classement statistique par rapport à Morlet.

Ordre q	Pearson log	Spearman	M_DOG3 / M_RF (médiane)
2	0,981	0,968	0,577
3	0,971	0,965	0,484
4	0,967	0,959	0,387
5	0,963	0,955	0,312
6	0,960	0,951	0,255

7	0,956	0,947	0,211
8	0,953	0,944	0,175

Tableau 6.7-1 — Corrélations et biais des moments entre Rainflow et DOG3 avant correction. La structure statistique est très bien conservée, mais l'échelle des moments reste décalée.

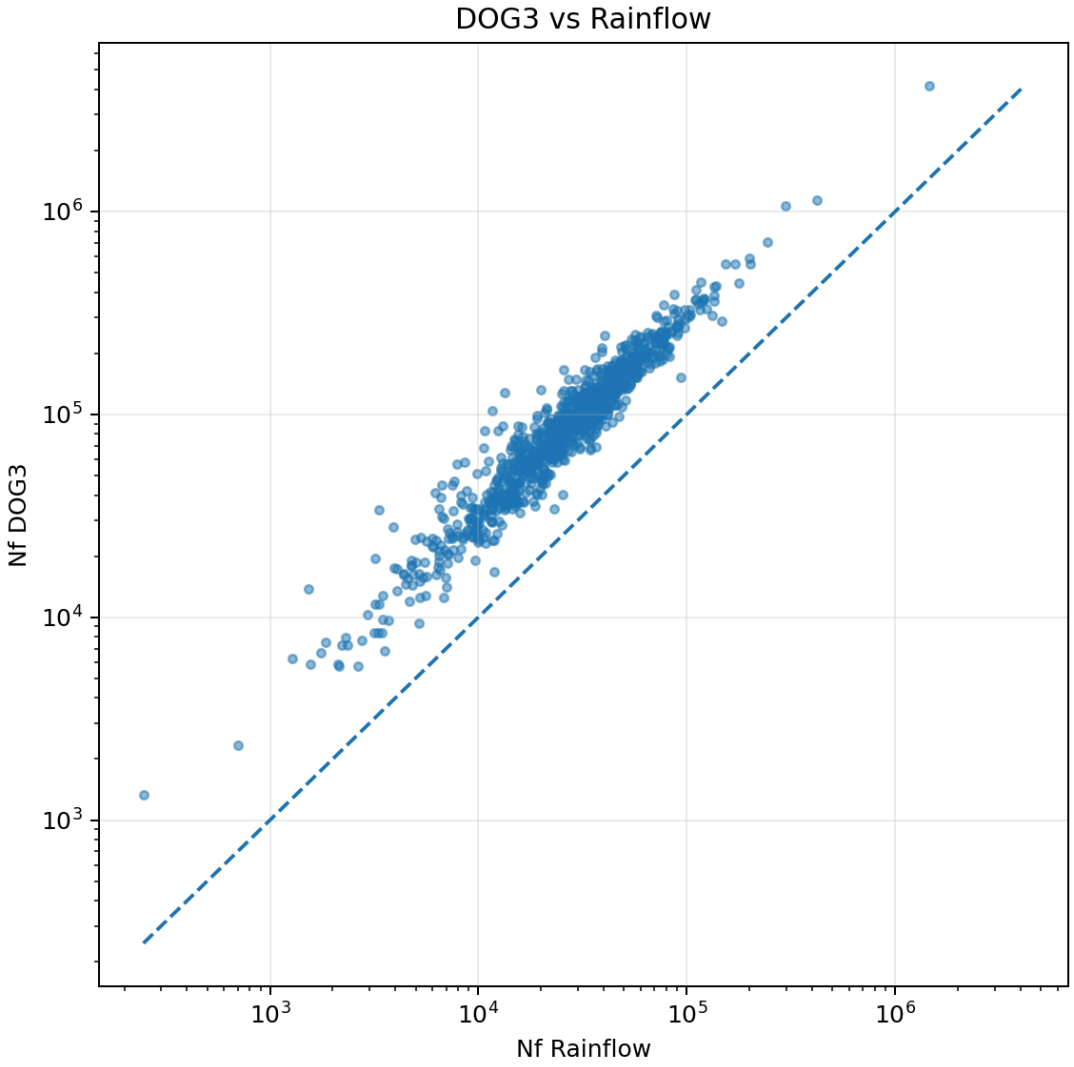


Figure 6.7-2 — Comparaison réalisation par réalisation des durées de vie Rainflow et DOG3 avant correction. Le nuage est fortement corrélé mais décalé au-dessus de la diagonale d'égalité.

Le nuage montre ce double caractère : les réalisations que Rainflow juge sévères sont presque toujours jugées sévères par DOG3 ; en revanche, la durée de vie DOG3 reste systématiquement plus élevée. La forme de l'ondelette semble donc avoir largement résolu le problème de détection statistique des événements, sans encore résoudre celui de l'étalonnage métrique.

6.7.3. Le biais des moments révèle une erreur multiplicative d'amplitude

La décroissance du rapport M_DOG3/M_RF avec q pourrait faire penser à une correction complexe dépendant de l'ordre du moment. Mais elle est précisément compatible avec une petite erreur multiplicative sur l'amplitude, ensuite amplifiée par la puissance q. On définit alors :

$c(q) = \left(\frac{M_q^{RF}}{M_q^{DOG3}} \right)^{1/q}$ Les coefficients ainsi déduits sont remarquablement proches. À partir de q = 3, ils restent dans une bande étroite autour de 1,26. L'hypothèse d'un coefficient unique devient donc plus naturelle qu'une fonction compliquée du matériau.

q	c(q) médian
2	1,315
3	1,273
4	1,267
5	1,262
6	1,255
7	1,251
8	1,246

Tableau 6.7-2 — Coefficient d'amplitude déduit séparément pour chaque ordre. Les valeurs convergent vers une zone proche de 1,26.

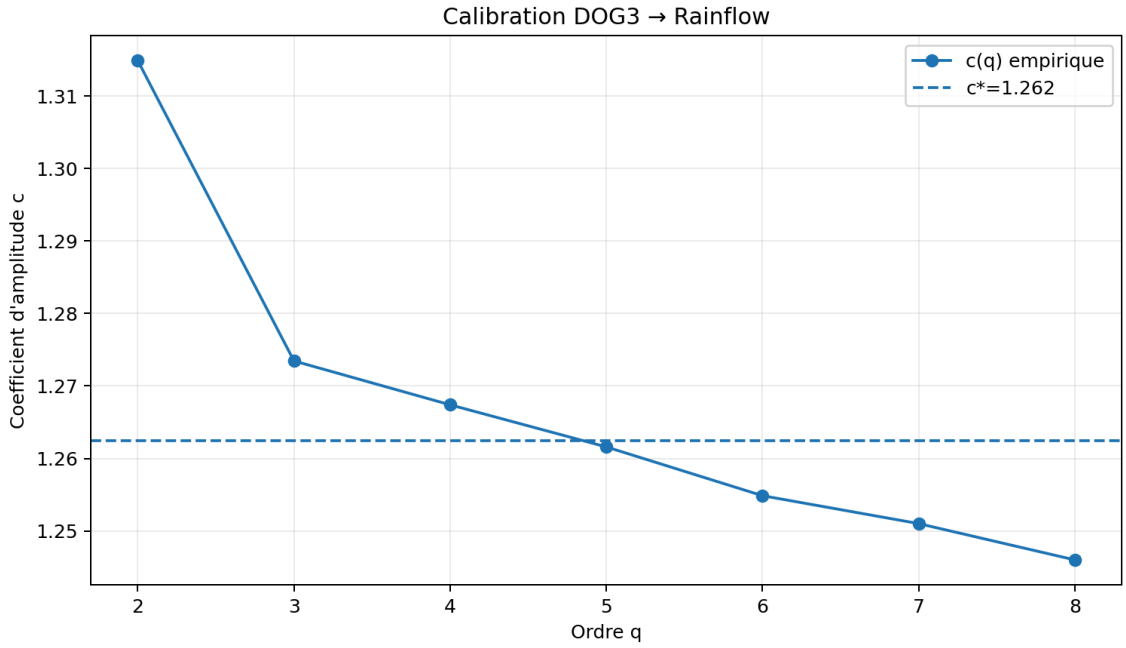


Figure 6.7-3 — Coefficient d'amplitude c(q) estimé sur 1000 runs de calibration. La ligne pointillée représente le coefficient unique c* retenu par ajustement global.

L'ajustement global conduit à c* = 1,262486. La correction agit d'abord sur l'amplitude équivalente associée au coefficient DOG3 :

$A_{eq} = c^{\star} | W_{DOG3})$Le moment corrigé devient alors :

$M_q^{DOG3,corr} = \left(c^{\star}\right)^q M_q^{DOG3}$Avec m = 5, une correction d'amplitude de seulement 26 % produit un facteur c*^5 proche de 3,2 sur le dommage, précisément du même ordre que le décalage observé entre les durées de vie non corrigées.

6.7.4. Validation indépendante sur 1000 nouveaux signaux

Pour éviter une compensation a posteriori, c* a été figé après calibration sur les 1000 premiers runs, puis appliqué sans modification à 1000 nouvelles réalisations indépendantes de la même famille statistique. Le

test devient alors prédictif : DOG3 doit retrouver la statistique Rainflow sans information supplémentaire sur le nouveau jeu.

Méthode	Nf moyen	Écart-type	Q10	Médiane	Q90
Rainflow	34 175	32 377	8 251	26 225	64 296
DOG3 non corrigé	111 048	102 393	29 931	85 761	201 757
DOG3 corrigé c*	34 624	31 926	9 332	26 740	62 907

Tableau 6.7-3 — Validation sur 1000 nouveaux signaux. La correction par c recentre simultanément la moyenne, la médiane et les quantiles de la durée de vie sur Rainflow.*

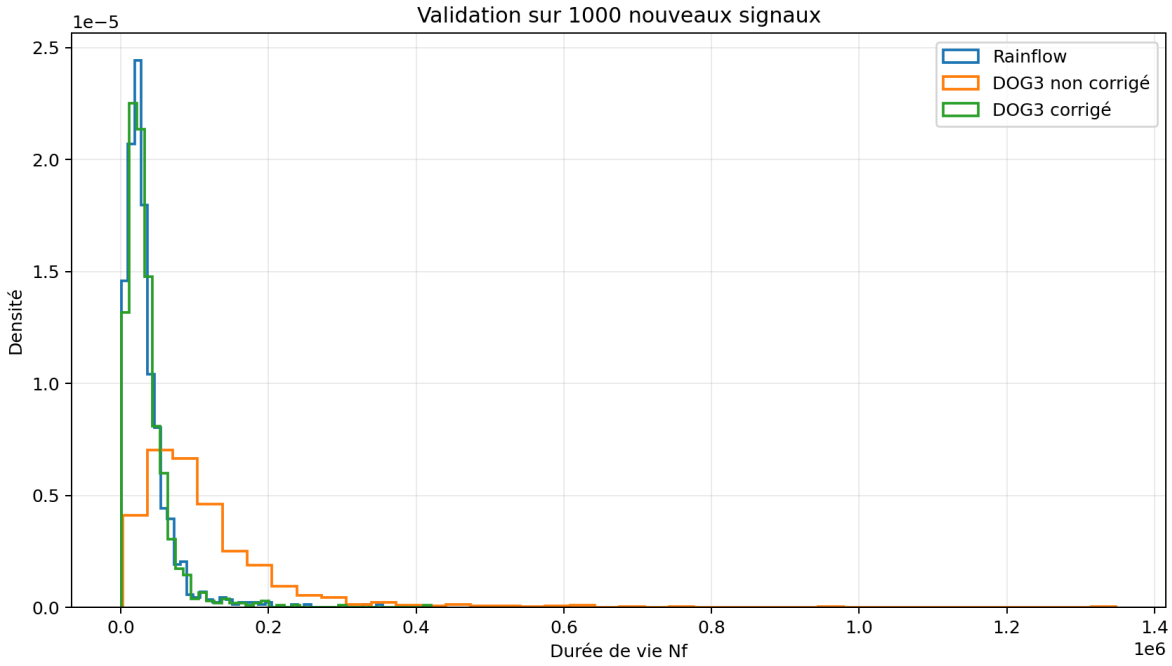


Figure 6.7-4 — Distributions des durées de vie sur le jeu de validation. Après correction, la distribution DOG3 se superpose presque à celle obtenue par Rainflow.

Le recentrage est net. La moyenne passe de 111 048 sans correction à 34 624 après correction, pour 34 175 avec Rainflow. La médiane passe de 85 761 à 26 740, contre 26 225 pour Rainflow. Le rapport médian Nf_DOG3/Nf_RF, voisin de 3,24 avant correction, devient 1,011. La correction ne déplace donc pas seulement une moyenne : elle ramène l'ensemble de la distribution vers la référence.

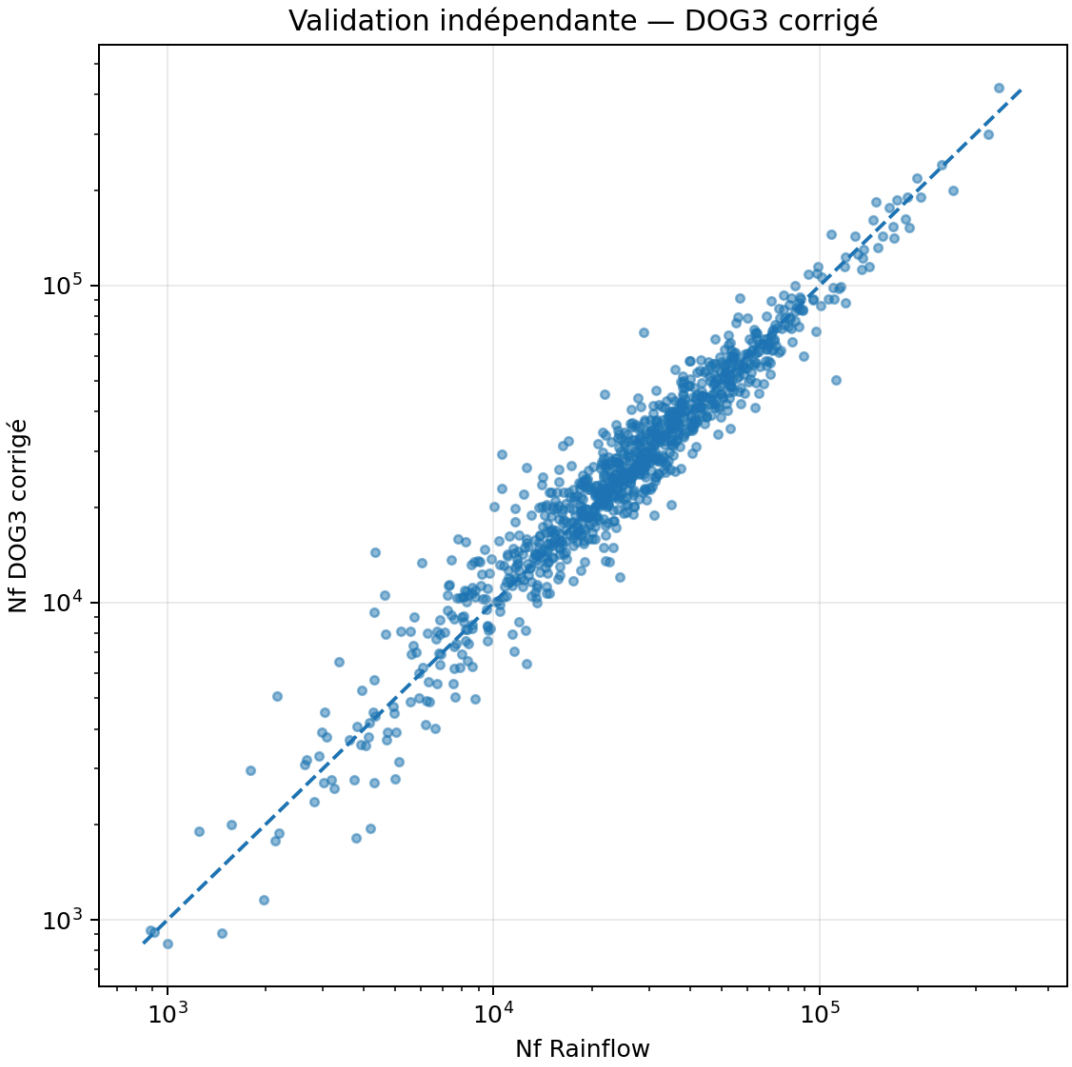


Figure 6.7-5 — Validation indépendante après correction. Les points DOG3 corrigés se resserrent autour de la diagonale Nf_DOG3 = Nf_RF.

Pearson sur les logarithmes vaut environ 0,966 et Spearman environ 0,961. Le coefficient multiplicatif ne change pas le classement des runs ; il restaure l'échelle d'amplitude. DOG3 fournit donc la géométrie statistique, tandis que c* joue le rôle d'un étalonnage entre deux représentations du même phénomène.

6.7.5. Vérification sur plusieurs moments

Le même coefficient unique a été appliqué aux moments d'ordres différents. Cette vérification est essentielle : si la correction ne fonctionnait que pour m = 5, elle ne serait qu'un recalage de la loi de fatigue. Or elle ramène également les moments q = 3 à 6 très près de l'unité.

q	Rapport médian avant	Rapport médian après
2	0,578	0,921
3	0,483	0,972
4	0,385	0,978
5	0,309	0,990
6	0,250	1,014
7	0,205	1,049
8	0,169	1,092

Tableau 6.7-4 — Effet du coefficient unique c sur les moments. La correction est presque parfaite autour des ordres 3 à 6 ; un léger écart subsiste aux ordres extrêmes.*

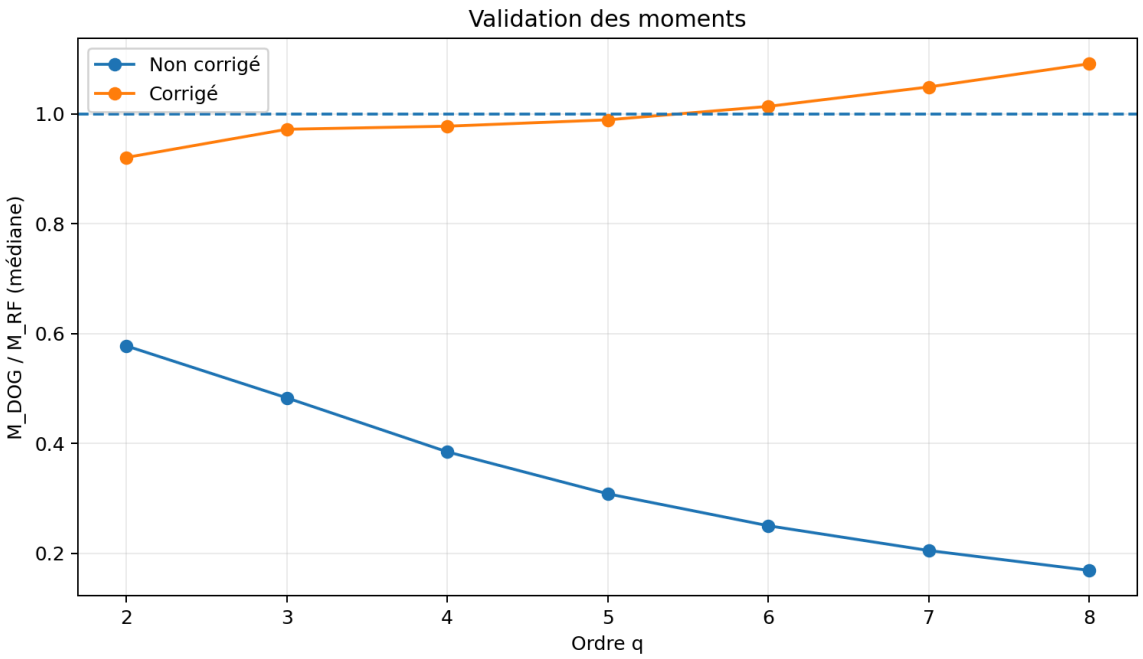


Figure 6.7-6 — Biais médian des moments avant et après correction. La courbe corrigée se recentre autour de 1 sur une large plage d'ordres q.

Pour m = 5, le rapport médian corrigé vaut 0,990 : le moment directement associé au dommage de fatigue est donc pratiquement recentré. Aux ordres très élevés, une légère sur-correction apparaît ; elle rappelle que le coefficient n'est pas une identité mathématique parfaite mais une approximation statistique remarquablement stable dans la zone utile.

6.7.6. Interprétation et portée du pont DOG3–Rainflow

Avec Morlet, l'ondelette était surtout un outil temps–fréquence capable de localiser l'énergie. Avec DOG3, elle devient aussi un détecteur de formes proches des excursions Rainflow. La très forte corrélation montre que la structure relative des cycles est largement contenue dans les coefficients DOG3. Le coefficient c* joue ensuite le rôle d'un étalonnage d'amplitude entre une représentation discrète et combinatoire, Rainflow, et une représentation continue, localisée en temps et en échelle.

Dans ce cadre, le dommage peut s'écrire sous la forme condensée :

$D_{DOG3} = \frac{(c^*)^m}{C} \iint f(a) |W_{DOG3}(a,t))^m dt dl n f$et, sur la famille de signaux étudiée, l'expérience numérique conduit à :

$N_f^{DOG3,corr} \approx N_f^{RF}$La réserve essentielle est que c* = 1,2625 a été calibré et validé sur deux jeux indépendants mais appartenant à la même famille de signaux intermittents multiscalaires RMS = 1. Sa stabilité face à des signaux gaussiens étroits ou larges bandes, à d'autres mémoires, à d'autres niveaux d'intermittence ou à des distributions à queues lourdes reste à tester. Le résultat n'établit donc pas encore une équivalence universelle Rainflow–DOG3 ; il montre cependant qu'un pont statistique simple, interprétable et très précis est possible dans le cadre étudié.

D'un point de vue pédagogique, la conclusion est forte : le passage à une ondelette mieux adaptée ne cherche pas à reproduire littéralement l'algorithme Rainflow. Il cherche à préserver sa structure statistique. Lorsque cette structure est capturée, une correction métrique modeste suffit à recentrer les durées de vie.

Le chemin Morlet → DOG3 → c* illustre ainsi une idée générale de la modélisation : choisir une représentation qui conserve la géométrie pertinente du phénomène, puis calibrer proprement son échelle.

7. Bibliographie commentée

Ces références situent le modèle par rapport aux bases historiques de la fatigue, aux méthodes spectrales, aux chargements non gaussiens, aux effets de séquence et aux approches probabilistes. Les commentaires indiquent le lien direct avec les résultats présentés ci-dessus.

1. Basquin, O. H. (1910). The exponential law of endurance tests. Proceedings of the ASTM, 10, 625–630.

Fondement historique de la loi S–N en puissance N = C A^{-m}. Le choix de m contrôle la sensibilité aux fortes amplitudes et explique pourquoi l'intermittence est amplifiée dans notre simulation.

2. Miner, M. A. (1945). Cumulative damage in fatigue. Journal of Applied Mechanics, 12, A159–A164.

Référence de la règle de cumul linéaire D = Σ n_i/N_i. Elle constitue le point d'ancrage du modèle : nous localisons cette règle dans le temps, puis nous lui ajoutons une dynamique d'état.

3. Dirlik, T.; Benasciutti, D. (2021). Dirlik and Tovo–Benasciutti Spectral Methods in Vibration Fatigue: A Review with a Historical Perspective. Metals, 11, 1333. DOI 10.3390/met11091333.

Revue de référence sur la fatigue vibratoire dans le domaine fréquentiel. Elle rappelle l'efficacité des méthodes PSD pour les processus gaussiens stationnaires, mais aussi leurs limites pour les signaux non gaussiens ou non stationnaires.

4. Benasciutti, D.; Tovo, R. (2006). Fatigue life assessment in non-Gaussian random loadings. International Journal of Fatigue, 28, 733–746. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2005.09.006.

Montre théoriquement et par comparaison à des données que la non-gaussianité modifie fortement les distributions de cycles et le dommage même à RMS comparable. C'est un support direct à notre comparaison iid/intermittent.

5. Owsiński, R.; Niesłony, A. (2021). Fatigue Test of 6082 Aluminum Alloy under Random Load with Controlled Kurtosis. Materials, 14, 856. DOI 10.3390/ma14040856.

Résultat expérimental central : une augmentation de kurtosis à écart-type maintenu réduit significativement la durée de vie. Cette tendance est celle que reproduit qualitativement notre signal intermittent.

6. Kihm, F.; Ferguson, N. S.; Antoni, J. (2015). Fatigue Life from Kurtosis Controlled Excitations. Procedia Engineering, 133, 698–713. DOI 10.1016/j.proeng.2015.12.652.

Explique pourquoi les essais gaussiens classiques peuvent sous-représenter les bouffées réelles en automobile ou en aéronautique. Les excitations à kurtosis contrôlée sont utilisées pour rapprocher les essais de l'environnement réel.

7. Owsiński, R.; Niesłony, A. (2021). Crest factor and kurtosis parameter under vibrational random loading. International Journal of Fatigue, 147, 106179. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2021.106179.

Nuance essentielle : la kurtosis seule n'est pas suffisante pour décrire un chargement non gaussien. Le facteur de crête, la durée d'observation et la manière de normaliser le signal ont également un rôle.

8. Benasciutti, D. et al. (2020). More on variance of fatigue damage in non-Gaussian random loadings – effect of skewness and kurtosis. Procedia Structural Integrity, 25, 101–111. DOI 10.1016/j.prostr.2020.04.014.

Étudie directement la variance du dommage. Cette référence est pertinente pour notre conclusion selon laquelle la structure du chargement peut modifier la dispersion des vies, pas seulement leur moyenne.

9. A plain linear rule for fatigue analysis under natural loading considering the sequence effect. International Journal of Fatigue, 103 (2017), 386–394. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2017.06.018.

Rappelle une limite classique de Palmgren–Miner : l’ordre des chargements est ignoré. Les effets de séquence motivent l’introduction de variables d’état ou de règles non linéaires lorsque le contexte l’exige.

10. Niu, Q.; Yang, S.; Li, X. (2018). An empirical mode decomposition-based frequency-domain approach for the fatigue analysis of nonstationary processes. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 41, 1980–1996. DOI 10.1111/ffe.12836.

Exemple d’approche temps–fréquence pour la fatigue non stationnaire. Même si l’outil est l’EMD et non l’ondelette, il confirme la tendance à localiser le contenu fréquentiel lorsque l’hypothèse de stationnarité devient insuffisante.

11. A comparative review of time- and frequency-domain methods for fatigue damage assessment. International Journal of Fatigue, 163 (2022), 107069. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2022.107069.

Revue transversale des chaînes de calcul fatigue : caractérisation matériau, historique de chargement, cycle counting et modèle de dommage. Elle situe notre proposition à l’interface temps, fréquence et variable d’état.

12. Kun, F.; Carmona, H. A.; Andrade, J. S.; Herrmann, H. J. (2008). Universality behind Basquin’s law of fatigue. Physical Review Letters, 100, 094301.

Relie loi de Basquin, hétérogénéité, avalanches et transition critique dans des modèles statistiques de rupture. Cette référence ouvre le pont vers une interprétation en systèmes complexes, sans rendre universels nos paramètres particuliers.

13. Cartiaux, F.-B.; Legoll, F.; Libal, A.; Reygner, J. (2024). Survival probability of structures under fatigue: a data-based approach. arXiv:2403.05397.

Illustration récente du passage d’une vie déterministe à une probabilité de survie. Elle rejoint directement l’intérêt de nos Monte Carlo et des courbes R(N).

14. ASTM International (2023). ASTM E1049-85(2023), Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis. DOI 10.1520/E1049-85R23.

Référence normative pour les méthodes de comptage de cycles, dont le rainflow. Elle justifie l’usage du comptage rainflow comme benchmark indépendant de la formulation temps–fréquence.

15. Downing, S. D.; Socie, D. F. (1982). Simple rainflow counting algorithms. International Journal of Fatigue, 4(1), 31–40. DOI 10.1016/0142-1123(82)90018-4.

Article classique proposant des algorithmes simples de comptage rainflow. Il constitue un lien historique direct entre les histoires irrégulières de chargement et leur réduction en cycles utilisables par Miner.

16. Abdullah, S.; Choi, J. C.; Giacomin, J.; Yates, J. R. (2006). Bump extraction algorithm for variable amplitude fatigue loading. International Journal of Fatigue, 28(7), 675–691. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2005.09.003.

Travail important sur la Wavelet Bump Extraction : les ondelettes servent à localiser les événements responsables de la majorité du dommage tout en préservant les séquences de cycles. Il montre que

l’usage des ondelettes en fatigue possède une base expérimentale et industrielle antérieure à notre formulation.

17. Van Fossen, T.; Rupp, C.; Hunt, T.; Schichtel, J.; Chattopadhyay, A.; Phan, N. (2023). The fatigue damage squeezing method: A signal compression strategy for accelerated life testing. International Journal of Fatigue, 171, 107565. DOI 10.1016/j.ijfatigue.2023.107565.

Méthode moderne fondée sur la transformée continue en ondelettes et un modèle de fatigue pour compresser des signaux d’essai. Les validations uniaxiales et biaxiales montrent que l’analyse temps–fréquence peut être reliée directement à un objectif de dommage et de durée de vie.

18. Lei, W.; Jiang, Y.; Zhang, J. (2025). Hybrid time–frequency method for vibration fatigue damage analysis under non-stationary non-Gaussian random excitation. Mechanical Systems and Signal Processing, 231, 112630. DOI 10.1016/j.ymssp.2025.112630.

Référence très proche de la tendance suivie ici : elle combine temps–fréquence, réponse amplitude–fréquence de la structure, non-stationnarité et non-gaussianité. Elle confirme que le dépassement de la PSD stationnaire constitue un axe actuel de recherche en fatigue vibratoire.

19. Tien, S.-C.; Wei, H.; Chen, J.; Liu, Y. (2022). Energy-based time derivative damage accumulation model under uniaxial and multiaxial random loadings. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 45, 159–173. DOI 10.1111/ffe.13591.

Propose un dommage continu en temps sous chargement aléatoire, sans comptage de cycles. Cette approche est conceptuellement proche de notre volonté de construire une variable locale de dommage intégrable dans le temps, même si la grandeur physique utilisée est différente.

20. Kamei, K.; Khan, M. A. (2021). Current challenges in modelling vibrational fatigue and fracture of structures: a review. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 43, 77. DOI 10.1007/s40430-020-02777-6.

Revue générale des difficultés actuelles de la fatigue vibratoire : diversité des excitations, identification du dommage, incertitudes et besoin de modèles capables de relier dynamique et durée de vie. Elle aide à situer le modèle pédagogique dans un paysage de méthodes complémentaires plutôt que concurrentes.

7.1. Tendances actuelles mises en évidence

- Passer du seul RMS/PSD à une caractérisation incluant bande passante, distributions de pics, kurtosis, skewness, facteur de crête et non-stationnarité.
- Développer des méthodes hybrides temps–fréquence pour les historiques non stationnaires et multiscalaire.
- Quantifier la dispersion et la probabilité de survie, et non plus seulement une durée de vie moyenne.
- Prendre en compte les effets de séquence et de mémoire matériau que Miner ignore par construction.
- Utiliser des modèles physiques simples comme biais inductifs, puis calibrer ou corriger leurs paramètres par les données.