Du jet turbulent à une équation effective de variable d'ordre

Mémoire, blanchiment dynamique, innovation multifractale et application exploratoire à la fatigue thermique

Étude numérique, pédagogique et méthodologique

Août 2026

Résumé

Cette étude construit un laboratoire numérique à partir d'un jet d'eau turbulent axisymétrique et cherche, non pas à résoudre directement les équations de Navier–Stokes, mais à comprendre ce que l'on peut retrouver de la physique à partir d'un signal local. Un capteur virtuel est placé à z/D = 10 et y/D = 1, au voisinage de la zone turbulente intermittente. Trois séries temporelles de fluctuations de vitesse sont générées : u′x(t), u′y(t) et u′z(t). La simulation combine un contenu spectral de type turbulent, des corrélations entre composantes, une interface turbulent/non turbulent mobile et une modulation multiplicative de l'intensité.

La démarche reprend l'esprit d'une étude antérieure du CAC 40 : observer d'abord la mémoire, tester la pertinence d'une représentation modale, identifier un noyau intégral, extraire une innovation quasi blanche, puis analyser ce qui reste. Dans le jet synthétique, la DMD en embedding de dimension trois fait apparaître quelques relaxations exponentielles. Un noyau construit sur une base de relaxations exponentielles reproduit les autocorrélations et conduit à une innovation η presque blanche en corrélation linéaire. Le carré η^2 reste cependant fortement corrélé : le blanchiment du premier ordre ne supprime pas l'intermittence d'amplitude.

Une MF-DFA et une calibration de Multifractal Random Walk montrent qu'une représentation multiplicative $\eta = \exp(\omega)\,\varepsilon$ est une réduction utile : ω porte la modulation multiscalaire, tandis que ε devient proche d'une innovation gaussienne. La méthode permet alors de proposer une forme effective de variable d'ordre, du type mémoire + innovation structurée. Enfin, une correspondance thermo-mécanique volontairement simple transforme les fluctuations de vitesse en fluctuations de température, puis en contrainte thermique d'une barre d'acier bloquée. Un Monte Carlo de 1000 réalisations, rainflow counting et cumul de Miner montrent que l'intermittence peut réduire très fortement la durée de vie par rapport à un sinus ou à un processus gaussien de référence.

Limite fondamentale — Le signal étudié est synthétique et statistiquement calibré ; il ne provient ni d'une DNS ni d'une LES. Les résultats sont donc une démonstration de méthode et de cohérence interne, non une validation quantitative d'un jet réel ni une qualification de fatigue d'un composant industriel.

Plan du document

- 1. Problème : remonter du signal à une dynamique effective
- 2. Construction d'un jet turbulent intermittent synthétique
- 3. Première lecture : mémoire, corrélations et espace de phase
- 4. DMD : quelques modes de relaxation exponentielle
- 5. Du spectre modal au noyau mémoire
- 6. Blanchiment dynamique : naissance de l'innovation η
- 7. L'innovation n'est pas un simple bruit : intermittence et multifractalité
- 8. Forme réduite : mémoire + cascade multiplicative + innovation rapide
- 9. Qu'avons-nous réellement retrouvé de la simulation ?
- 10. Application exploratoire à la fatigue thermique
- 11. Vers une classification générale des processus par (K, η)
- 12. Discussion, limites et prolongements
- 13. Bibliographie détaillée et commentée

1. Problème : remonter du signal à une dynamique effective

Un signal mesuré en un point est une trace extrêmement comprimée d'un système de grande dimension. Dans un jet turbulent, les structures tourbillonnaires, l'entraînement du fluide ambiant, la cascade d'énergie, l'interface turbulent/non turbulent et les fluctuations locales de dissipation sont ramenés à trois nombres qui évoluent dans le temps. Le pari méthodologique est que cette trace conserve assez d'information pour distinguer au moins deux niveaux : une dynamique qui reste prédictible à partir du passé et une innovation qui représente ce que cette mémoire n'explique plus.

$$dX/dt \;=\; F(X) \;-\; \int_0^t K(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau \;+\; \eta(t)$$

Cette écriture ne prétend pas être l'équation de Navier–Stokes réduite de manière exacte. Elle est une forme effective. Le terme F décrit une réponse locale éventuelle ; K est un noyau de mémoire ; η est la force résiduelle après projection sur les variables retenues. Cette structure est précisément celle qui apparaît dans les équations de Langevin généralisées issues de Mori–Zwanzig.

La logique de l'étude est alors celle d'un blanchiment dynamique : identifier d'abord ce que le passé permet d'expliquer, le retirer, puis demander quelle statistique porte le résidu. Le mot blanchiment est volontairement plus large que dans le filtrage linéaire classique. Il ne signifie pas seulement atténuer les basses fréquences ; il signifie retirer les dépendances temporelles prévisibles, qu'elles soient lentes, oscillantes ou distribuées.

Idée directrice — Un processus peut être décrit par deux signatures complémentaires : la forme de sa mémoire K et la nature de son innovation η. Deux systèmes peuvent partager le même type de mémoire et avoir des innovations très différentes, ou inversement.

2. Construction d'un jet turbulent intermittent synthétique

2.1. Configuration physique de référence

On considère un jet d'eau cylindrique de diamètre D = 20 mm débouchant à la vitesse V = 2 m/s dans une cuve. Avec une viscosité cinématique de l'eau $\nu \approx 10^{-6}$ m²/s, le nombre de Reynolds fondé sur le diamètre vaut environ 4×10^4. Le point de mesure virtuel est placé à z = 10D et y = D. Cette position n'est pas sur l'axe : elle se situe volontairement dans la région de cisaillement et de pénétration intermittente de l'interface externe du jet.

$$\mathrm{Re}_D \;=\; V\,D\,/\,\nu \;\approx\; 4 \;\times\; 10^4$$

La littérature expérimentale sur les jets ronds montre qu'un jet à grand Reynolds développe un profil moyen auto-similaire à distance suffisante, tout en conservant une interface turbulent/non turbulent fortement irrégulière. À la périphérie, un capteur fixe peut alterner entre des états de forte turbulence et des périodes où le fluide ambiant domine. C'est cette intermittence externe que l'on veut représenter, en plus de l'intermittence interne de la cascade.

2.2. Architecture du générateur

Le générateur n'intègre pas les équations de Navier–Stokes. Il assemble des briques statistiques choisies pour produire un signal physiquement plausible et dont les causes sont connues. Cette connaissance du générateur permettra plus tard de juger objectivement ce que l'analyse retrouve.

- Un fond turbulent coloré dont la densité spectrale présente une zone inertielle proche de $f^{-5/3}$, avec plage énergétique aux basses fréquences et coupure dissipative aux hautes fréquences.

- Trois composantes corrélées afin de représenter une anisotropie locale et une contrainte de Reynolds non nulle.
- Une interface turbulent/non turbulent mobile rI(t), transformée en fraction de présence turbulente I(t) comprise entre 0 et 1.
- Une enveloppe multiplicative lente exp(λ g(t) − λ²/2), qui module l'intensité des fluctuations à l'intérieur des périodes turbulentes.
- Un faible bruit ambiant lorsque le capteur se trouve à l'extérieur du jet.

$$I(t) = [1 + exp((y/D - r_I(t)/D)/\delta_I)]^{-1}$$

$$u'_i(t) = I(t)\, \sigma_i\, e\text{^}\{\omega(t)\}\, g_i(t) + [1 - I(t)]\, a_i(t)$$

Les séries sont échantillonnées à 1 kHz sur N = 8192 points, soit 8,192 s. Ce choix offre un compromis entre finesse temporelle et longueur suffisante pour estimer corrélations, DMD, fonctions de structure et comptage rainflow.

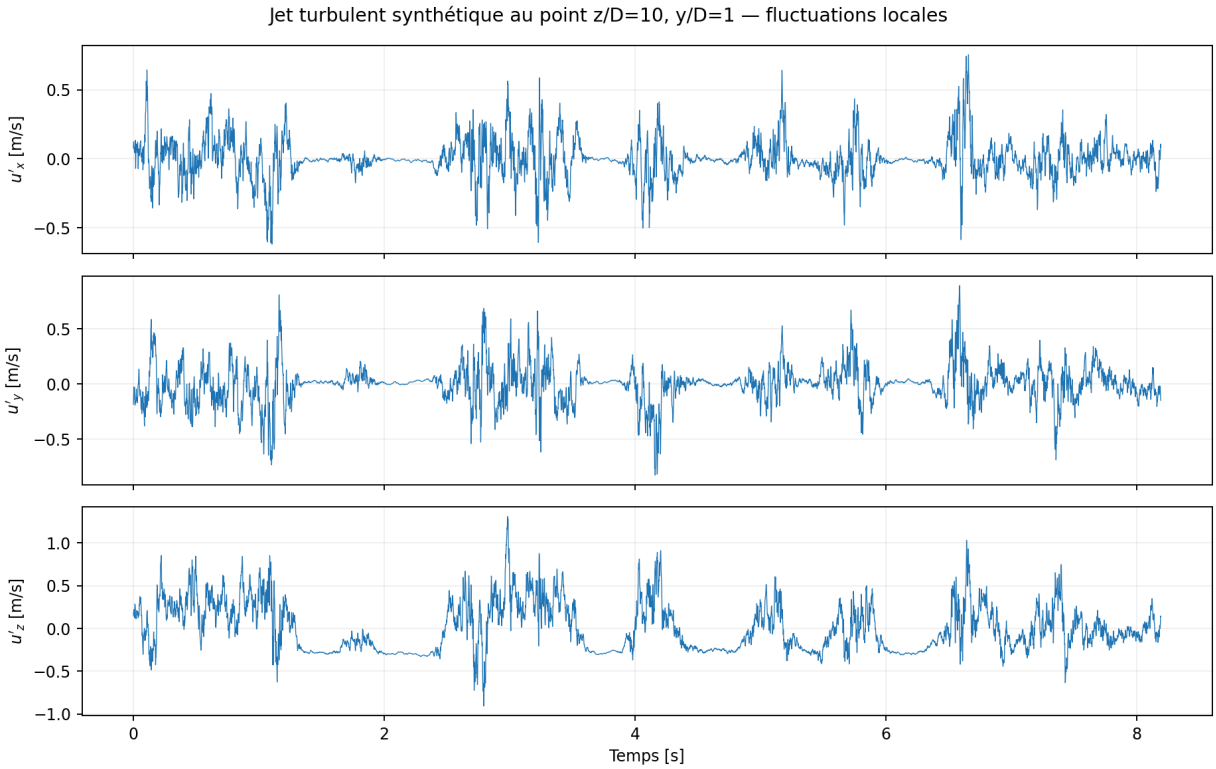


Figure 1 — Les trois fluctuations de vitesse de référence à z/D = 10 et y/D = 1. Les paquets d'activité sont communs aux composantes parce qu'ils sont modulés par la même interface et une enveloppe intermittente.

2.3. Ce qui est injecté dans la simulation

Ingrédient	Implémentation	Signature attendue
Mémoire rapide	Spectre coloré et temps caractéristiques de quelques dizaines de ms	Doit apparaître dans les ACF et la DMD
Anisotropie	σz > σy > σx	Doit apparaître dans l'énergie et la fatigue
Intermittence externe	I(t) mobile autour de y/D = 1	Doit créer des paquets calmes / actifs
Intermittence d'amplitude	enveloppe multiplicative lente	Doit survivre après blanchiment linéaire
Innovation élémentaire	processus gaussiens colorés avant modulation	Après retrait de l'enveloppe, un résidu proche du gaussien est plausible

3. Première lecture : mémoire, corrélations et espace de phase

3.1. Autocorrélations et temps caractéristiques

L'autocorrélation constitue la première mesure du caractère prédictible du signal. On retient trois repères : le premier passage sous 1/e, le premier zéro et le temps intégral de corrélation. Les composantes transverses se décorrelent rapidement, tandis que la composante axiale conserve une mémoire bien plus longue.

Composante	t_i/e	Premier zéro	Temps intégral
u′x	17 ms	47 ms	14,6 ms
u′y	21 ms	83 ms	19,6 ms
u′z	164 ms	372 ms	117 ms

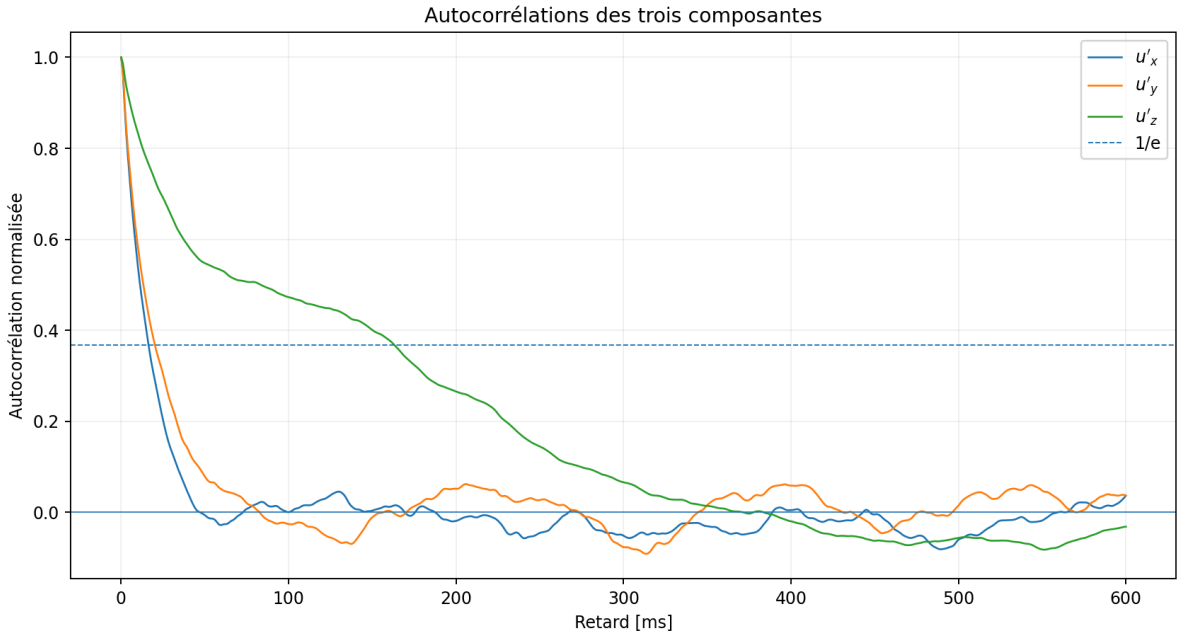


Figure 2 — Autocorrélations des trois composantes. La mémoire de u′z est nettement plus persistante que celle des deux composantes transverses.

Ce résultat est important pour la suite : l'anisotropie n'est pas seulement une différence de variance. Les composantes possèdent aussi des architectures temporelles différentes. La longue traîne de u′z laisse pressentir un mode lent ou une combinaison de modes plus persistants.

3.2. Retard d'embedding et reconstruction tridimensionnelle

Comme dans l'étude du CAC 40, le retard de reconstruction est choisi à partir du premier minimum de l'information mutuelle moyenne. On obtient 17 ms pour u′x, 32 ms pour u′y et 39 ms pour u′z. L'espace reconstruit en dimension trois est construit à partir du triplet [u′(t), u′(t+τ), u′(t+2τ)].

$$X_i(t) \;=\; [u'_i(t),\; u'_i(t \;+\; \tau_i),\; u'_i(t \;+\; 2\tau_i)]^{\mathrm{T}}$$

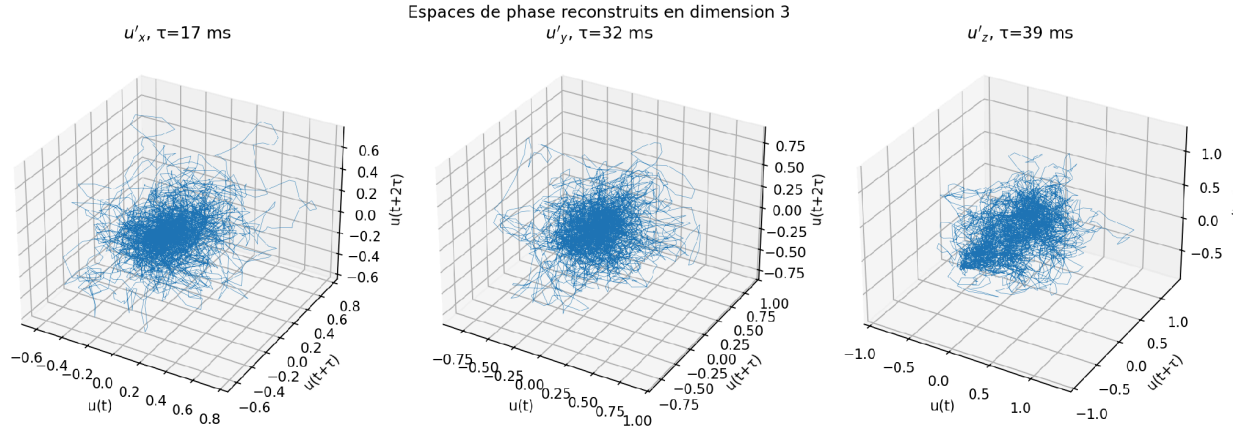


Figure 3 — Embeddings tridimensionnels. Les nuages ne constituent pas la preuve d'un attracteur déterministe ; ils donnent une géométrie de la dépendance temporelle et servent ici de support à la DMD.

4. DMD : quelques modes de relaxation exponentielle

4.1. Principe

La Dynamic Mode Decomposition cherche l'opérateur linéaire A qui relie au mieux deux ensembles de snapshots successifs, X′ ≈ AX. Ses valeurs propres traduisent des taux de croissance ou de décroissance et, lorsque les valeurs propres sont complexes, des fréquences. Dans notre cas scalaire, la DMD est appliquée à l'embedding tridimensionnel de chaque composante.

$$X' \approx A X, \quad A \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$$

$$x_n \approx \Sigma_k b_k \varphi_k \lambda_k^n$$

Une valeur propre proche du cercle unité correspond à un mode persistant. Une paire complexe conjuguée traduit une oscillation amortie. Un mode réel positif proche de 1 correspond essentiellement à une relaxation lente.

4.2. Résultats

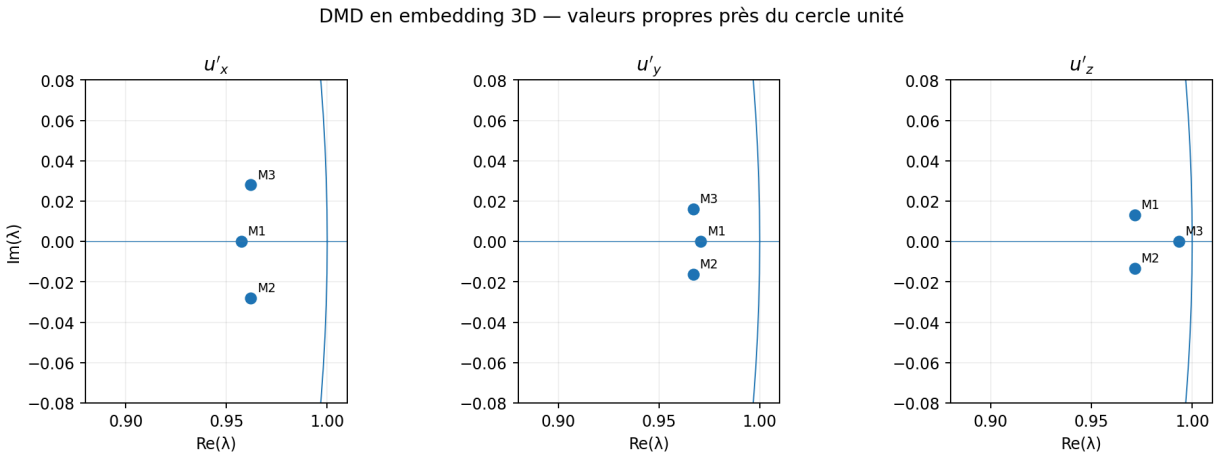


Figure 4 — Valeurs propres DMD dans le voisinage du cercle unité. Les trois embeddings produisent, par construction, trois valeurs propres.

Signal	Mode dominant	Modes secondaires	Persistance caractéristique
u′x	mode réel 67,4 %	paire complexe 16,3 % + 16,3 %	≈ 23–26 ms
u′y	mode réel 86,4 %	paire complexe 6,8 % + 6,8 %	≈ 30–34 ms
u′z	paire complexe 35,8 % + 35,8 %	mode réel 28,4 %	≈ 35 ms et mode lent ≈ 150 ms

Prudence méthodologique — L'embedding a une dimension 3 ; la DMD ne peut donc produire que trois valeurs propres. Le fait d'obtenir « peu de temps caractéristiques » ne démontre pas, à lui seul, qu'un jet réel n'aurait qu'un petit nombre de relaxations. Une Hankel-DMD de dimensions croissantes serait nécessaire pour tester la convergence du spectre modal.

La comparaison avec le CAC 40 est néanmoins suggestive. Dans le document antérieur, une DMD globale ou de Hankel ne suffisait pas à ramener la mémoire à un petit ensemble de relaxations stables ; la mémoire longue appelait plutôt un continuum de temps et un noyau quasi algébrique. Ici, la base exponentielle finie est beaucoup plus compatible avec la corrélation observée.

5. Du spectre modal au noyau mémoire

5.1. Équation de Langevin généralisée effective

La DMD fournit une intuition modale ; le noyau mémoire donne une écriture temporelle directement exploitable. Dans une linéarisation autour de la fluctuation locale, on considère :

$$du_i/dt \;=\; -\int_0^t K_i(\tau)\, u_i(t-\tau)\, d\tau \;+\; \eta_i(t)$$

Pour le jet synthétique, on choisit une base de noyaux exponentiels. Cette base est cohérente avec les modes DMD et avec l'idée d'un ensemble fini de relaxations effectives.

$$K_i(t) \;\approx\; \Sigma_\{k=1\}\^\{M\}\, c_\{ik\}\, exp(-\,t/\tau_\{ik\})$$

Numériquement, l'identification est réalisée par une régression régularisée sur des états mémoire exponentiels. Le noyau effectif n'est donc pas imposé par un unique temps ; il est une combinaison de temps répartis entre quelques millisecondes et quelques dixièmes de seconde.

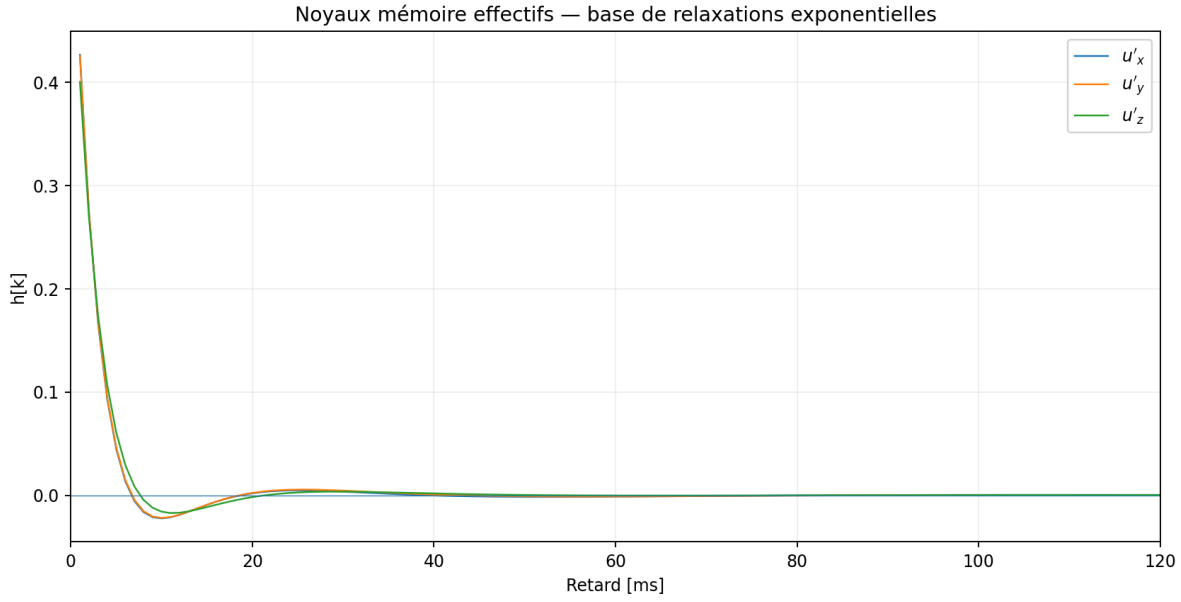


Figure 5 — Noyaux mémoire identifiés. L'essentiel du poids est concentré aux faibles retards ; de petites corrections changent de signe pour reproduire les oscillations de l'ACF.

5.2. Validation par reconstruction de l'autocorrélation

Un noyau ne doit pas être jugé seulement par sa forme. On le réinjecte dans le modèle et on compare l'autocorrélation reconstruite à l'autocorrélation observée. Les coefficients de détermination obtenus sont d'environ 0,986 pour u′x, 0,998 pour u′y et 0,960 pour u′z.

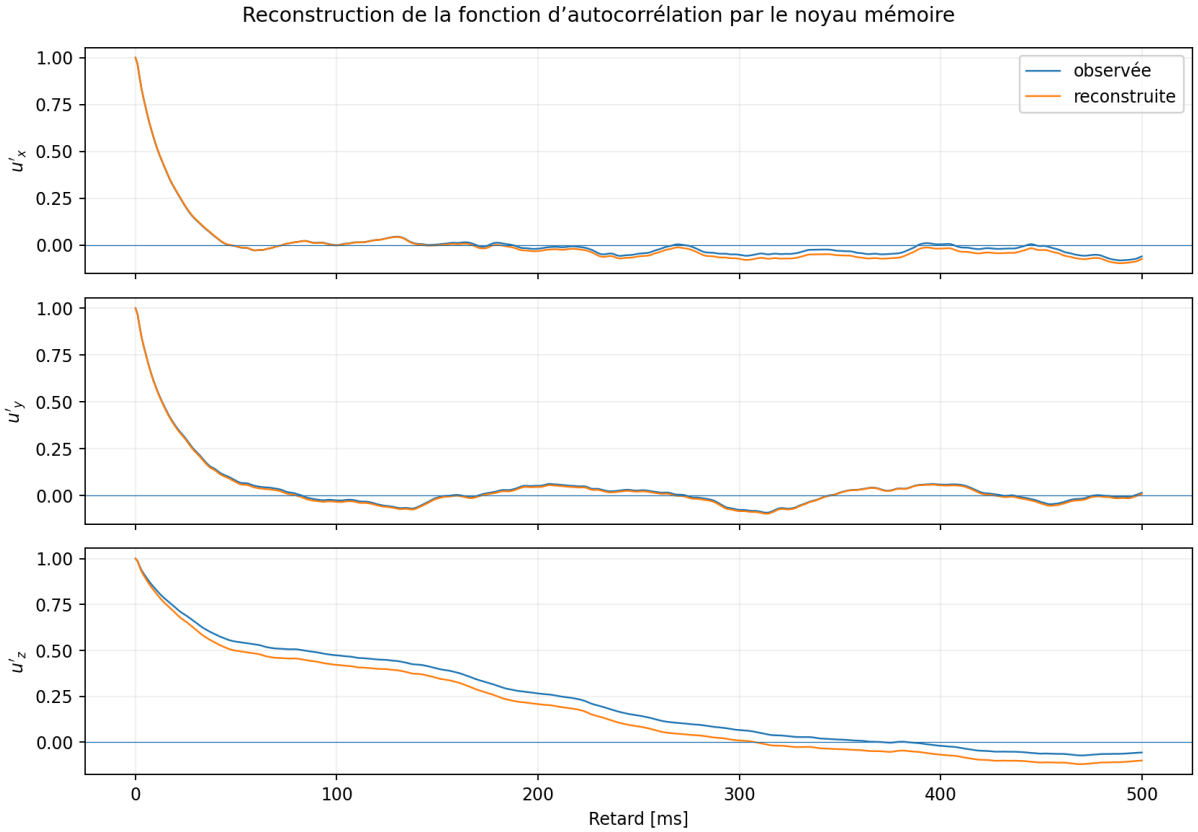


Figure 6 — ACF observées et reconstruites. Le noyau exponentiel distribué reproduit correctement la mémoire des trois composantes, avec un écart plus visible pour la longue traîne axiale.

6. Blanchiment dynamique : naissance de l'innovation η

6.1. Définition

On appelle innovation le signal qui reste après compensation de la partie mémorielle. En discret, le calcul est l'analogue d'un filtre blanchisseur : le prédicteur construit à partir du noyau est retranché au signal courant.

$$\eta_i[n] = u'_i[n] - \Sigma_{k \geq 1} h_i[k]\, u'_i[n-k]$$

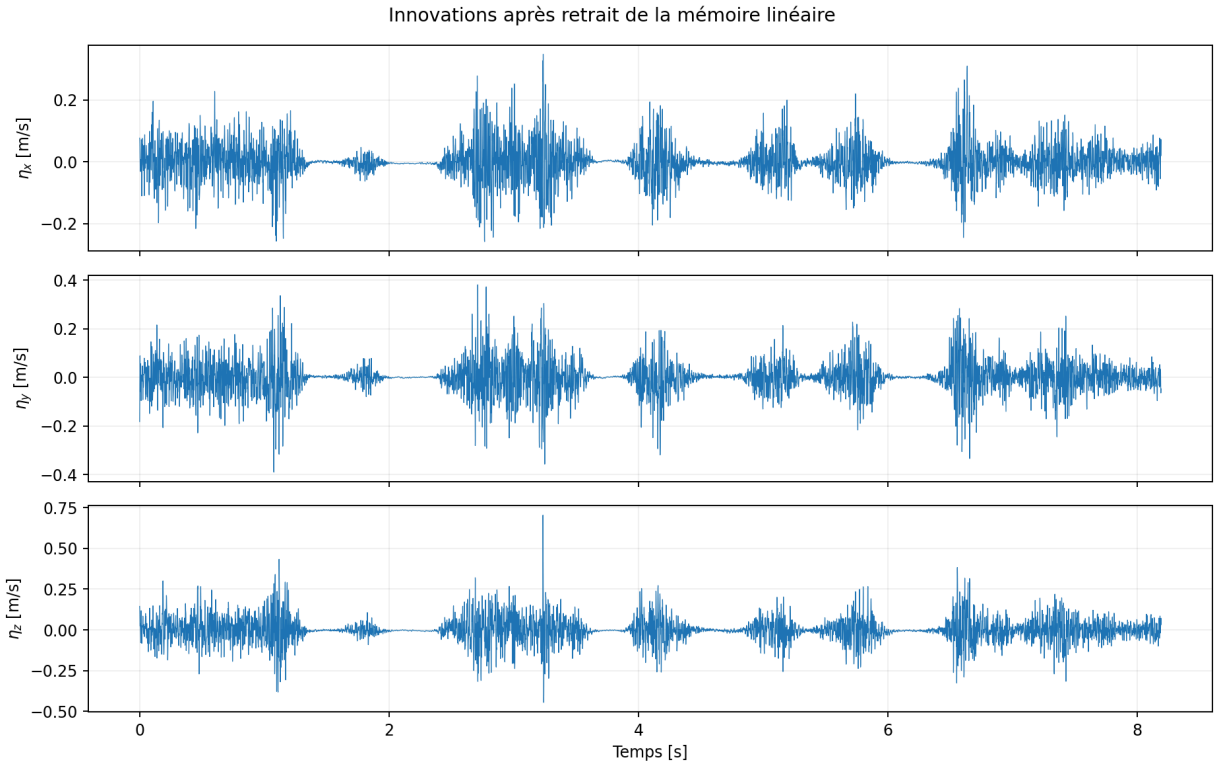


Figure 7 — Innovations ηx, ηy et ηz. La lente persistance du signal initial est supprimée, mais les paquets d'activité restent très visibles.

Le temps de corrélation au seuil 1/e tombe à environ 2 ms pour les trois composantes. Le filtrage a donc presque blanchi la dépendance linéaire. Mais un résidu blanc au second ordre n'est pas nécessairement un bruit sans structure.

6.2. Le carré révèle ce que l'ACF de η ne voit plus

L'autocorrélation de η oscille rapidement autour de zéro. En revanche, l'autocorrélation de η² reste positive sur des temps de l'ordre de quelques centaines de millisecondes. La mémoire n'a pas disparu : elle a changé de niveau statistique. Elle n'est plus principalement portée par le signe des fluctuations, mais par leur amplitude.

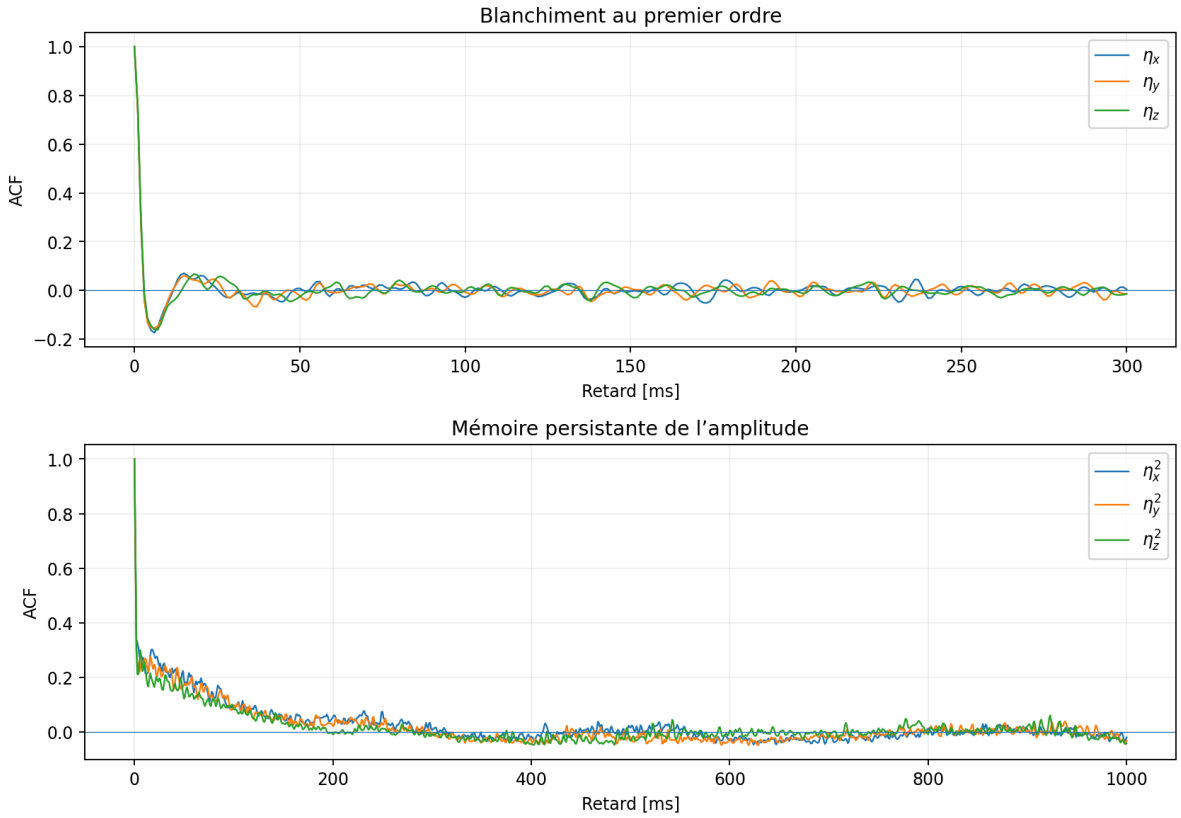


Figure 8 — En haut, blanchiment presque complet de η au premier ordre. En bas, persistance de la corrélation de η² : la volatilité ou intensité locale reste organisée.

Point clé — Le résidu n'est pas « du bruit » au sens d'un objet dépourvu de structure. Il peut être blanc pour l'autocorrélation et néanmoins fortement structuré pour |η|, η², les moments d'ordre élevé ou les statistiques multiscalaires.

6.3. Sens physique opérationnel du noyau mémoire et de l'innovation

Dans une turbulence réelle, le noyau mémoire K et l'innovation η ne doivent pas être regardés comme de simples objets mathématiques introduits pour améliorer un ajustement. Ils peuvent recevoir une interprétation physique opérationnelle, à condition de garder à l'esprit qu'il s'agit de grandeurs effectives : elles dépendent de la variable observée, du point de mesure, de la résolution temporelle et du niveau de réduction choisi. Un capteur placé dans un jet ne voit qu'une infime projection du champ tridimensionnel. Tout ce qui n'est pas explicitement observé - structures cohérentes, fluctuations de pression, interactions entre composantes, petites échelles et mouvements de l'interface turbulent/non turbulent - réapparaît alors, du point de vue de la variable mesurée, sous la forme d'une mémoire et d'un forçage résiduel.

Considérons une composante locale de vitesse u(t). Une équation réduite peut être écrite sous la forme d'une équation de Langevin généralisée. Le terme de convolution ne signifie pas seulement que les basses fréquences ont été filtrées : il exprime que l'état présent conserve une trace organisée de son histoire. Dans un jet, cette mémoire peut être portée par le temps d'advection des grandes structures, le temps de retournement des tourbillons, la relaxation du cisaillement, la persistance d'une structure cohérente ou encore le passage répété de l'interface turbulent/non turbulent devant le point de mesure.

$$du/dt = - \int_0^t K(\tau)\, u(t - \tau)\, d\tau + \eta(t)$$

Dans cette lecture, K(τ) est la mémoire dynamique effective de la variable observée. Lorsque K est bien décrit par une somme de quelques exponentielles, les constantes de temps associées peuvent être rapprochées de temps de relaxation ou de renouvellement dominants. Une composante possédant un mode très proche du cercle unité en DMD conserve ainsi plus longtemps la trace des structures qui l'ont engendrée. C'est ce que suggérait ici la composante axiale : sa mémoire plus longue peut être interprétée comme la persistance du transport et des structures alignées avec l'axe du jet. Le noyau n'est donc pas « le noyau de la turbulence » au sens universel ; il est le noyau de la dynamique réduite vue par ce capteur et pour cette variable.

$$K(t) \simeq \Sigma_j \, a_j \, exp(- \, t/\tau_j)$$

L'innovation η(t) a un statut complémentaire. Elle est ce qui subsiste lorsque la partie prédictible par la mémoire a été retirée. Elle ne doit donc pas être confondue avec un bruit instrumental. Dans une turbulence, elle peut condenser l'action des degrés de liberté non résolus : interactions non linéaires entre modes, transferts locaux d'énergie entre échelles, fluctuations de pression, petites structures advectées et événements de dissipation intense. Le blanchiment cherche à rendre cette innovation aussi peu corrélée que possible au premier ordre ; s'il réussit, cela signifie que le modèle a absorbé l'essentiel de la mémoire linéaire accessible. Mais un résidu blanc en autocorrélation peut encore être très organisé dans son amplitude.

C'est précisément ce que montre le présent exemple. Après retrait de K, η devient presque blanc, tandis que η² conserve des paquets d'énergie et une mémoire nettement plus longue. On peut alors affiner l'interprétation en séparant l'innovation en une amplitude lente ou multiscalaire et une excitation rapide.

$$\eta(t) = exp(\omega(t)) \, \varepsilon(t)$$

Dans cette écriture, exp(ω) peut être lu comme un niveau local d'activité turbulente : il mesure la capacité du système à amplifier ou atténuer les fluctuations rapides selon l'état de la cascade. Le terme ε représente au contraire l'innovation rapide après normalisation de cette activité. Dans notre simulation, ε devient proche d'une variable gaussienne, tandis que ω conserve l'organisation intermittente. Cette décomposition ne doit pas être imposée à tous les systèmes : selon le cas, le résidu pourrait être gaussien, à queues lourdes, à sauts, multifractal, dépendant de l'état ou même contenir une dynamique déterministe encore non résolue.

$$K : mémoire\ des\ structures\ résolues\ ; \quad \eta : action\ effective\ des\ degrés\ de\ liberté\ non\ résolus$$

Cette lecture fournit enfin un lien direct avec le formalisme de Mori-Zwanzig. Lorsqu'un système de grande dimension est projeté sur quelques variables pertinentes, les degrés de liberté éliminés ne disparaissent pas : ils reviennent sous forme d'un terme de mémoire et d'une force fluctuante. Notre identification à partir des données peut donc être vue comme une version opérationnelle de cette idée. Le noyau K répond à la question « combien de temps et de quelle manière le passé continue-t-il d'agir ? » ; l'innovation η répond à la question « que reste-t-il de l'action du système non observé une fois cette mémoire retirée ? ». La paire (K, η) acquiert ainsi un sens physique autant que statistique et prépare naturellement la classification générale des processus développée plus loin dans le document.

7. L'innovation n'est pas un simple bruit : intermittence et multifractalité

7.1. Hypothèse multiplicative

Les bouffées visibles dans η suggèrent de factoriser l'innovation en une amplitude lente et une excitation rapide :

$$\eta_i(t) = exp(\omega_i(t)) \, \varepsilon_i(t)$$

Le champ ω joue le rôle de log-amplitude ou de log-volatilité. Si ses corrélations sont longues et si les fonctions de structure présentent des exposants dépendant de l'ordre q, une description de type cascade multifractale devient naturelle. Cette étape est volontairement conditionnelle : la multifractalité est un modèle possible de η, et non une conséquence universelle du blanchiment.

7.2. MF-DFA : petites et grandes fluctuations n'obéissent pas au même exposant

La MF-DFA est utilisée sur les innovations. Les exposants généralisés h(q) décroissent nettement lorsque q augmente. Les valeurs négatives de q privilégient les petites fluctuations ; les valeurs positives privilégient les grandes. Cette dépendance indique qu'un exposant de Hurst unique ne suffit pas.

Innovation	h(−4)	h(0)	h(4)	Largeur Δα
ηx	1,184	0,584	0,370	1,204
ηy	1,060	0,619	0,413	0,809
ηz	1,115	0,576	0,356	1,063

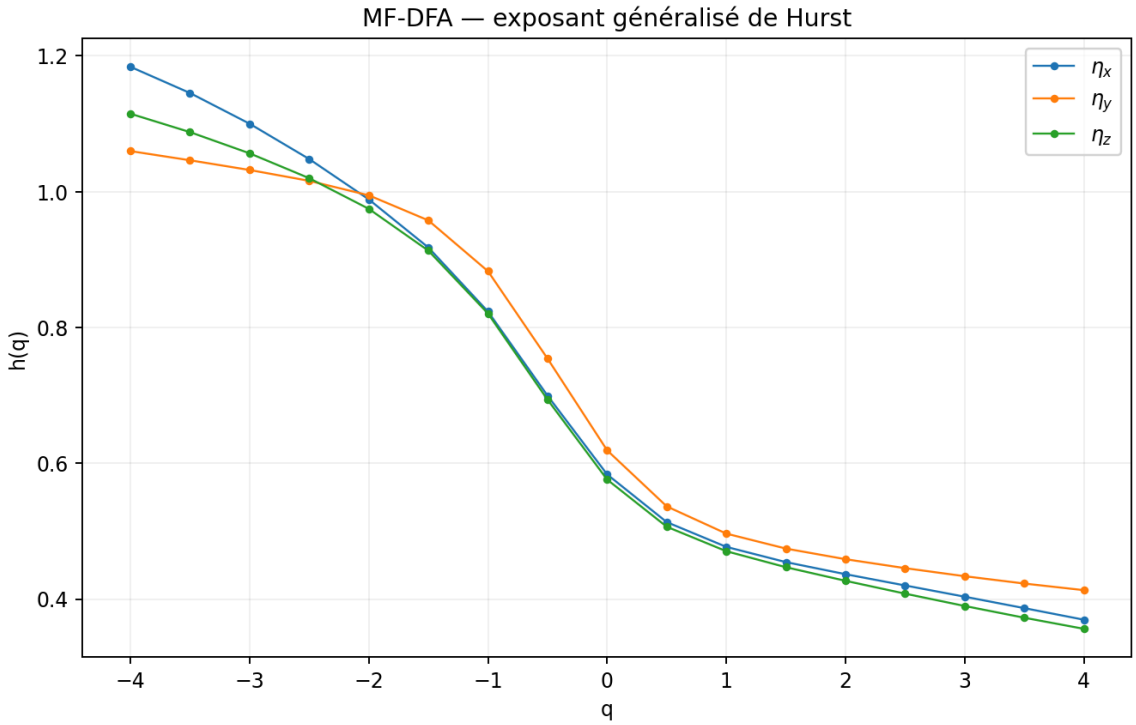


Figure 9 — MF-DFA : variation de h(q). Les trois innovations présentent une dépendance marquée à q.

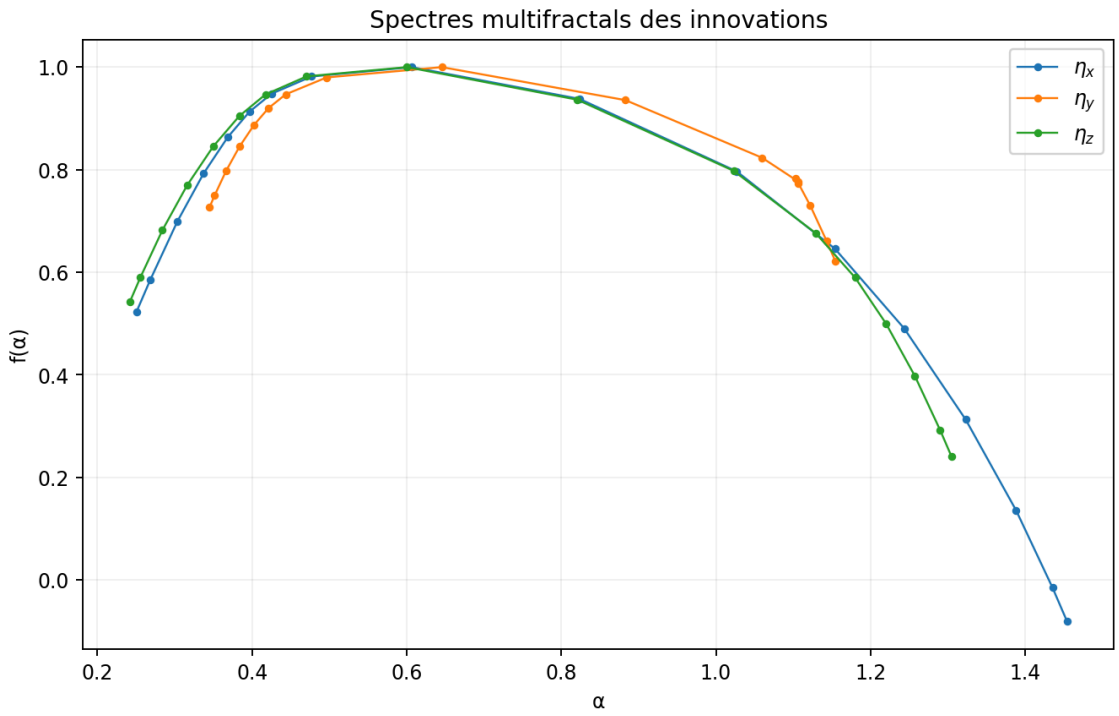


Figure 10 — Spectres f(α) correspondants. Leur largeur traduit une hiérarchie de singularités ou, plus prudemment, une forte hétérogénéité multiscalaire de l'amplitude.

Interprétation prudente — Une largeur multifractale sur un signal synthétique peut provenir à la fois de vraies corrélations multiscalaires et d'une distribution marginale large ou d'un mélange de régimes. Des tests par séries mélangées ou surrogates sont nécessaires pour séparer ces contributions, comme le recommande la littérature MF-DFA.

7.3. Calibration d'un Multifractal Random Walk

Pour donner une forme compacte à la cascade, on ajuste une loi de structure lognormale de type MRW. On utilise une écriture généralisée :

$$\zeta(q) = q\,H - (\lambda^2/2)\,q(q-2)$$

Innovation	H	λ² (structures)	T (cov. ω)	R² ζ(q)
ηx	0,473	0,067	0,576 s	0,9990
ηy	0,447	0,029	0,605 s	0,9997
ηz	0,441	0,075	0,574 s	0,9986

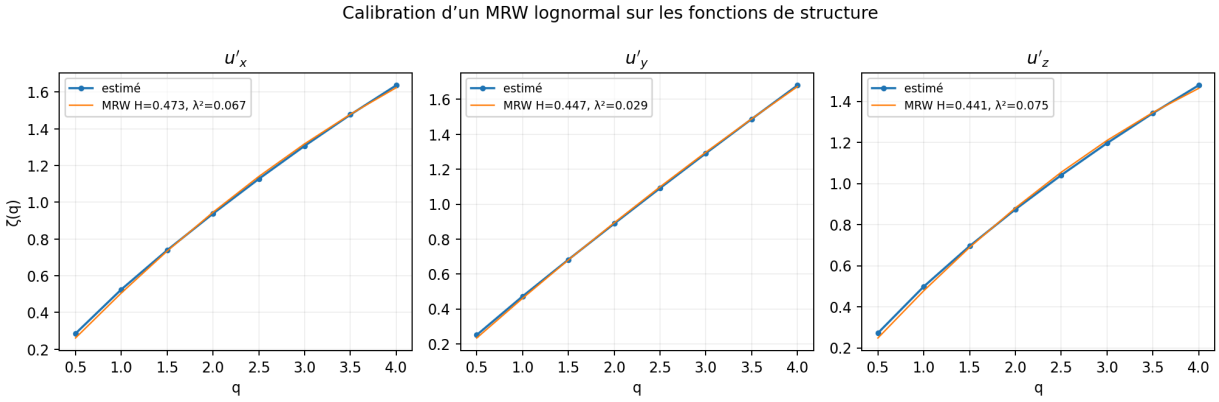


Figure 11 — Calibration MRW par les fonctions de structure. La forme quadratique de ζ(q) reproduit très bien les exposants estimés sur la plage retenue.

L'échelle intégrale de la modulation d'amplitude est remarquablement proche pour les trois composantes, autour de 0,6 s. En revanche, l'estimation de λ² obtenue directement par la covariance de ω est beaucoup plus grande que celle issue des fonctions de structure. Cette discordance rappelle que notre ω est un proxy construit par RMS locale et que le MRW lognormal n'est qu'une réduction de l'intermittence synthétique, pas le modèle exact utilisé pour générer le signal.

Après division par exp(ω), les innovations standardisées ε ont une kurtosis de l'ordre de 2,56 à 2,61 et les ajustements de Student tendent vers des degrés de liberté très grands. Dans ce jeu synthétique, une excitation gaussienne rapide est donc suffisante au premier ordre.

$$\varepsilon_i(t) \approx N(0,1)$$

8. Forme réduite : mémoire + cascade multiplicative + innovation rapide

Les deux étapes de réduction se recombinent dans une équation compacte. La première sépare la mémoire linéaire ; la seconde factorise l'intermittence de l'innovation.

$$du_i(t) = -[K_i * u_i](t)\,dt + \sigma_i\, exp(\omega_i(t))\, dW_i(t)$$

En discret, forme plus proche des calculs réalisés :

$$\Delta u_i[n] = -(K_i * u_i)[n] + exp(\omega_i[n])\, \varepsilon_i[n]$$

Cette équation doit être lue comme une équation de variable d'ordre. Elle ne remplace pas les équations du fluide. Elle résume, pour une observable locale, ce qui se laisse décomposer en mémoire et en innovation. Le noyau K décrit la dynamique prévisible du passé ; ω décrit la susceptibilité multiscalaire de l'amplitude ; ε représente l'excitation rapide après conditionnement.

Analogie avec le blanchiment — Dans un filtre blanchisseur linéaire, on cherche à transformer une série corrélée en innovation blanche. Ici, le même principe est étendu à un problème où le résidu blanc au second ordre conserve une organisation non linéaire d'amplitude. Le blanchiment devient donc une étape, pas la fin de l'analyse.

9. Qu'avons-nous réellement retrouvé de ce qui était entré dans la simulation ?

Le caractère synthétique du laboratoire numérique offre un avantage méthodologique : on connaît la réponse. On peut donc distinguer les véritables succès de l'identification des artefacts introduits par nos choix de représentation.

Élément injecté / question	Ce que l'analyse trouve	Conclusion
Contenu spectral turbulent coloré	ACF courtes pour x,y ; mémoire plus longue pour z ; DMD proche du cercle unité	Oui, qualitativement
Anisotropie σz > σy > σx	énergies, RMS et dommages ordonnés z > y > x	Oui
Interface intermittente I(t)	paquets communs aux trois η et fortes corrélations de η²	Oui
Enveloppe multiplicative exp(ω)	mémoire d'amplitude et facteur exp(ω)ε	Oui, mais ω est estimé indirectement
Innovation élémentaire gaussienne	ε final proche de N(0,1)	Oui
MRW lognormal exact	bonne calibration MRW mais λ² dépend fortement de la méthode	Non : il n'avait pas été imposé exactement
Petit nombre physique de modes	3 valeurs propres DMD	Non démontré : dimension d'embedding = 3

Le résultat le plus important n'est donc pas que chaque paramètre soit récupéré avec exactitude. C'est que la chaîne d'analyse retrouve correctement l'architecture génératrice : une partie mémorielle, une modulation intermittente et une innovation rapide. Là où elle semble retrouver davantage que ce qui a été injecté — par exemple une belle loi MRW — il faut rester prudent : un modèle réduit peut très bien résumer plusieurs mécanismes différents par une même forme statistique.

10. Application exploratoire à la fatigue thermique

10.1. Pourquoi faire le pont entre vitesse et température ?

Dans de nombreux systèmes thermiques, une fluctuation de vitesse turbulente agit sur le transport convectif et peut se traduire, après passage par les dynamiques thermique et structurale, par une fluctuation de température puis de contrainte. L'étude n'a pas construit ce transfert thermo-fluidique complet. Elle adopte volontairement un coefficient de similitude afin d'étudier uniquement l'effet de la structure temporelle du chargement sur la fatigue.

$$\Delta T_i(t) \;=\; C_T\, u'_i(t)$$

La structure de référence est une barre d'acier élastique parfaitement bloquée axialement. Dans cette configuration idéale, une variation uniforme de température engendre une contrainte :

$$\sigma_i(t) \;=\; E\,\alpha\,\Delta T_i(t)$$

On retient E = 210 GPa, α = 12×10⁻⁶ K⁻¹ et C_T = 50 K/(m/s), soit environ 126 MPa par m/s de fluctuation. Ce coefficient est arbitraire et sert seulement à placer le chargement dans une gamme où le dommage est mesurable. Il peut être recalibré ultérieurement sur un vrai transfert thermique.

10.2. Rainflow, Basquin et Miner

La série de contrainte n'est pas convertie en un simple RMS. Elle est décomposée en cycles par comptage rainflow, méthode conçue pour transformer une histoire irrégulière en cycles équivalents d'amplitude et de valeur moyenne. Pour chaque amplitude σa, une loi de Basquin générique donne le nombre de cycles à rupture.

$$N_f(\sigma_a) = N_{ref}\,(\sigma_{ref}/\sigma_a)^m$$

Dans l'étude, Nref = 10^6, σref = 200 MPa et m = 5. Le dommage cumulé suit la règle linéaire de Miner :

$$D = \Sigma_j\, n_j / N_{f,j}\,; \quad \text{rupture idéale lorsque } D \approx 1$$

Avertissement ingénierie — La loi S–N choisie est générique ; l'effet de contrainte moyenne, plasticité cyclique, oxydation, fluage, gradients thermiques, concentrations de contrainte et dispersion matériau n'est pas modélisé. Les durées de vie sont des indicateurs comparatifs, pas des prédictions de certification.

10.3. Monte Carlo 1000 runs

Les phases, graines aléatoires, paramètres de l'interface, niveaux de turbulence et paramètres de l'enveloppe sont perturbés d'une réalisation à l'autre. Chaque record dure 8,192 s. Le rainflow et Miner sont recalculés pour chaque composante et chaque run.

Composante	Dommage moyen / record	CV dommage	σ RMS moyenne
u′x	$6{,}54\times10^{-8}$	0,76	≈ 17,3 MPa
u′y	$1{,}58\times10^{-7}$	0,75	≈ 20,7 MPa
u′z	$4{,}85\times10^{-7}$	0,79	≈ 25,8 MPa

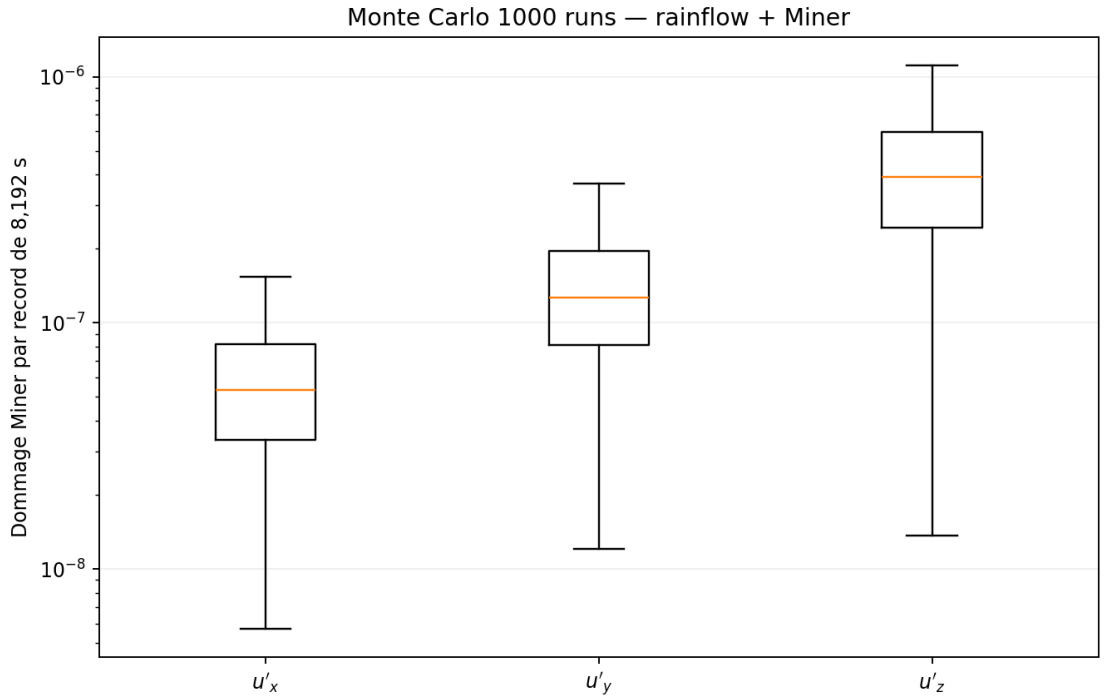


Figure 12 — Dispersion du dommage Miner sur 1000 réalisations. La composante axiale u′z est la plus sévère, à la fois par son énergie et par ses événements rares.

10.4. Coût mécanique de l'intermittence

Pour isoler l'effet de la forme temporelle, les durées de vie sont comparées à deux références : un sinus de même RMS et avec un nombre effectif de cycles comparable, puis un surrogate gaussien construit par randomisation de phase avec le même RMS et le même spectre de puissance que u′x. La randomisation

de phase détruit une grande partie de l'organisation intermittente tout en conservant l'information de second ordre.

Chargement	Médiane	P05	P95
u'z turbulent	5 804 h	1 869 h	18 292 h
u'y turbulent	17 986 h	6 150 h	50 918 h
u'x turbulent	42 608 h	13 850 h	145 745 h
Sinusoïdal	88 299 h	30 535 h	258 300 h
Gaussien même PSD	170 393 h	59 055 h	517 775 h

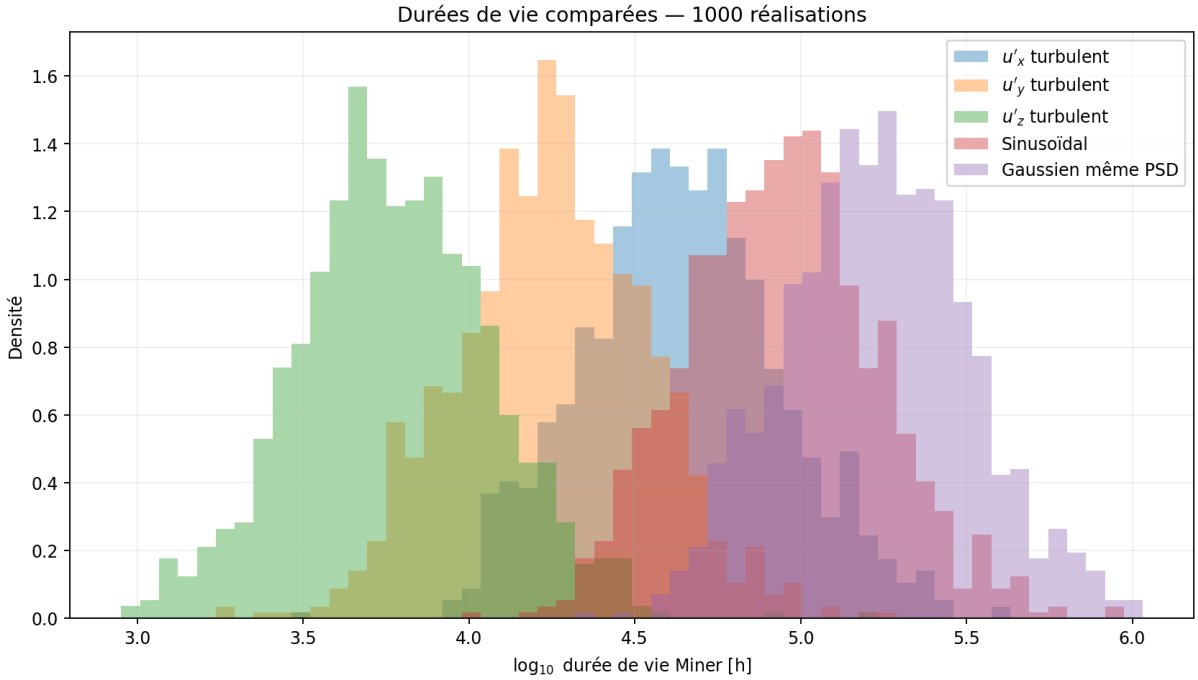


Figure 13 — Histogrammes superposés des durées de vie. À calibration identique, les signaux turbulents intermittents se déplacent vers les faibles durées de vie ; u'z est le cas le plus sévère.

Avec une pente de Basquin m = 5, le dommage augmente comme une puissance élevée de l'amplitude. Des excursions rares comptent donc beaucoup plus qu'une fluctuation ordinaire. C'est pourquoi deux signaux de même RMS peuvent produire des dommages très différents. Le résultat pédagogique central est que le RMS n'est pas une statistique suffisante pour caractériser un chargement de fatigue intermittent.

$$D(C_T) \approx D(C_\{T0\}) \, (C_T/C_\{T0\})\hat{}m$$

Cette loi de rescaling constitue un pont pratique : si un futur modèle thermo-fluidique fournit un coefficient de transfert différent, on peut estimer rapidement l'ordre de grandeur du changement de dommage, tant que la loi de Basquin et le régime élastique restent pertinents.

11. Vers une classification générale des processus par (K, η)

La discussion conduit à une proposition de classification à deux axes. Le premier axe est la forme de la mémoire K : mémoire markovienne courte, somme d'exponentielles, relaxation oscillante, retard discret, continuum de relaxations ou loi algébrique. Le second axe est la nature de l'innovation η après blanchiment : gaussienne, hétéroscédastique, multifractale, Lévy, processus à sauts, multimodale ou encore résidu déterministe/chaotique.

$$Processus \simeq signature\,(K,\ \eta)$$

Exemple	Mémoire K	Innovation η	Lecture
OU	exponentielle unique	gaussienne blanche	processus markovien simple
Jet synthétique étudié	somme de relaxations exponentielles	exp(ω) ε, cascade effective ; ε quasi gaussien	turbulence intermittente
CAC 40 étudié précédemment	mémoire longue distribuée, quasi algébrique	multifractale, innovation à queues lourdes dans le modèle exploratoire	système collectif à horizons multiples
Processus à chocs	courte ou variable	Poisson composé / sauts	événements discrets rares
Système avec états cachés	dépendante du régime	mélange multimodal	commutations de régime

La classification n'impose pas que η soit multifractale. La multifractalité est seulement une branche de l'arbre de diagnostic. Après blanchiment, on peut tester la Gaussianité, l'indépendance, l'hétéroscédasticité, les queues lourdes, les sauts, la dépendance à l'état, la multifractalité ou une structure déterministe résiduelle. La nature du bruit devient alors un objet de physique du processus, et non un terme de rebut.

12. Discussion, limites et prolongements

12.1. Ce que la méthode apporte

La méthode fournit une progression disciplinée entre observation et modèle. Elle évite de choisir immédiatement une équation sophistiquée. On commence par mesurer la mémoire ; on teste si quelques modes exponentiels suffisent ; on construit un noyau ; on demande ensuite si l'innovation est réellement blanche ; enfin on analyse sa statistique. Chaque échec local fournit une information sur la forme de modèle suivante.

- Si la DMD converge vers quelques modes : mémoire à temps caractéristiques discrets plausible.
- Si la DMD exige de plus en plus de modes et que l'ACF suit une loi de puissance : noyau distribué ou mémoire longue à considérer.
- Si η est blanche et gaussienne : réduction stochastique simple possible.
- Si η est blanche mais η^2 reste corrélée : chercher une modulation multiplicative ou hétéroscédastique.
- Si les fonctions de structure dépendent fortement de q : examiner une cascade multifractale, avec tests de surrogates.
- Si des queues lourdes persistent après standardisation : Student, stable de Lévy, sauts ou mélange de régimes deviennent pertinents.

12.2. Limites propres à l'étude

La première limite est la simulation elle-même : nous avons construit l'intermittence externe et une enveloppe multiplicative. Il n'est donc pas surprenant que l'analyse les retrouve. Le test décisif serait d'appliquer la chaîne complète à un enregistrement expérimental trois composantes dans un jet turbulent réel.

La deuxième limite tient à la DMD de dimension trois. Pour distinguer un petit nombre réel de temps de relaxation d'un continuum approximé, il faudrait une étude de convergence en dimension d'embedding et en longueur de fenêtre, idéalement avec Hankel-DMD ou multiresolution DMD.

La troisième limite est le modèle multifractal. Une MF-DFA positive n'implique pas automatiquement une cascade multiplicative physique. Il faut comparer les séries originales à des séries mélangées, à des surrogates préservant le spectre et à des modèles à changement de régime. La discordance entre λ^2 obtenu par fonctions de structure et par covariance de ω signale précisément cette prudence.

La quatrième limite concerne la fatigue : le pont $\Delta T = C_T u'$ est un coefficient de similitude. Un vrai problème thermo-mécanique exige la réponse convective, la diffusion thermique dans la paroi, les

gradients spatiaux, la fonction de transfert structurelle et un modèle de fatigue adapté au matériau, à la température et au niveau de plasticité.

12.3. Programme de validation

1. Remplacer le signal synthétique par un record expérimental 3C d'un jet à Reynolds élevé dans une zone d'intermittence.

2. Répéter DMD/Hankel-DMD en dimensions 3, 6, 10, 20, 50 et tester la stabilité des temps modaux.

3. Identifier le noyau K par plusieurs méthodes indépendantes : Prony régularisé, GLE data-driven, régression de Volterra.

4. Tester les innovations avec surrogates de phase, séries mélangées, PDF conditionnelles et MF-DFA robuste.

5. Construire un modèle thermo-fluidique simple de paroi pour remplacer le coefficient C_T par une fonction de transfert dépendant de la fréquence.

6. Refaire la fatigue avec une loi matériau réelle, effet de contrainte moyenne et, si nécessaire, Coffin–Manson / thermo-mechanical fatigue.

13. Bibliographie détaillée et commentée

La bibliographie est organisée par fonction méthodologique. Les références classiques établissent les briques de la démarche ; les travaux récents montrent que l'identification data-driven des noyaux mémoire est aujourd'hui un sujet actif.

Turbulence, jets et intermittence

Kolmogorov, A. N. (1941). "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers." Doklady Akademii Nauk SSSR, 30, 299–301. Texte fondateur de la théorie K41 : transfert d'énergie entre échelles et universalité locale. Il justifie la présence d'une zone inertielle de type −5/3 dans le générateur, tout en sachant que l'intermittence exige des raffinements.

Kolmogorov, A. N. (1962). "A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number." Journal of Fluid Mechanics, 13(1), 82–85. DOI 10.1017/S0022112062000518. Le raffinement K62 introduit le rôle des fluctuations de dissipation et ouvre directement la porte aux descriptions intermittentes et multiscalaires.

Frisch, U. (1995). Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press. Référence de synthèse sur cascade, lois d'échelle, intermittence et multifractalité. Utile pour replacer la modélisation statistique dans la physique de la turbulence développée.

Pope, S. B. (2000). Turbulent Flows. Cambridge University Press. Ouvrage général de référence : jets, statistiques, corrélations, spectres, transport turbulent et modèles. Il fournit le contexte physique nécessaire pour ne pas confondre un générateur stochastique avec une simulation des équations du fluide.

Hussein, H. J., Capp, S. P. & George, W. K. (1994). "Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet." Journal of Fluid Mechanics, 258, 31–75. Référence expérimentale majeure pour les profils et moments d'un jet rond à $Re \approx 10^5$. Elle fournit un point de comparaison réaliste pour les niveaux de turbulence et l'auto-similarité des jets développés.

Sreenivasan, K. R. & Antonia, R. A. (1997). "The phenomenology of small-scale turbulence." Annual Review of Fluid Mechanics, 29, 435–472. DOI 10.1146/annurev.fluid.29.1.435. Revue classique sur intermittence de petite échelle, exposants anormaux et structures locales. Elle justifie l'analyse des moments élevés et des statistiques au-delà de l'ACF.

Warhaft, Z. (2000). "Passive Scalars in Turbulent Flows." Annual Review of Fluid Mechanics, 32, 203–240. DOI 10.1146/annurev.fluid.32.1.203. Particulièrement pertinente pour le pont vers les fluctuations thermiques : un champ

de température advecté et diffusé par la turbulence peut présenter une intermittence propre et des statistiques multiscalaires.

da Silva, C. B., Hunt, J. C. R., Eames, I. & Westerweel, J. (2014). "Interfacial Layers Between Regions of Different Turbulence Intensity." Annual Review of Fluid Mechanics, 46, 567–590. DOI 10.1146/annurev-fluid-010313-141357. Référence centrale pour l'interface turbulent/non turbulent aux bords des jets, sillages et couches de mélange. Elle donne la base physique de l'intermittence externe simulée via I(t).

Meneveau, C. & Sreenivasan, K. R. (1991). "The multifractal nature of turbulent energy dissipation." Journal of Fluid Mechanics, 224, 429–484. DOI 10.1017/S0022112091001830. Montre expérimentalement le caractère multifractal de la dissipation turbulente et relie processus multiplicatifs et spectres f(α). C'est la référence la plus directement reliée à notre lecture de η^2 et à la cascade d'amplitude.

DMD et réduction modale

Schmid, P. J. (2010). "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data." Journal of Fluid Mechanics, 656, 5–28. Article fondateur moderne de la DMD en mécanique des fluides. Il motive l'extraction de structures dynamiques et de taux de croissance/décroissance directement à partir de séquences de données.

Tu, J. H., Rowley, C. W., Luchtenburg, D. M., Brunton, S. L. & Kutz, J. N. (2014). "On dynamic mode decomposition: Theory and applications." Journal of Computational Dynamics, 1(2), 391–421. DOI 10.3934/jcd.2014.1.391. Clarifie la DMD comme approximation d'un opérateur linéaire et ses liens avec Koopman, ERA et l'identification de systèmes. Utile pour comprendre ce que signifient — et ce que ne signifient pas — les valeurs propres obtenues.

Kutz, J. N., Brunton, S. L., Brunton, B. W. & Proctor, J. L. (2016). Dynamic Mode Decomposition: Data-Driven Modeling of Complex Systems. SIAM. Monographie pratique et théorique. Les extensions Hankel, multirésolution et robustes au bruit sont les prolongements naturels pour tester la stabilité du petit nombre de modes observé ici.

Mémoire, blanchiment et équations de Langevin généralisées

Mori, H. (1965). "Transport, Collective Motion, and Brownian Motion." Progress of Theoretical Physics, 33(3), 423–455. DOI 10.1143/PTP.33.423. Texte fondateur de la projection vers une équation de Langevin généralisée. Les degrés de liberté éliminés réapparaissent sous forme de mémoire et de force fluctuante : c'est l'architecture conceptuelle K + η.

Zwanzig, R. (2001). Nonequilibrium Statistical Mechanics. Oxford University Press. Présentation de référence du formalisme de projection et de la dynamique non markovienne. Elle situe le noyau mémoire comme conséquence naturelle d'une réduction de dimension.

Lei, H., Baker, N. A. & Li, X. (2016). "Data-driven Parameterization of the Generalized Langevin Equation." Proceedings of the National Academy of Sciences, 113(50), 14183–14188. DOI 10.1073/pnas.1609587113. Travail directement proche de notre démarche : identification du noyau mémoire et du bruit à partir de statistiques de trajectoire, avec approximation rationnelle et représentation étendue markovienne.

Ge, P., Zhang, Z. & Lei, H. (2024). "Data-Driven Learning of the Generalized Langevin Equation with State-Dependent Memory." Physical Review Letters, 133, 077301. DOI 10.1103/PhysRevLett.133.077301. Extension récente où la mémoire dépend de l'état. Elle rappelle que l'hypothèse d'un noyau homogène K(t) peut être trop simple dans un système fortement non linéaire ou hétérogène.

Lang, Q. & Lu, J. (2026). "Learning Memory Kernels in Generalized Langevin Equations." SIAM Journal on Mathematics of Data Science. DOI 10.1137/24M1651101. Méthode récente combinant Prony régularisé pour les corrélations et régression avec régularisation RKHS. Très pertinente pour formaliser l'étape où nous avons identifié K à partir de l'ACF.

Multifractalité et innovations

Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A. & Stanley, H. E. (2002). "Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series." Physica A, 316, 87–114. DOI 10.1016/S0378-4371(02)01383-3. Référence méthodologique de la MF-DFA. Elle insiste sur les séries mélangées et les tests permettant de distinguer multifractalité due aux corrélations et due à la distribution marginale.

Bacry, E., Delour, J. & Muzy, J.-F. (2001). "Multifractal random walk." Physical Review E, 64, 026103. DOI 10.1103/PhysRevE.64.026103. Introduit le MRW continu à accroissements stationnaires. C'est la base de l'écriture η = exp(ω) ε et de la covariance logarithmique de la log-volatilité.

Muzy, J.-F. & Bacry, E. (2002). "Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws." Physical Review E, 66, 056121. DOI 10.1103/PhysRevE.66.056121. Généralise le MRW lognormal à une classe log-infiniment divisible. Référence utile si l'innovation finale s'écarte de la Gaussianité ou si la cascade exige une loi plus générale.

Fatigue, rainflow et thermo-mécanique

Basquin, O. H. (1910). "The Exponential Law of Endurance Tests." Proceedings of the ASTM, 10, 625–630. Origine de la loi puissance S–N utilisée ici. Elle rend le dommage très sensible aux fortes amplitudes, ce qui explique pourquoi l'intermittence pénalise fortement la durée de vie.

Miner, M. A. (1945). "Cumulative Damage in Fatigue." Journal of Applied Mechanics, 12, A159–A164. DOI 10.1115/1.4009458. Référence du cumul linéaire de dommage. Le critère est simple et largement utilisé, mais ignore l'ordre des cycles et de nombreux effets d'interaction.

Matsuishi, M. & Endo, T. (1968). "Fatigue of Metals Subjected to Varying Stress." Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuoka, pp. 37–40. Travail à l'origine du rainflow counting, conçu pour extraire des cycles représentatifs d'un chargement irrégulier.

Downing, S. D. & Socie, D. F. (1982). "Simple rainflow counting algorithms." International Journal of Fatigue, 4(1), 31–40. DOI 10.1016/0142-1123(82)90018-4. Formalisation algorithmique simple et très utilisée du rainflow. C'est une référence pratique pour vérifier les implémentations numériques.

ASTM E1049-85(2023). Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis. ASTM International. DOI 10.1520/E1049-85R23. Standard actuel décrivant plusieurs méthodes de comptage, dont le rainflow. Il constitue le repère normatif pour passer d'une histoire irrégulière à une population de cycles.

Coffin, L. F. Jr. (1954). "A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal." Transactions of the ASME, 76, 931–950. Référence historique de la fatigue thermique et de la relation entre déformation cyclique et durée de vie. Elle devient nécessaire lorsque la réponse sort du domaine purement élastique de notre exemple.

Manson, S. S. (1954). Behavior of Materials Under Conditions of Thermal Stress. NACA Report 1170. Synthèse classique sur contraintes thermiques et tenue des matériaux. Elle rappelle que gradients thermiques, propriétés dépendantes de la température et contraintes de liaison déterminent la conversion température–contrainte.

Neu, R. W. & Sehitoglu, H. (1989). "Thermomechanical fatigue, oxidation, and creep: Part I. Damage mechanisms." Metallurgical Transactions A, 20, 1755–1767. Montre qu'une vraie fatigue thermo-mécanique combine fatigue cyclique, oxydation et fluage selon le phasage thermique et mécanique. Cette complexité dépasse volontairement le modèle exploratoire de ce document.

Conclusion générale

L'intérêt de cette étude n'est pas d'avoir fabriqué un signal turbulent puis d'avoir retrouvé qu'il était turbulent. L'intérêt est d'avoir testé une méthode de réduction qui garde la même logique lorsque la nature du système change. Pour le jet synthétique, la mémoire se laisse représenter par une petite famille de relaxations exponentielles ; pour le CAC 40 étudié auparavant, la mémoire appelait plutôt un continuum quasi algébrique. Dans les deux cas, le retrait de la mémoire révèle une innovation qui peut être presque blanche au premier ordre et pourtant conserver une architecture d'amplitude.

La démarche générale peut être résumée par cinq verbes : observer, relier, réduire, blanchir, caractériser. On observe les corrélations et les échelles ; on relie ces observations à une classe de dynamiques ; on réduit la mémoire à un noyau K ; on blanchit la partie prédictible ; on caractérise l'innovation η sans supposer à l'avance sa loi. La multifractalité n'est qu'une possibilité de cette dernière étape. Selon le processus, η pourra être gaussienne, multiplicative, à queues lourdes, à sauts, multimodale ou encore porteuse d'une dynamique déterministe résiduelle.

$$X(t) \rightarrow mémoire\ K \rightarrow innovation\ \eta \rightarrow classification\ statistique\ du\ processus$$

Cette perspective conduit à une classification simple mais riche : un processus n'est plus seulement décrit par son spectre ou son temps de corrélation ; il est caractérisé par le couple (K, η). La mémoire dit comment le passé persiste. L'innovation dit comment le système crée du nouveau. Entre les deux se dessine une équation de variable d'ordre qui est moins une loi universelle qu'un outil de lecture des systèmes complexes.