Du CAC 40 à une dynamique effective à mémoire longue et cascade multifractale

Une lecture pédagogique d'un phénomène sociétal à partir d'une variable d'ordre, d'un noyau intégral et d'un Multifractal Random Walk à innovations de Lévy

Étude exploratoire et pédagogique

Août 2026

Résumé

Un indice boursier est un objet paradoxal. À chaque instant, il tient dans un seul nombre ; pourtant ce nombre résume les anticipations, les décisions, les contraintes et les réactions d'une population immense d'acteurs. Banques, gérants, investisseurs particuliers, entreprises, algorithmes, banques centrales et producteurs d'information n'agissent ni au même rythme, ni avec la même mémoire, ni avec la même sensibilité. Le CAC 40 peut alors être regardé, non comme une particule obéissant à une loi mécanique, mais comme une **variable d'ordre macroscopique** issue d'un système social distribué.

Le présent document retrace une exploration empirique conduite à partir du signal journalier du CAC 40. On construit d'abord le logarithme centré du niveau de l'indice,

$$y(t) = lnP(t) - \langle lnP \rangle_{\Omega},$$

où Ω désigne l'intervalle temporel observé. Cette transformation rend les variations relatives additives et fournit une variable d'ordre sans niveau absolu arbitraire.

L'analyse de $y(t)$ fait apparaître une mémoire très longue : la fonction d'autocorrélation possède un temps caractéristique de l'ordre de 831 jours de bourse. L'information mutuelle conduit à un retard d'embedding d'environ 91 jours. Dans l'espace de phases reconstruit en dimension trois, la récurrence, la dimension de corrélation et la prédictabilité locale montrent une organisation forte, incompatible avec l'image d'un simple bruit indépendant.

La mémoire est ensuite modélisée non par quelques exponentielles, mais par un **noyau intégral continu** construit sur une famille de lois de puissance $t^{-\alpha}$. Cette représentation répond à l'idée qu'un système sociétal possède non pas un seul temps de relaxation, mais une distribution d'horizons de décision et de mémoire. L'inversion du noyau permet d'extraire une composante longue et de former une innovation quotidienne $s(t)$ — notée aussi $\eta(t)$ dans les calculs. Celle-ci devient presque blanche en corrélation linéaire, mais son carré conserve une forte intermittence et une mémoire d'amplitude.

La tentative de réduire cette intermittence par une succession de modèles de variance montre vite une limite : les pics se reproduisent à toutes les échelles. Une lecture multifractale devient alors plus naturelle. La MF-DFA met en évidence une dépendance régulière de l'exposant généralisé $h(q)$ avec q et un spectre multifractal de largeur non négligeable. La calibration d'un Multifractal Random Walk conduit à $H \simeq 0,49$, une intermittence λ^2 de quelques centièmes et une échelle intégrale de plusieurs centaines à environ un millier de jours. Enfin, le remplacement de l'innovation gaussienne par une innovation stable de Lévy conduit à une représentation compacte :

$$dy(t) = [-a_0 y(t) - \int_0^{\infty} K_y(\tau) y(t-\tau) d\tau] dt + e^{\omega(t)} dL_{\alpha_L}(t).$$

Cette équation n'est pas présentée comme une « loi physique du CAC 40 ». Elle est une **équation effective** : la mémoire additive représente l'inertie historique du système collectif ; $e^{\omega(t)}$ représente sa susceptibilité multiscalaire, c'est-à-dire la capacité variable du marché à amplifier une même excitation ; dL_{α_L} représente l'innovation agrégée. Le modèle suggère ainsi que le « bruit » d'un système social complexe possède lui-même une architecture.

1. Pourquoi chercher une physique effective d'un indice boursier ?

Le mot « physique » doit être employé ici avec précaution. Le CAC 40 n'est pas un fluide, une plaque élastique ou un gaz de particules. Les acteurs qui le composent interprètent, apprennent, anticipent, imitent et changent de stratégie. Il n'existe donc aucune raison de postuler qu'un indice boursier obéit à une loi universelle au même sens qu'une équation de diffusion.

Pourtant, un point de vue de physique statistique reste fécond. Dès qu'un très grand nombre d'éléments interagissent, la description microscopique devient impossible et l'on cherche des variables macroscopiques qui résument une partie de l'état collectif. Dans un matériau magnétique, la magnétisation ne décrit aucun spin particulier ; elle résume une organisation collective. Dans un marché, un indice ne décrit aucun agent particulier ; il résume une résultante collective de prix.

Cette analogie ne doit pas masquer les différences, mais elle permet une question utile : **quelles structures temporelles persistent lorsque l'on projette l'immense système social sur une seule variable observable ?**

La réponse obtenue au fil de l'analyse est double :

une partie de la dynamique ressemble à une mémoire additive distribuée sur de nombreuses échelles de temps ;

une autre partie ressemble à une cascade multiplicative qui module l'amplitude des fluctuations.

Cette distinction entre **mémoire** et **susceptibilité** est le fil directeur du document.

2. Construire la variable d'ordre : du niveau du CAC 40 au logarithme centré

2.1. Pourquoi le logarithme ?

Soit $P(t)$ le niveau du CAC 40. Le logarithme possède une propriété fondamentale : une petite variation relative devient approximativement additive,

$$\Delta lnP(t) \simeq \frac{\Delta P(t)}{P(t)}.$$

Deux périodes où l'indice vaut 2 000 et 8 000 points ne doivent pas être comparées en variation absolue de la même façon. Le logarithme retire une partie de cet effet d'échelle.

On centre ensuite le signal sur l'espace d'observation Ω :

$$y(t) = lnP(t) - \overline{lnP},$$

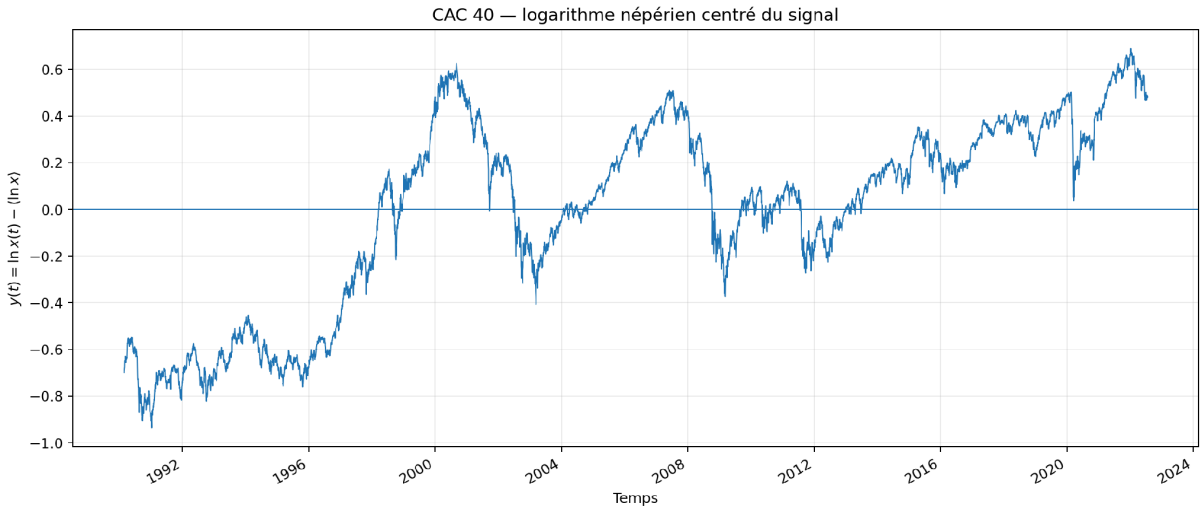
avec

$$\overline{lnP} = \frac{1}{|\Omega)} \int_{\Omega} lnP(t)dt$$

ou, dans la série discrète,

$$\overline{lnP} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} lnP_n.$$

Le centrage n'affirme pas qu'il existe une valeur fondamentale autour de cette moyenne. Il définit simplement une origine pour l'analyse de la forme temporelle.



Le logarithme centré du CAC 40, variable d'ordre utilisée dans toute l'analyse. Le signal conserve les grandes phases historiques mais n'est plus attaché au niveau nominal de l'indice.

2.2. Une variable macroscopique et non un rendement journalier

Il est essentiel de distinguer $y(t)$ des rendements journaliers. $y(t)$ est un **niveau logarithmique centré**. Il contient donc naturellement des composantes lentes, des phases de hausse et de baisse, ainsi que des traces de l'histoire du marché. C'est précisément cette mémoire que l'on veut étudier avant de passer aux fluctuations rapides.

3. Première observation : une mémoire longue fortement visible

3.1. Fonction d'autocorrélation

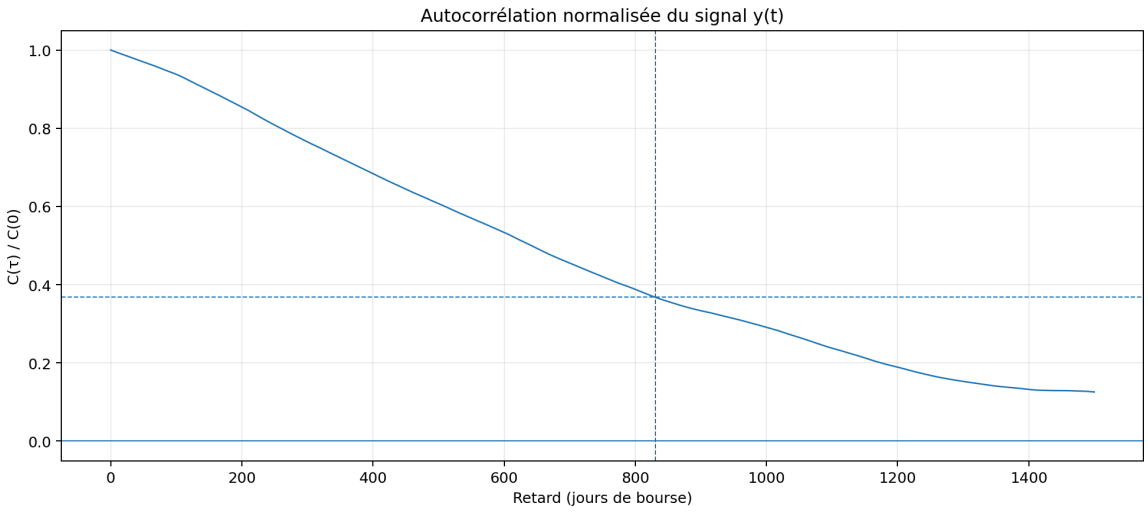
On estime la fonction d'autocorrélation normalisée

$$C_y(\tau) = \frac{\langle y(t)y(t+\tau)\rangle}{\langle y^2(t)\rangle}.$$

Sur le signal étudié, le premier passage sous $1/e$ apparaît vers

$$\tau_c \simeq 831 jours\ de\ bourse.$$

Ce nombre ne doit pas être interprété comme une constante universelle du CAC 40. Il dépend de la période étudiée et de la définition du temps de corrélation. Sa signification est qualitative : **le niveau logarithmique possède une trace temporelle de plusieurs années**.



Autocorrélation normalisée de $y(t)$. La décroissance très lente indique que le signal de niveau ne peut pas être traité comme une suite de réalisations indépendantes.

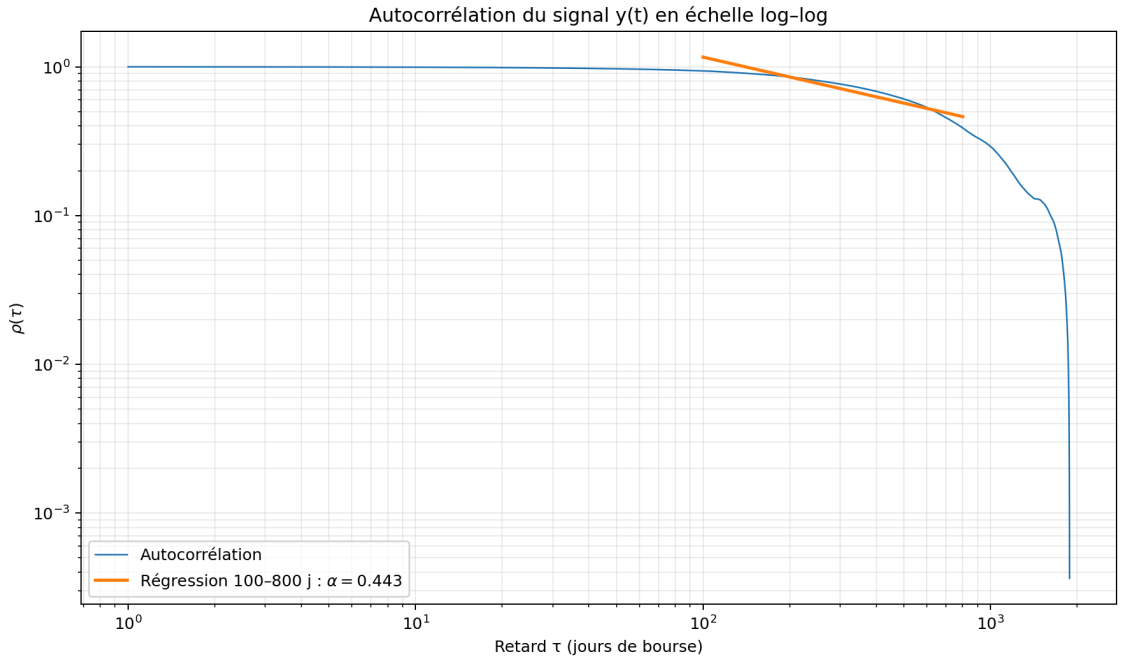
Cette première observation suffit à écarter un modèle markovien élémentaire appliqué directement à $y(t)$. Si le futur ne dépendait que de l'état instantané, la mémoire observée devrait être produite par un petit nombre de variables cachées. Une autre possibilité est que la mémoire elle-même soit distribuée sur un continuum d'échelles.

3.2. La pente log-log n'est pas constante

Le tracé de l'autocorrélation en coordonnées logarithmiques permet de tester une décroissance de type

$$C_y(\tau) \propto \tau^{-\alpha}.$$

Sur une fenêtre intermédiaire, une valeur de l'ordre de $\alpha \simeq 0,44$ avait été retenue comme paramètre qualitatif. Mais la pente locale change avec l'échelle. Cela signifie qu'un exposant unique décrit mal toute la mémoire.



Autocorrélation de $y(t)$ en représentation log-log. Une loi de puissance locale est plausible, mais la courbure montre que l'exposant effectif dépend de l'échelle.

Ce résultat prépare le passage d'un noyau $t^{-\alpha}$ unique à une **distribution de noyaux scalaires**.

4. Reconstruire un espace de phases : la mémoire devient géométrie

Une fonction de corrélation dit qu'il existe une dépendance temporelle ; elle ne dit pas encore comment la trajectoire s'organise. La reconstruction d'un espace de phases par coordonnées retardées donne une image géométrique de cette dépendance.

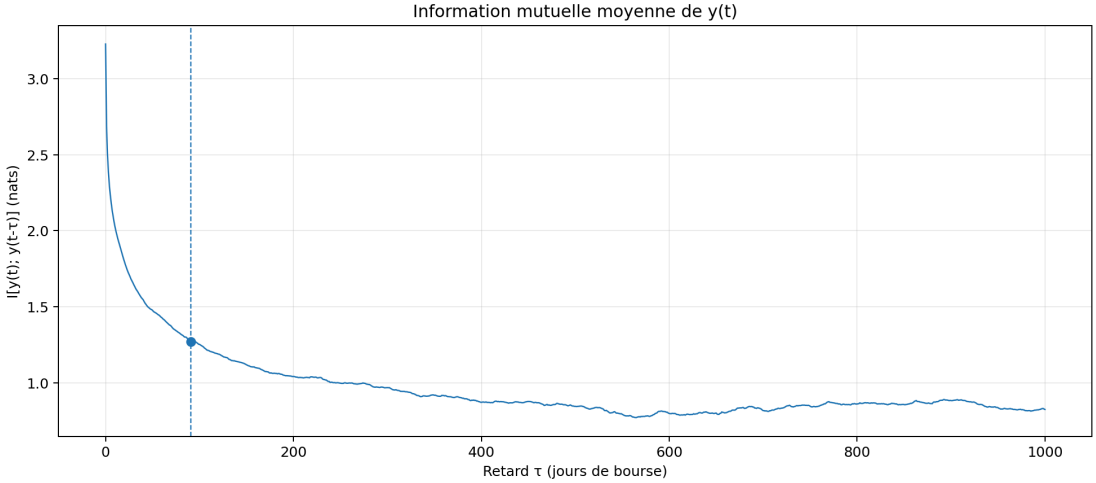
4.1. Choix du retard par information mutuelle

L'information mutuelle entre $y(t)$ et $y(t - \tau)$ mesure une dépendance plus générale que la corrélation linéaire :

$$I(\tau) = \int p\left(y_t, y_{t-\tau}\right) ln[\frac{p\left(y_t, y_{t-\tau}\right)}{p\left(y_t\right)p\left(y_{t-\tau}\right)}) dy_t dy_{t-\tau}.$$

Le premier minimum local obtenu dans l'analyse se situe autour de

$$\tau_{MI} \simeq 91 jours.$$



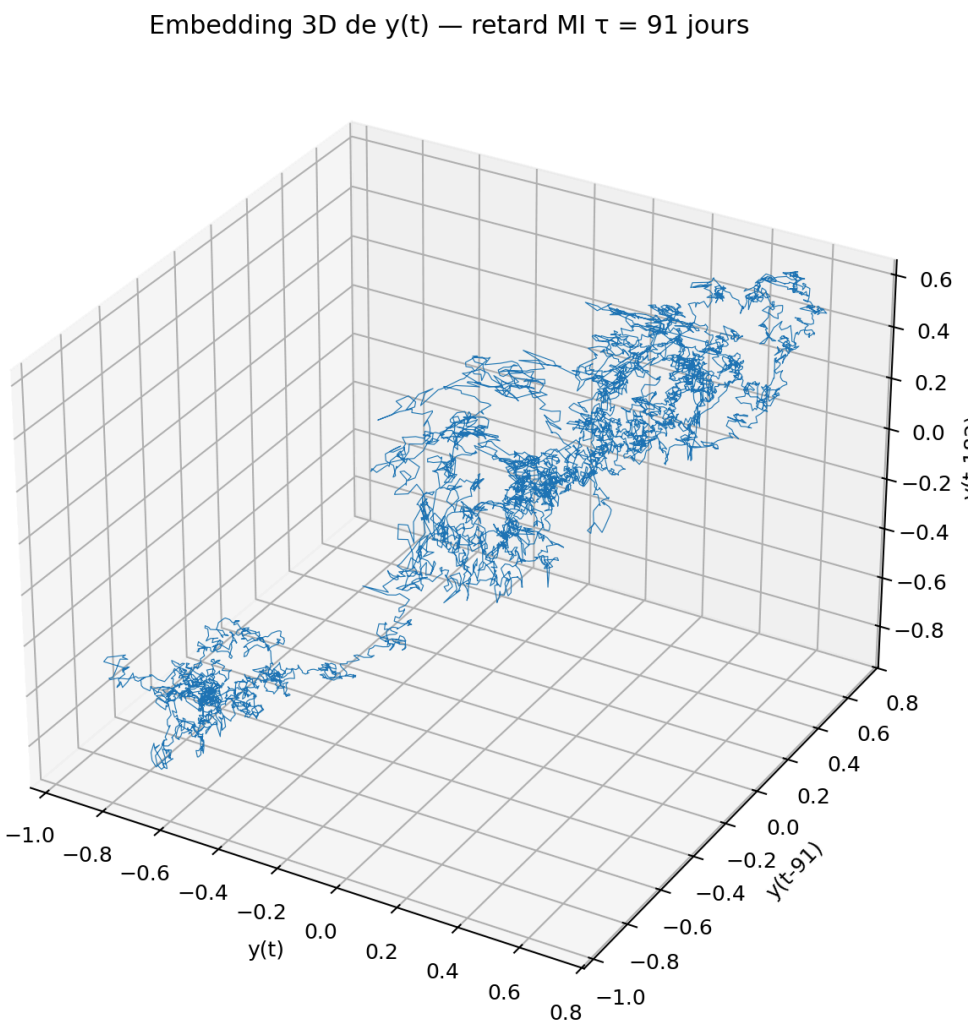
Information mutuelle utilisée pour choisir un retard moins redondant que le temps de corrélation. Le premier minimum local fournit un compromis entre proximité et indépendance des coordonnées retardées.

4.2. Embedding en dimension trois

On construit alors

$$X(t) = (y(t), y(t - \tau), y(t - 2\tau)),$$

avec $\tau \simeq 91$ jours.



Espace de phases reconstruit de $y(t)$ avec le retard issu de l'information mutuelle. La trajectoire n'occupe pas uniformément le volume disponible : elle visite des régions privilégiées et conserve une organisation lente.

L'objectif n'est pas d'affirmer que le CAC 40 possède un attracteur déterministe classique. Dans une série financière non stationnaire, une reconstruction de Takens ne possède pas automatiquement le statut qu'elle aurait pour un système autonome de laboratoire. Elle reste néanmoins un outil descriptif : la trajectoire montre que la série n'est pas un nuage sans structure.

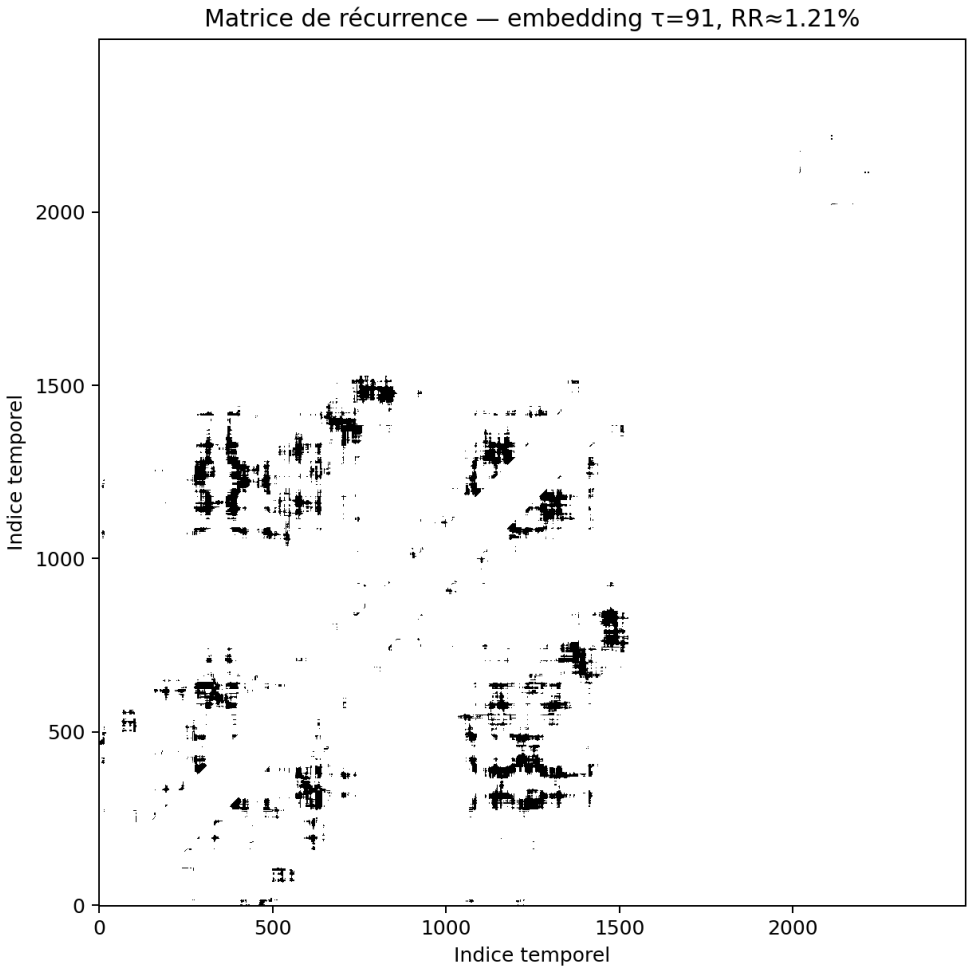
5. Récurrence, dimension et prédictabilité : quantifier l'organisation

5.1. Matrice de récurrence

Deux états sont dits récurrents lorsque leur distance dans l'espace reconstruit est inférieure à un seuil ε :

$$R_{ij} = \Theta\left(\varepsilon - \| X_i - X_j \|\right).$$

La matrice de récurrence permet de distinguer des points isolés, des diagonales et des structures verticales. Les diagonales traduisent le retour de séquences temporelles voisines ; les verticales traduisent des périodes où la trajectoire reste dans une région comparable de l'espace d'état.



Matrice de récurrence de $y(t)$. La présence de nombreuses structures diagonales et verticales traduit une forte persistance de motifs à l'échelle de l'espace reconstruit.

Les indicateurs obtenus dans cette analyse étaient de l'ordre de

$$DET \simeq 95,7\%, LAM \simeq 97,3\%.$$

Ces valeurs élevées ne prouvent pas un déterminisme pur ; elles montrent surtout que, **dans la métrique et au seuil choisis**, une très grande partie des récurrences s'inscrit dans des séquences organisées.

5.2. Dimension de corrélation

La somme de corrélation

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i<j} 1\left(\| X_i - X_j \| < r\right)$$

est utilisée pour estimer une pente locale

$$C(r) \propto r^{D_2}.$$

Dans l'espace 3D utilisé ici, l'estimation donne une valeur d'environ

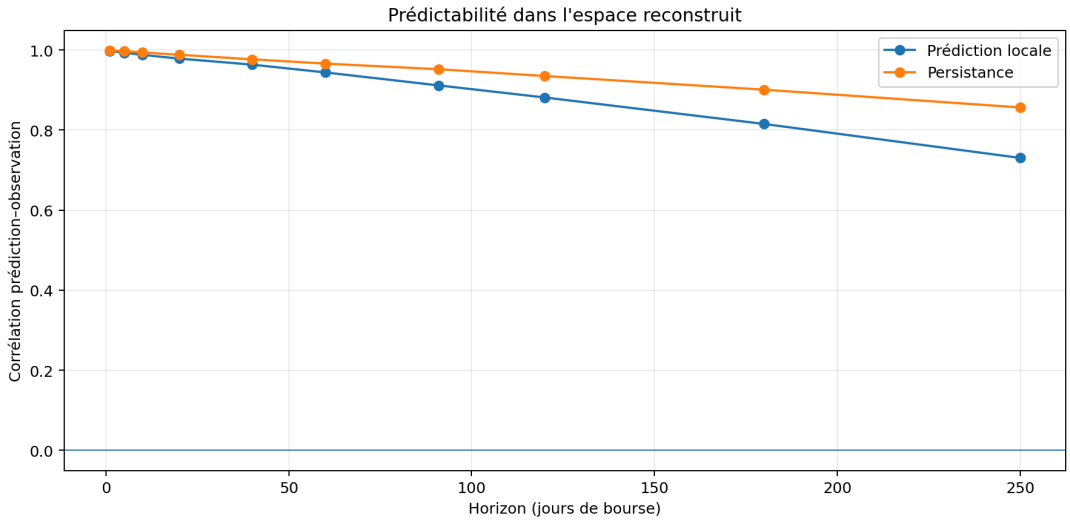
$$D_2 \simeq 2,1.$$

Cette valeur est surtout descriptive : une véritable estimation de dimension intrinsèque exige des tests de saturation avec la dimension d'embedding, des données plus stationnaires et une analyse robuste aux

tendances. Elle indique néanmoins que la trajectoire n'est pas uniformément répartie comme un nuage tridimensionnel quelconque.

5.3. Prédictabilité locale

On peut enfin utiliser les voisins les plus proches de $X(t)$ pour prévoir l'évolution future. La corrélation entre prévision locale et observation reste élevée à des horizons de plusieurs dizaines de jours sur le signal de niveau : dans les calculs exploratoires, elle valait encore environ 0,96 à 40 jours, 0,91 à 91 jours et 0,82 à 180 jours.



Prédictabilité locale du signal de niveau. Une part importante de la performance vient de la lenteur et de la mémoire du signal ; elle ne doit pas être interprétée comme une stratégie de trading directement exploitable.

La conclusion de cette première partie est donc robuste qualitativement : **le logarithme centré du CAC 40 porte une structure lente et fortement mémorielle**.

6. Un détour instructif : pourquoi une somme finie de modes exponentiels ne suffit pas

La Dynamic Mode Decomposition a été testée comme outil de séparation des échelles. Dans sa forme élémentaire, elle cherche une représentation

$$y(t) \simeq \sum_k b_k \phi_k e^{\lambda_k t}.$$

Quelques modes lents peuvent être retirés, mais la mémoire résiduelle reste importante. Même une DMD de Hankel ne parvient pas à ramener le signal à un petit nombre de temps de relaxation stables. Ce constat a une signification profonde : une loi de puissance est elle-même représentable comme une superposition continue d'exponentielles,

$$t^{-\alpha} \sim \int_0^\infty \rho(\tau_r) e^{-t/\tau_r} d\tau_r.$$

La DMD cherche une somme discrète ; le signal suggère un **spectre continu de temps de relaxation**. L'échec relatif de la modalisation n'est donc pas seulement un problème numérique : il peut révéler une inadéquation de la base exponentielle finie.

7. Représenter la mémoire par un noyau intégral continu

7.1. Une équation de Langevin généralisée comme forme effective

On écrit une dynamique réduite sous la forme

$$y^{\cdot}(t) = - a_0 y(t) - \int_0^t K_y(t - s) y(s) ds + \eta(t).$$

Le premier terme représente une réponse locale instantanée ; le second représente la mémoire ; $\eta(t)$ est ce qui reste après projection sur ces contributions.

Dans une lecture plus générale, le terme $a_0 y$ peut être remplacé par la dérivée d'un potentiel effectif :

$$y^{\cdot}(t) = - \frac{\partial V}{\partial y}(y) - \int_0^t K_y(t - s) y(s) ds + \eta(t).$$

La présente identification empirique porte surtout sur le noyau mémoire ; elle ne prétend pas avoir identifié un potentiel économique unique.

7.2. L'autocorrélation contient le noyau

Dans le cadre linéarisé, la fonction de corrélation vérifie une équation de convolution du type

$$\frac{dC_y(t)}{dt} = - a_0 C_y(t) - \int_0^t K_y(t - s) C_y(s) ds.$$

C'est cette relation qui transforme la fonction de corrélation en problème inverse. Au lieu de postuler une forme unique de K_y, on construit une base de noyaux scalaires

$$K_\alpha(t) = \left(t + t_0\right)^{-\alpha}$$

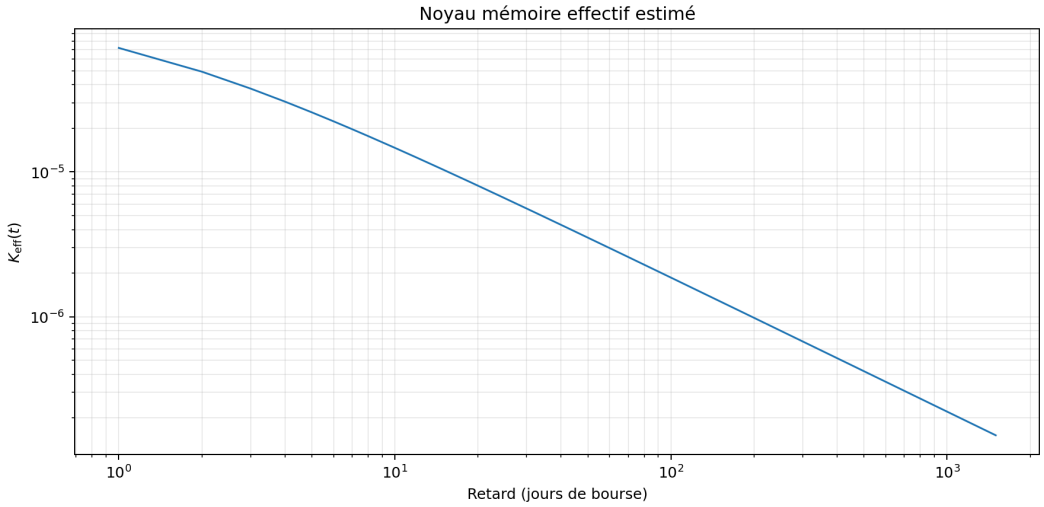
et l'on cherche

$$K_y(t) = \int \rho_y(\alpha) \left(t + t_0\right)^{-\alpha} d\alpha.$$

En discret, l'identification devient une régression régularisée avec poids positifs. La positivité évite des compensations artificielles entre noyaux et la régularisation favorise une densité $\rho_y(\alpha)$ lisse.



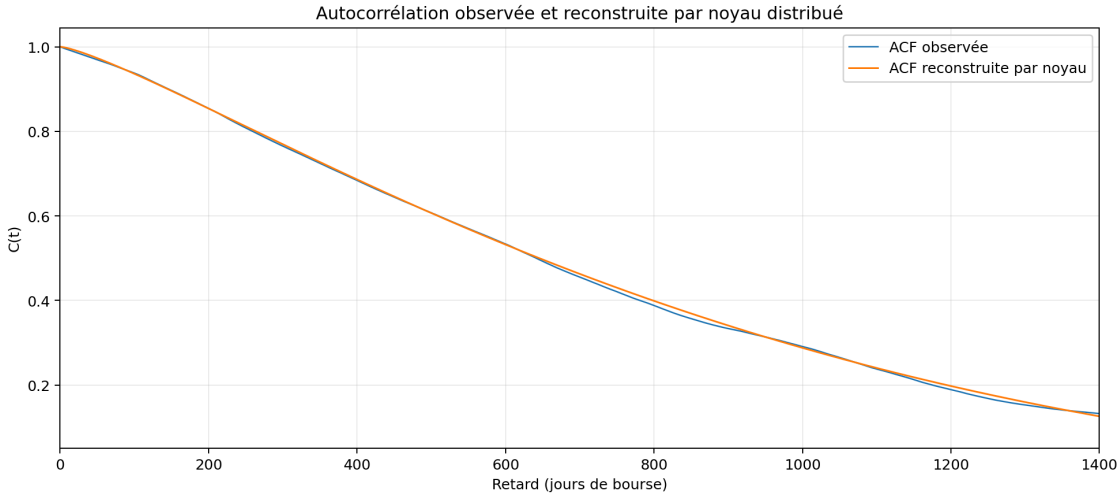
Densité empirique des exposants du noyau mémoire. Dans l'identification réalisée, le poids s'est concentré vers des exposants proches de 0,9–0,95. Cet exposant du noyau n'est pas l'exposant de la pente directe de l'autocorrélation : les deux objets sont reliés par l'équation intégrale et ne doivent pas être confondus.



Noyau mémoire effectif estimé. La décroissance quasi rectiligne en log-log illustre une mémoire distribuée proche d'une loi de puissance sur une large plage de retards.

7.3. Vérification par reconstruction de l'autocorrélation

La validation la plus importante consiste à réinjecter le noyau dans l'équation de corrélation et à reconstruire $C_y(t)$. Dans l'ajustement exploratoire, la corrélation entre ACF observée et reconstruite est proche de 0,9999 et le R^2 atteint environ 0,9996 sur la plage ajustée.



Autocorrélation observée et reconstruite à partir du noyau distribué. La superposition montre qu'une mémoire intégrale continue peut résumer la décroissance lente bien mieux qu'un petit nombre de modes exponentiels.

Un ajustement aussi bon doit être interprété avec prudence : le modèle possède plusieurs degrés de liberté et il est ajusté précisément sur la fonction de corrélation. Il montre surtout que la **classe de noyaux distribués est compatible** avec la mémoire observée.

8. Extraire la mémoire : naissance d'un résidu presque blanc

8.1. Définition de l'innovation

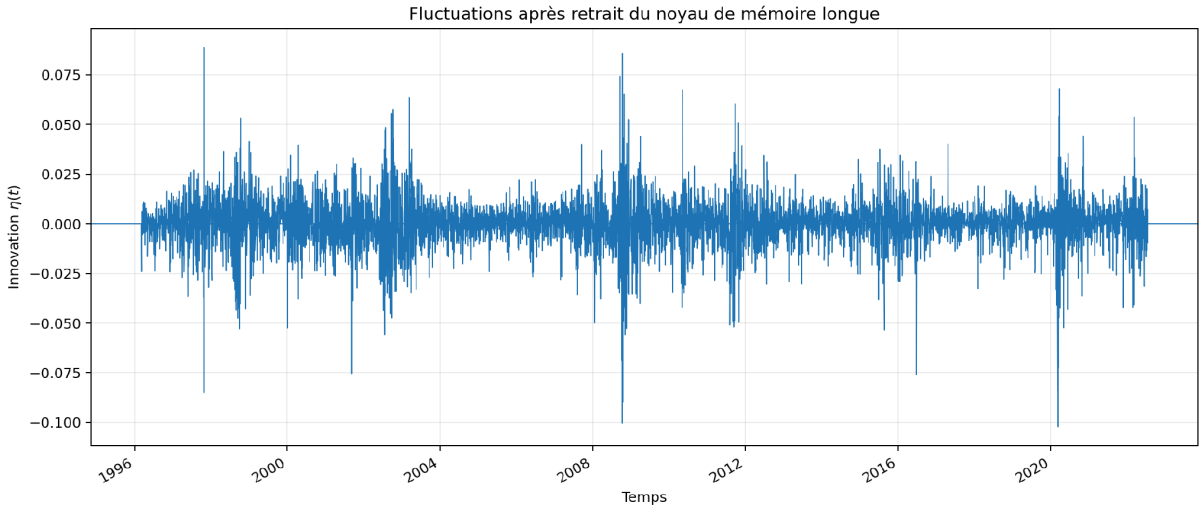
À l'échelle discrète journalière, on construit

$$\eta_n = \Delta y_n + a_0 y_n + \sum_{k=0}^{K} K_y(k) y_{n-k}.$$

Dans la suite, on notera parfois ce résidu $s(t)$ pour insister sur son statut de signal fluctuant :

$$s(t) \equiv \eta(t).$$

Il ne faut pas le confondre avec le niveau $y(t)$. $s(t)$ est ce qui reste de l'incrément quotidien après compensation de la mémoire longue estimée.

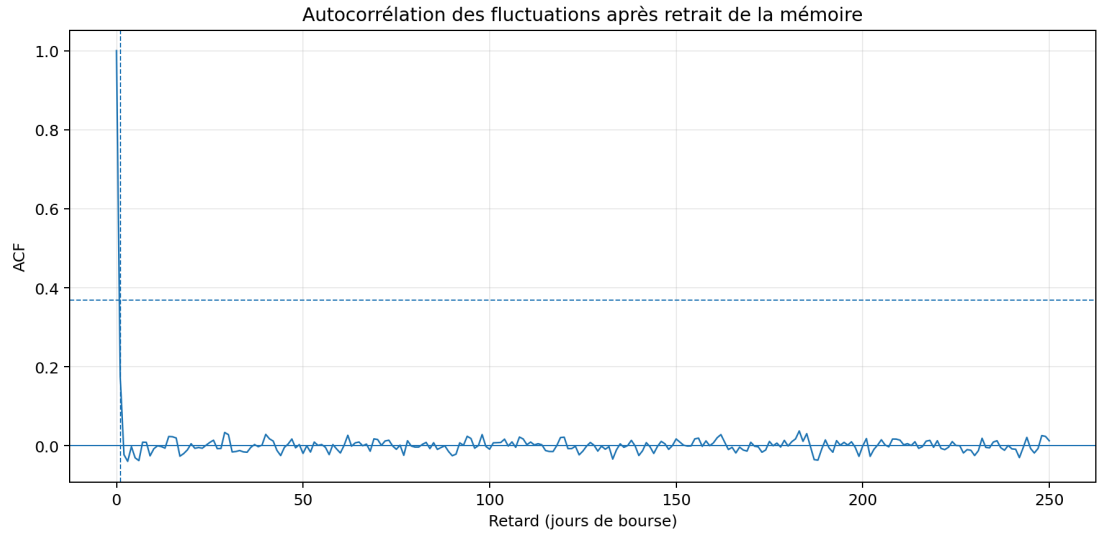


Résidu journalier après retrait du noyau mémoire. La lente enveloppe du niveau a disparu ; le signal est maintenant dominé par des fluctuations rapides et des épisodes intermittents.

8.2. Une mémoire linéaire presque éliminée

Le temps de corrélation $1/e$ tombe à environ un jour. Dans les calculs exploratoires,

$$C_s(1) \simeq 0,175, C_s(5) \simeq -0,031, C_s(20) \simeq 0,005.$$



Autocorrélation du résidu après retrait du noyau. Au-delà des tout premiers retards, la corrélation linéaire devient très faible.

Ce résultat marque un changement de régime conceptuel. La mémoire du **niveau** a été largement capturée par le noyau intégral. Pourtant le résidu n'est pas un bruit gaussien banal.

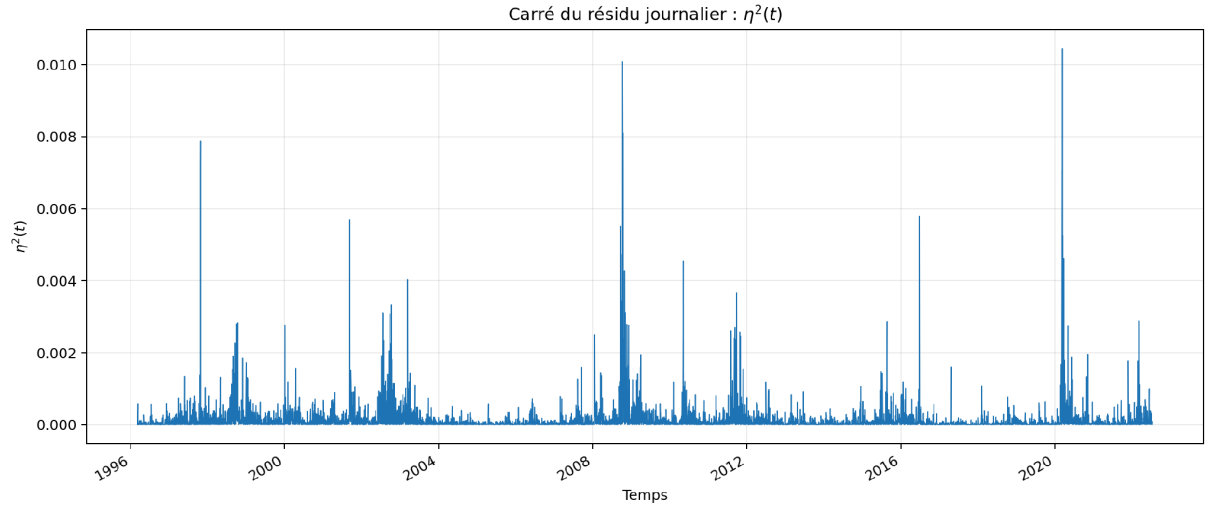
9. Le carré du résidu révèle ce que le résidu cachait

9.1. Intermittence

On considère

$$v(t) = s^2(t) = \eta^2(t).$$

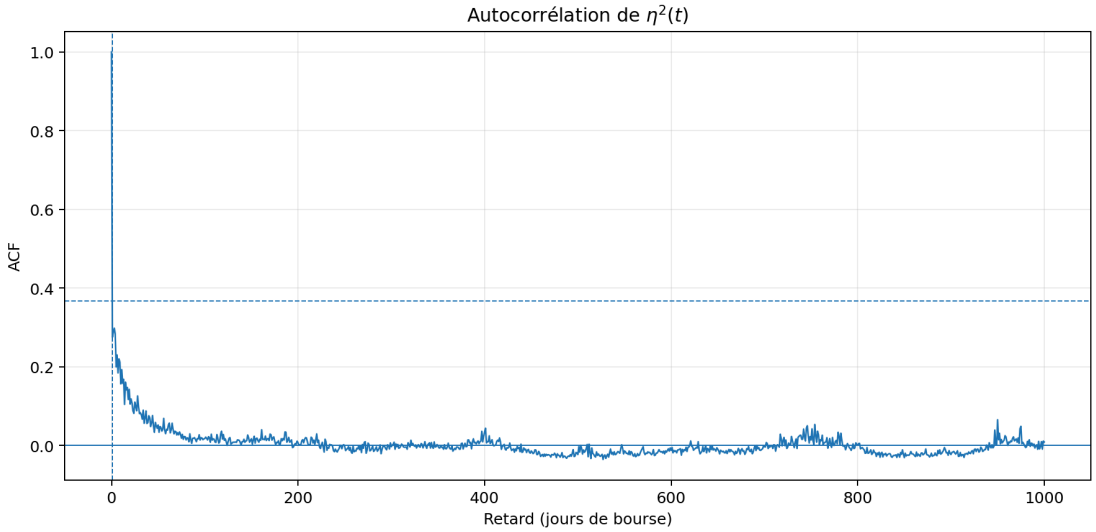
Le carré rend visibles les variations d'intensité indépendamment du signe.



Carré du résidu journalier. Les fluctuations ne sont pas réparties uniformément dans le temps : elles forment des grappes, avec des périodes calmes et des épisodes de très forte activité.

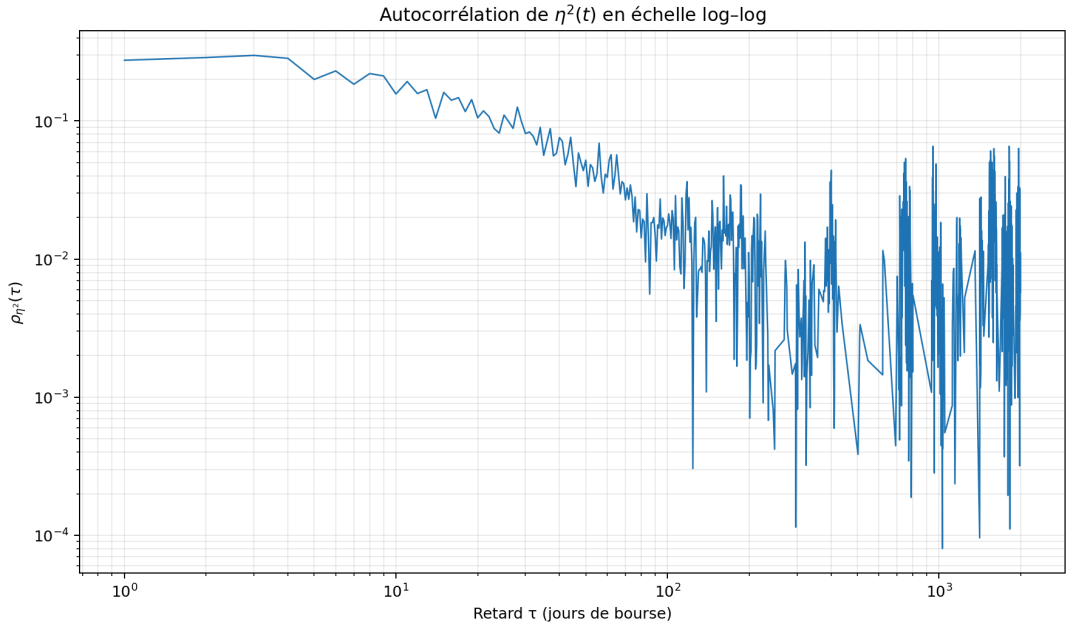
Les pics ne sont pas de simples valeurs aberrantes isolées. Ils se regroupent et apparaissent à des amplitudes très différentes. Le signal $s(t)$ est presque blanc au premier ordre, mais son **amplitude est organisée**.

9.2. Autocorrélation de s^2



Autocorrélation du carré du résidu. La chute initiale est rapide, mais une corrélation positive persiste sur des retards bien plus longs que pour $s(t)$ lui-même.

En représentation log-log, une décroissance en loi de puissance est plausible sur les petites et moyennes échelles, mais l'exposant n'est pas stable sur toute la plage.



Autocorrélation de $s^2(t)$ en log-log. La mémoire d'amplitude est multiscalaire : une loi unique $\tau^{-\alpha}$ n'explique pas toutes les échelles.

À ce stade, plusieurs modèles de variance conditionnelle ont été explorés : noyau intégral sur s^2, combinaison d'un noyau court et d'un noyau long, transformation logarithmique de la variance. Chacun élimine une partie de la structure mais fait remonter d'autres pics ou d'autres corrélations dans le résidu

suivant. Cette expérience répétée conduit à une intuition importante : **le problème n'est peut-être pas qu'il reste une dernière échelle mal filtrée ; il se peut qu'il n'existe pas de dernière échelle.**

10. Changer de question : de la filtration des pics à la cascade multifractale

Un processus fractal ou multifractal ne possède pas une échelle caractéristique unique. La même logique statistique se retrouve, avec des intensités différentes, lorsque l'on change d'échelle. Une cascade multiplicative pousse cette idée plus loin : les fluctuations à une échelle modulent l'amplitude des fluctuations aux échelles plus fines.

On peut écrire symboliquement

$$\sigma(t) = \sigma_1(t)\sigma_2(t) \cdots \sigma_J(t),$$

donc

$$ln\sigma(t) = \sum_{j=1}^{J} \omega_j(t).$$

Au lieu de retirer successivement les pics, on considère alors qu'ils sont **la signature visible de la cascade**.

11. Analyse multifractale du résidu

11.1. Fonctions de structure et exposants d'échelle

Pour un processus agrégé à l'échelle τ, on définit

$$X_\tau(t) = \sum_{i=1}^{\tau} s(t + i)$$

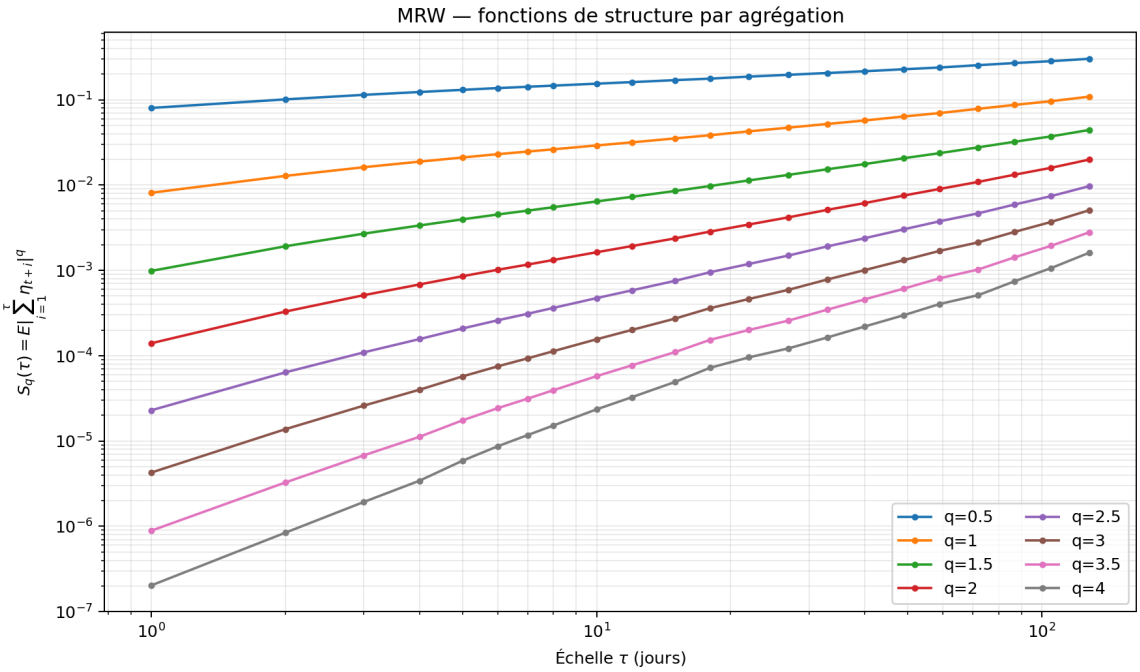
et

$$S_q(\tau) = E[|X_\tau(t))^q).$$

Un comportement d'échelle s'écrit

$$S_q(\tau) \propto \tau^{\zeta(q)}.$$

Dans un monofractal simple, $\zeta(q)$ est linéaire en q. Dans un multifractal, sa courbure traduit la coexistence d'exposants locaux différents.



Fonctions de structure par agrégation utilisées pour la calibration du MRW. Les lois d'échelle sont remarquablement régulières sur une plage intermédiaire de quelques jours à quelques dizaines de jours.

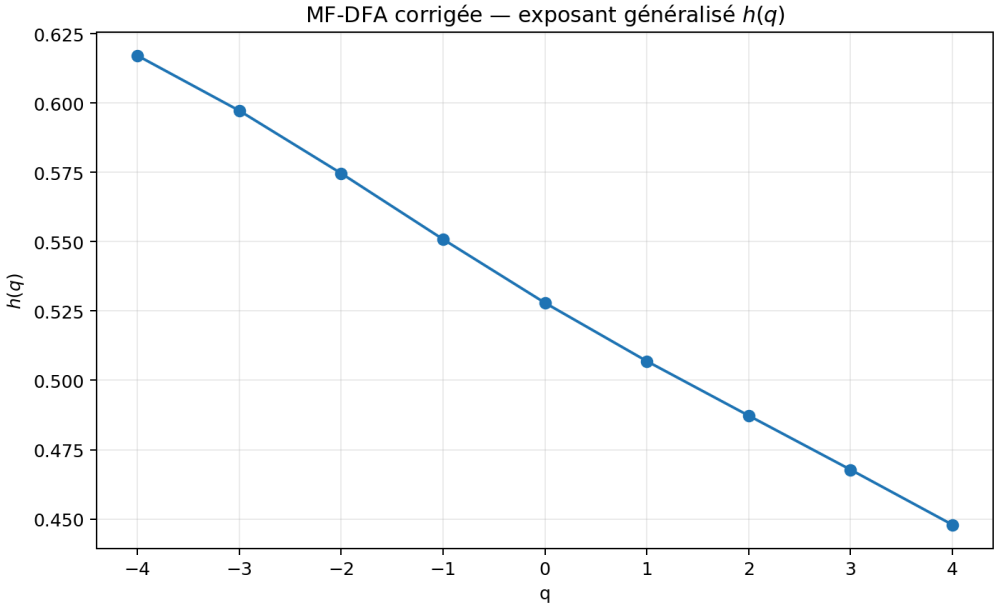
11.2. MF-DFA et $h(q)$

La Multifractal Detrended Fluctuation Analysis calcule des fonctions de fluctuation $F_q(s)$ et recherche

$$F_q(s) \propto s^{h(q)}.$$

Pour le résidu étudié, l'exposant généralisé diminue régulièrement lorsque q augmente :

$$h(-4) \simeq 0,617, h(0) \simeq 0,528, h(2) \simeq 0,487, h(4) \simeq 0,448.$$



Exposant généralisé de Hurst obtenu par MF-DFA. Les valeurs négatives de q privilégient les petites fluctuations ; les valeurs positives privilégient les grandes. La décroissance de $h(q)$ montre qu'elles n'obéissent pas au même exposant d'échelle.

11.3. Spectre multifractal

On définit

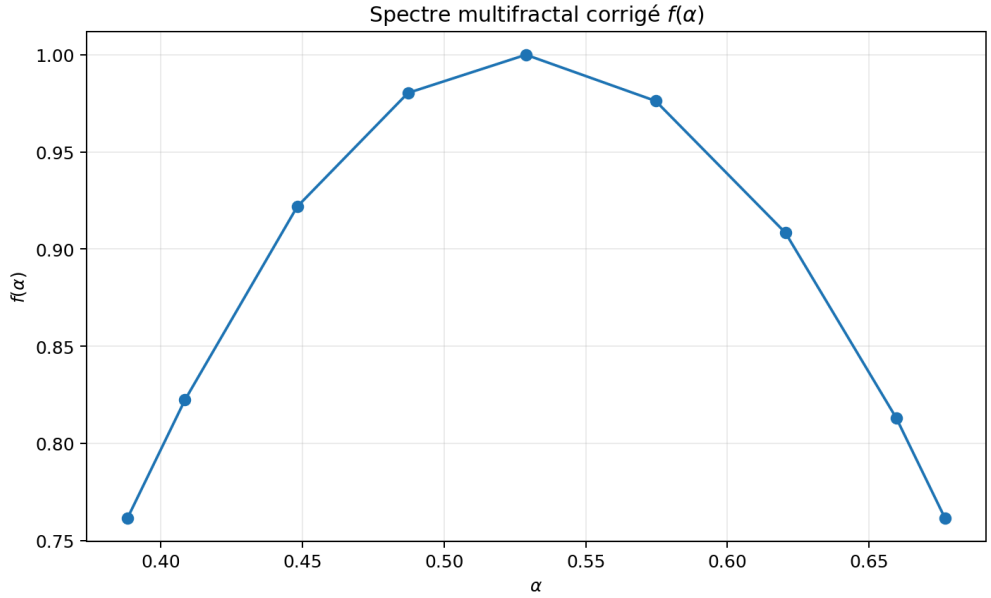
$$\tau(q) = qh(q) - 1,$$

puis, par transformée de Legendre,

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}, f(\alpha) = q\alpha - \tau(q).$$

Le spectre obtenu s'étend approximativement de $\alpha \simeq 0,39$ à $\alpha \simeq 0,68$, soit une largeur de l'ordre de

$$\Delta\alpha \simeq 0,29.$$



Spectre multifractal du résidu. Sa largeur traduit une distribution continue de régularités locales plutôt qu'un exposant de Hölder unique.

Ce résultat donne un sens mathématique à l'impression visuelle de « pics à toutes les échelles d'amplitude ».

12. Le Multifractal Random Walk : un modèle de cascade continu

12.1. Forme générale

Le Multifractal Random Walk (MRW) introduit une modulation multiplicative de l'innovation :

$$s(t) = e^{\omega(t)}\varepsilon(t).$$

Le champ $\omega(t)$ joue le rôle de log-volatilité multiscalaire. Dans le MRW lognormal, sa covariance est approximativement logarithmique :

$$Cov[\omega(t), \omega(t + \tau)) \simeq \lambda^2 ln\left(\frac{T}{\tau}\right), \tau < T.$$

T est l'échelle intégrale de la cascade ; λ^2 mesure son intensité intermittente.

12.2. Calibration par $\zeta(q)$

Pour la forme lognormale du MRW, une approximation courante est

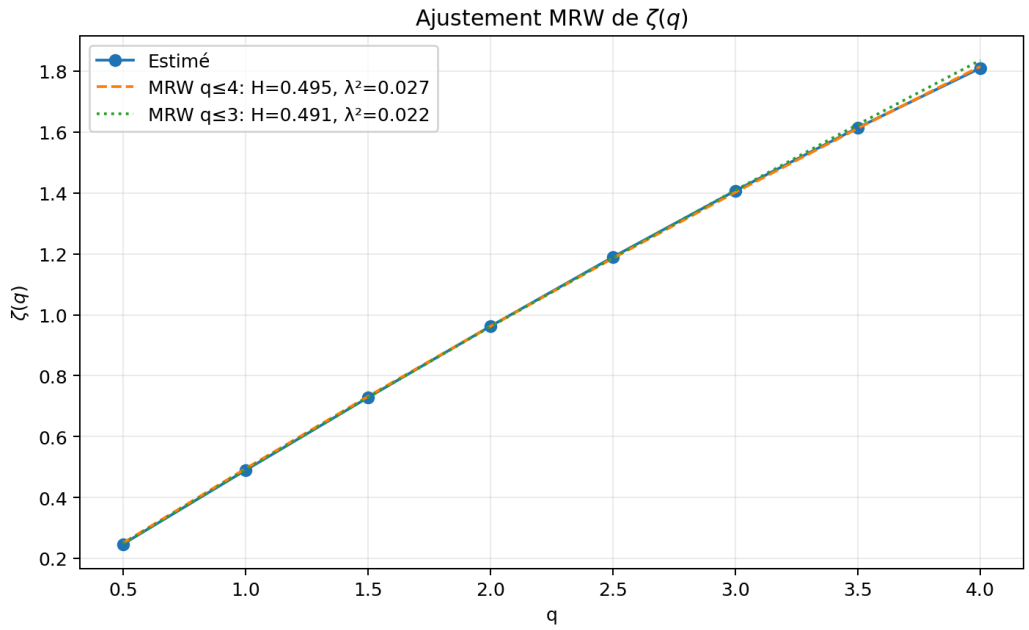
$$\zeta(q) = Hq - \frac{\lambda^2}{2} q(q - 1).$$

L'ajustement sur les fonctions de structure du résidu conduit à

$$H \simeq 0,49,$$

et, selon la plage de moments utilisée,

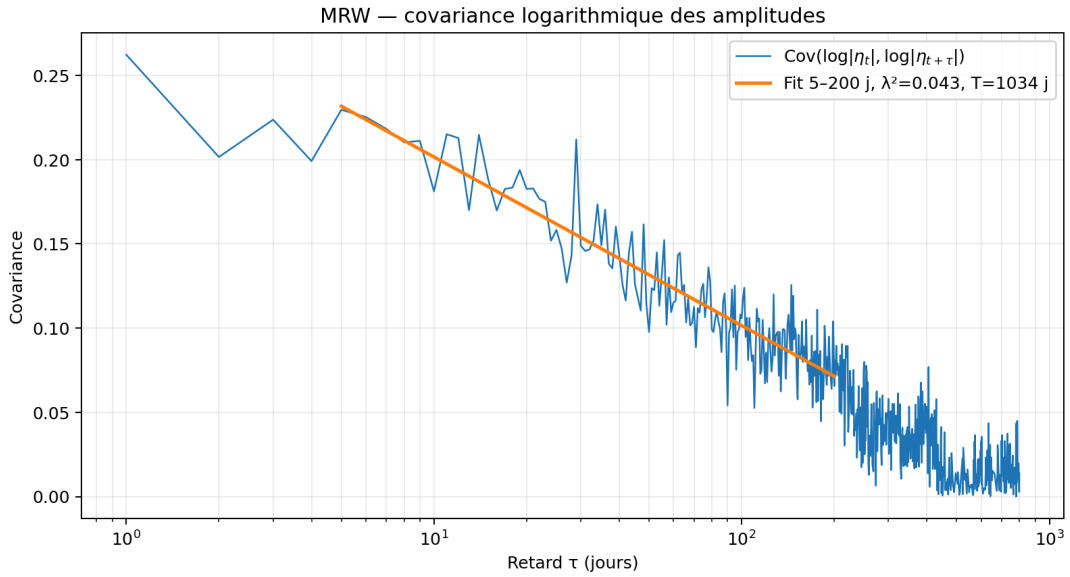
$$\lambda^2 \simeq 0,02 \text{à} 0,03.$$



Ajustement MRW des exposants $\zeta(q)$. H proche de $1/2$ indique un comportement global proche d'un incrément brownien, tandis que la courbure non nulle est portée par λ^2.

12.3. Calibration de l'échelle intégrale

La covariance de $log|s(t))$ fournit une seconde voie de calibration. Sur une plage de quelques jours à quelques centaines de jours, elle est compatible avec une décroissance approximativement linéaire en $log\tau$.



Covariance logarithmique des amplitudes. L'ajustement donne une échelle intégrale de l'ordre de 10^3 jours dans la calibration initiale, mais cette valeur reste sensible à la plage d'ajustement.

Le MRW gaussien reproduit la structure multifractale centrale, mais sous-estime les queues extrêmes et une partie de la mémoire d'amplitude. Cela conduit à modifier la loi des innovations.

13. Pourquoi une innovation de Lévy ?

13.1. De la Gaussianité à la stabilité

Une loi stable de Lévy possède une propriété d'invariance par addition : pour des variables indépendantes appartenant à la même famille stable,

$$X_1 + \cdots + X_n =^d n^{1/\alpha_L} X$$

à changement d'échelle et de localisation près. La loi normale est le cas limite $\alpha_L = 2$.

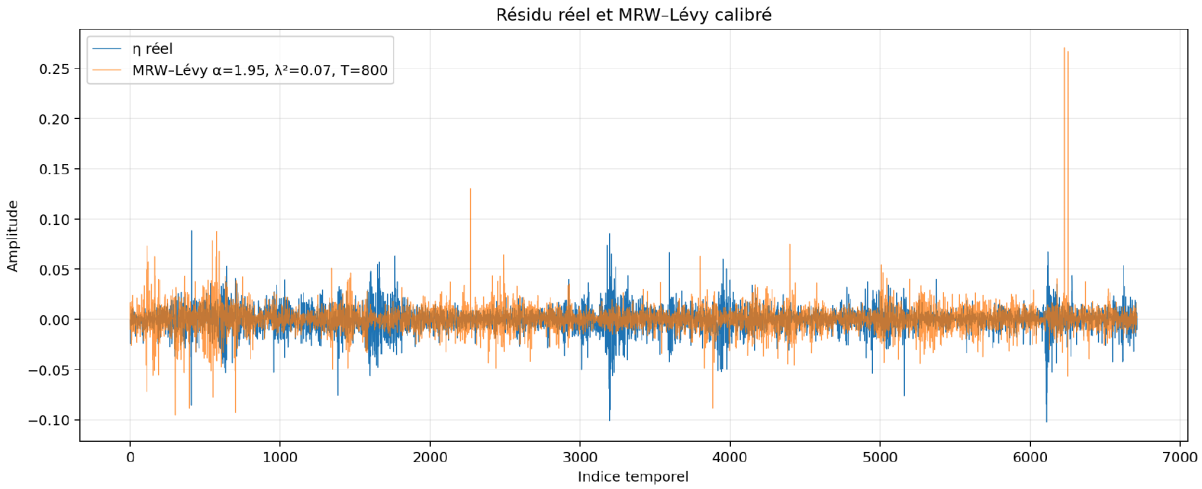
Dans un phénomène sociétal agrégé, cette propriété est séduisante : la variation macroscopique résulte d'une somme de contributions hétérogènes. Il ne s'agit pas de prétendre que chaque ordre de marché est une variable stable indépendante ; il s'agit d'utiliser une **classe limite robuste à l'agrégation** pour représenter l'innovation effective.

13.2. Calibration conjointe MRW-Lévy

Une calibration exploratoire conjointe de l'indice de stabilité α_L, de l'intermittence λ^2 et de l'échelle intégrale T donne, sur la grille testée,

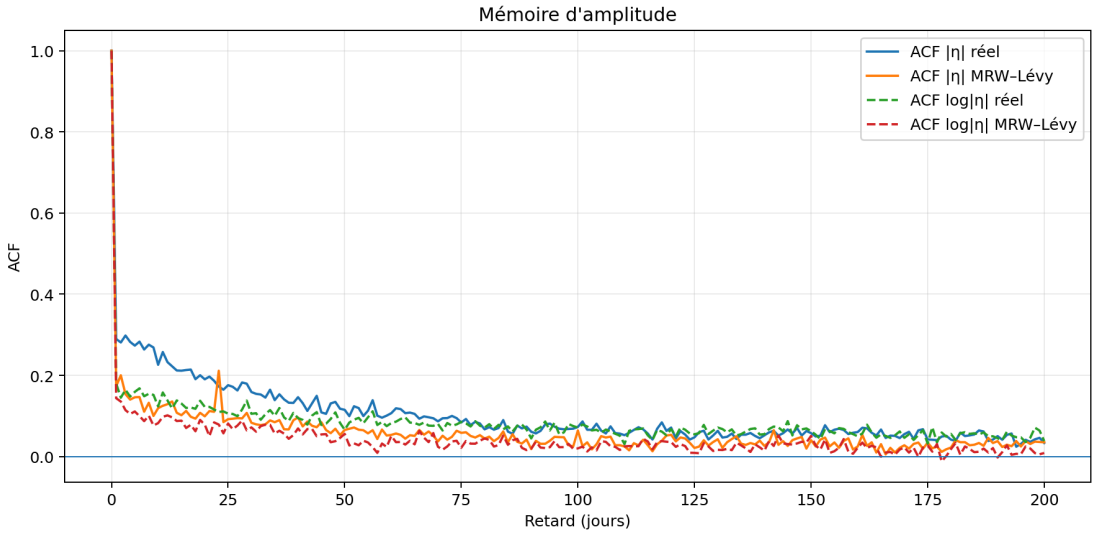
$$\alpha_L \simeq 1,95, \lambda^2 \simeq 0,07, T \simeq 800 jours.$$

Ces valeurs ne doivent pas être considérées comme des constantes universelles. Elles représentent un compromis entre queues de distribution, mémoire d'amplitude et largeur multifractale sur le jeu de données et les critères choisis.

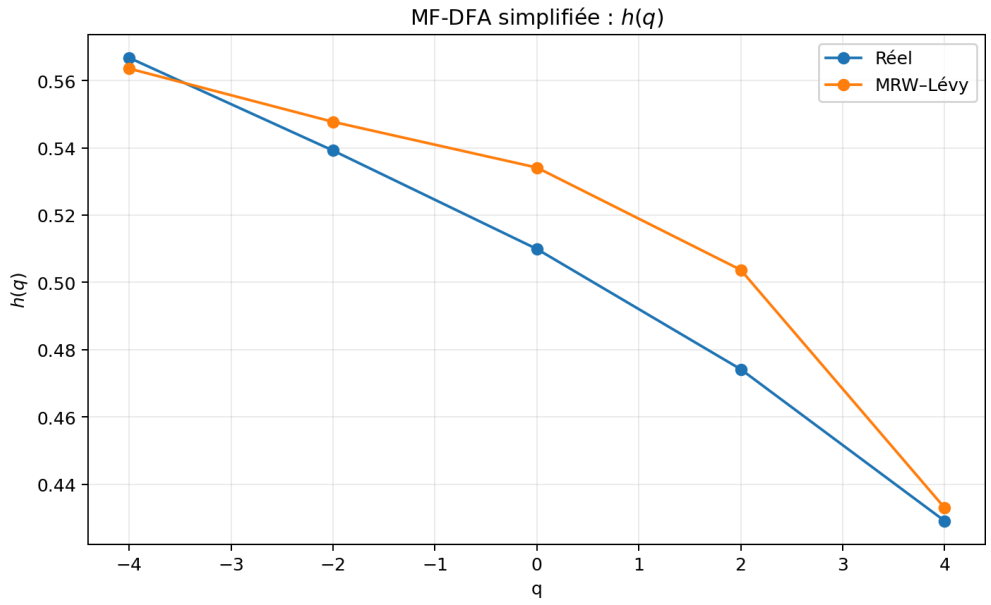


Résidu réel et réalisation d'un MRW à innovation stable de Lévy calibré. Le modèle reproduit qualitativement les régimes calmes, les bouffées d'activité et les queues lourdes, tout en restant une simulation stochastique et non une reconstitution point à point.

La largeur multifractale simplifiée est très proche dans le réel et le modèle, tandis que la mémoire d'amplitude reste quelque peu sous-estimée.



Mémoire d'amplitude du signal réel et du MRW-Lévy. Le modèle retrouve la décroissance lente mais reste moins persistant aux petits et moyens retards.



Comparaison des exposants $h(q)$ du résidu réel et du MRW-Lévy. La forme globale est bien reproduite, ce qui montre que la combinaison « cascade + innovation stable » capture une part importante de l'organisation multiscalaire.

14. Le modèle final comme équation effective

La synthèse de l'analyse peut être écrite sous la forme

$$dy(t) = [-a_0 y(t) - \int_0^{\infty} K_y(\tau) y(t-\tau) d\tau) dt + e^{\omega(t)} dL_{\alpha_L}(t).$$

Une version non linéaire remplace le rappel local $a_0 y$ par un potentiel effectif :

$$dy(t) = [-\frac{\partial V}{\partial y}(y(t)) - \int_0^{\infty} K_y(\tau) y(t-\tau) d\tau) dt + e^{\omega(t)} dL_{\alpha_L}(t).$$

Chaque terme possède une fonction différente.

$y(t)$ **— variable d'état macroscopique.** Il représente l'état collectif du niveau logarithmique, et non le comportement d'un agent particulier.

$-\ \partial V/\partial y$ **ou** $-\ a_0 y$ **— réponse instantanée.** Ce terme rassemble les contraintes locales, les mécanismes d'arbitrage, de rappel et de valorisation qui agissent sans mémoire explicite.

$-\left(K_y * y\right)$ **— mémoire additive.** Il représente la trace distribuée de l'histoire, produite par la superposition des horizons, des positions et des contraintes des acteurs.

$e^{\omega(t)}$ **— modulation multiplicative.** Il représente la susceptibilité collective : l'état de tension, de liquidité, de levier et de synchronisation qui amplifie ou amortit une innovation.

dL_{α_L} **— innovation stable.** Il représente l'agrégation effective des chocs et décisions élémentaires.

λ^2 **— intensité multifractale.** Il quantifie la force de la cascade et donc le contraste entre périodes calmes et périodes intermittentes.

T **— échelle intégrale.** Il donne l'ordre de grandeur de la durée maximale sur laquelle la cascade conserve une cohérence statistique.

α_L **— indice de stabilité.** Il contrôle la lourdeur des queues de la loi d'innovation agrégée.

15. Donner un sens sociologique à l'équation

15.1. Le marché comme système de populations hétérogènes

Le CAC 40 n'est pas « un agent ». Il est le prix collectif produit par une écologie d'acteurs ayant des fonctions, des horizons et des contraintes différentes. Un market maker gère le risque d'inventaire à très court terme ; un fonds systématique peut exploiter des signaux de quelques jours à quelques mois ; un fonds de pension rééquilibre sur des horizons trimestriels ou annuels ; une banque centrale et le cycle macroéconomique agissent encore plus lentement.

Cette coexistence d'horizons donne un sens immédiat à un noyau continu :

$$K_y(\tau) = \int \rho(\alpha)\left(\tau + t_0\right)^{-\alpha} d\alpha.$$

$\rho(\alpha)$ n'est pas littéralement la distribution des investisseurs. C'est une **densité effective d'échelles de mémoire**. Elle résume les traces combinées d'ordres fractionnés, d'ancrages de prix, de rééquilibrages, de contraintes comptables, de cycles économiques et de mémoire des crises.

15.2. Pourquoi la mémoire peut-elle être en loi de puissance ?

Une loi exponentielle implique un temps caractéristique dominant. Une loi de puissance apparaît naturellement lorsqu'un système superpose des temps caractéristiques sur plusieurs ordres de grandeur. Si les acteurs ont des horizons distribués et si les stratégies sont elles-mêmes imbriquées, la mémoire macroscopique peut perdre son échelle privilégiée.

Le travail de microstructure de Bouchaud, Farmer et Lillo donne une illustration concrète : de grands ordres cachés sont exécutés progressivement, parfois sur de longues périodes, ce qui produit un flux d'ordres à mémoire longue. À une échelle plus sociologique, le même principe peut être étendu à la persistance des opinions, des contraintes de portefeuille et des régimes macrofinanciers.

15.3. Le terme de rappel n'est pas un « juste prix »

Le signe négatif du terme de mémoire ne doit pas être interprété comme la preuve d'un retour vers une valeur fondamentale objective. Il représente une résultante effective des mécanismes qui empêchent une dérive sans limite : arbitrage, prise de profits, changement de positionnement, réponse de la liquidité, contraintes de risque, intervention institutionnelle.

Dans un système social, ces mécanismes peuvent eux-mêmes changer avec le temps. Le potentiel $V(y)$ doit donc être compris comme une construction réduite, éventuellement locale et dépendante du régime.

15.4. La susceptibilité collective $e^{\omega(t)}$

Le terme le plus riche sociologiquement est

$$e^{\omega(t)}.$$

Une même nouvelle n'a pas le même impact selon l'état du marché. Lorsque la liquidité est abondante, les positions peu levierisées et les opinions dispersées, un choc peut être absorbé. Lorsque les acteurs sont déjà synchronisés, que la liquidité est faible, que les contraintes de marge se resserrent et que les algorithmes déclenchent des réponses similaires, le même choc peut être amplifié.

$e^{\omega(t)}$ peut donc être interprété comme une **susceptibilité collective**. Il ne mesure pas directement la peur, la liquidité ou le levier ; il agrège tous les mécanismes qui modulent l'amplitude de la réponse.

Cette idée rejoint les modèles d'agents où le mimétisme et les transitions entre populations de chartistes et de fondamentalistes produisent des phases d'activité très différentes. Lux et Marchesi montrent qu'un marché multi-agents peut engendrer scaling, clustering de volatilité et intermittence à partir des interactions mêmes des participants. Kirman montre qu'un mécanisme de recrutement stochastique suffit à produire des phénomènes de troupeau et des basculements collectifs sans avoir besoin d'un équilibre unique imposé de l'extérieur.

15.5. La cascade comme transmission entre échelles sociales

La cascade multifractale peut recevoir une lecture hiérarchique :

un régime macroéconomique modifie la tolérance au risque sur plusieurs mois ou années ;

ce régime module les stratégies de portefeuille à l'échelle mensuelle ou hebdomadaire ;

ces stratégies modulent la liquidité et le positionnement quotidien ;

les ordres et algorithmes à haute fréquence amplifient ou amortissent les mouvements instantanés.

Les niveaux ne sont pas indépendants. La volatilité à petite échelle dépend de l'état des échelles supérieures. C'est exactement ce qu'exprime une multiplication des facteurs de volatilité :

$$\sigma(t) = \prod_j \sigma_j(t).$$

En logarithme,

$$\omega(t) = \sum_j ln\sigma_j(t),$$

ce qui donne naturellement un champ multiscalaire.

15.6. Les crises : choc exceptionnel ou susceptibilité exceptionnelle ?

Le modèle permet une lecture importante des événements extrêmes. Un grand mouvement peut provenir de deux causes non exclusives :

une innovation dL_{α_L} exceptionnellement grande ;

une susceptibilité $e^{\omega(t)}$ exceptionnellement élevée.

Ainsi,

$$événement\ extrême\ \approx\ choc\ \times\ amplification\ collective.$$

Cette séparation est conceptuellement utile. Elle rappelle qu'un krach n'exige pas nécessairement une « nouvelle » proportionnelle à son amplitude. Un système proche d'un état très susceptible peut transformer une information relativement ordinaire en mouvement massif par boucles de rétroaction, manque de liquidité et synchronisation.

15.7. Pourquoi Lévy possède un sens physique et social

Une loi stable de Lévy est attractive par son invariance sous agrégation. Dans un marché, des contributions élémentaires nombreuses et hétérogènes se combinent en permanence. L'indice de stabilité α_L représente alors non une propriété individuelle des agents, mais la forme limite de l'innovation macroscopique.

La calibration exploratoire donne $\alpha_L \simeq 1,95$, proche de la limite gaussienne. Cela suggère que les innovations élémentaires agrégées n'ont pas besoin d'être extrêmement lourdes : une partie essentielle des queues peut être créée par la modulation multifractale. Autrement dit, **la cascade porte davantage la structure que la loi marginale seule**.

16. Ce que le modèle dit — et ce qu'il ne dit pas

Le modèle dit que les données sont compatibles avec une séparation entre :

une mémoire longue additive du niveau ;

une fluctuation quotidienne presque décorrélée en signe ;

une amplitude fortement organisée et multifractale ;

une innovation agrégée à queues plus lourdes qu'une gaussienne simple.

Il ne prouve pas :

qu'il existe un unique noyau invariant dans le temps ;

que le CAC 40 est stationnaire sur toute la période ;

que les paramètres calibrés sont universels ;

que le modèle possède un pouvoir prédictif exploitable hors échantillon ;

qu'une cause sociologique précise peut être déduite d'un paramètre unique.

Les nombres obtenus — 831 jours, $\tau_{MI} \simeq 91$ jours, $\Delta\alpha \simeq 0,29$, $H \simeq 0,49$, λ^2 entre quelques centièmes et environ $0,07$, T de plusieurs centaines à environ mille jours, $\alpha_L \simeq 1,95$ — doivent être lus comme des **repères du jeu de données et de la procédure**, non comme des constantes fondamentales.

17. Intérêt pédagogique pour la data science

Cette étude offre un laboratoire de méthode plus général que le seul CAC 40.

Elle montre d'abord qu'un signal complexe ne doit pas être attaqué par un algorithme unique. On passe successivement par :

une transformation physique ou statistique pertinente de la variable ;

la corrélation et l'information mutuelle ;

une reconstruction géométrique de l'état ;

des indicateurs de récurrence et de dimension ;

un modèle de mémoire intégrale ;

l'étude du résidu ;

l'analyse d'amplitude ;

la multifractalité ;

enfin une génération stochastique cohérente avec les invariances observées.

La seconde leçon est qu'un résidu n'est pas automatiquement du bruit. Il peut être blanc pour une statistique et structuré pour une autre. Ici, $s(t)$ est presque blanc en corrélation linéaire, mais $s^2(t)$ reste

fortement organisé. Le carré, les valeurs absolues, les fonctions de structure et la MF-DFA dévoilent une information invisible au second ordre classique.

La troisième leçon est qu'un échec de modèle peut être informatif. L'incapacité d'une DMD globale à reconstruire le résidu n'est pas seulement une faiblesse de la méthode : elle suggère que la base exponentielle finie n'est pas la bonne description d'un continuum d'échelles. De même, l'échec à « finir » le filtrage de la volatilité conduit à la cascade multifractale.

La démarche est donc moins « choisir le meilleur modèle » que **observer, relier, réduire et tester les invariances**.

18. Conclusion

L'analyse part d'un objet banal — une série journalière d'indice boursier — et aboutit à une image plus riche du phénomène collectif.

Le logarithme centré $y(t)$ porte une mémoire longue, visible dans l'autocorrélation, l'espace des phases, les récurrences et la prédictabilité locale. Cette mémoire se décrit naturellement par un noyau intégral distribué, plutôt que par un petit nombre de modes exponentiels. Lorsque cette composante est retirée, l'innovation quotidienne devient presque blanche en corrélation linéaire. Mais son carré révèle une nouvelle organisation : les fluctuations arrivent en grappes, avec une hiérarchie d'amplitudes et d'échelles.

La multifractalité donne alors un langage plus approprié que l'empilement indéfini de filtres. La cascade multiplicative explique pourquoi les pics ne disparaissent jamais complètement : ils ne sont pas un défaut restant du modèle, ils sont une propriété de l'organisation multiscalaire. Le MRW fournit une représentation continue de cette cascade ; l'innovation stable de Lévy ajoute une loi d'agrégation cohérente avec des queues non gaussiennes.

Le modèle final,

$$dy(t) = [- a_0 y(t) - \int_0^\infty K_y(\tau) y(t - \tau) d\tau) dt + e^{\omega(t)} dL_{\alpha_L}(t),$$

peut alors se lire comme une équation de **mémoire, susceptibilité et innovation**. Dans une perspective sociétale, elle résume une idée simple : le marché garde la trace de son histoire, son degré de sensibilité change à toutes les échelles, et les événements observés résultent de l'interaction entre des chocs et cette sensibilité collective.

Le mérite principal du modèle n'est pas de transformer la finance en mécanique. Il est de proposer une représentation compacte de plusieurs faits empiriques dans un même langage, tout en conservant une interprétation de système complexe.

19. Bibliographie détaillée et commentée

19.1. Lois stables, queues épaisses et invariance d'agrégation

Mandelbrot, B. B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices." ***The Journal of Business*****, 36(4), 394–419. DOI: 10.1086/294632.**

Référence fondatrice pour l'introduction des lois stables paretiennes dans l'étude des prix spéculatifs. Mandelbrot y conteste le modèle gaussien de Bachelier en mettant l'accent sur la fréquence des grands mouvements et sur les propriétés d'agrégation. Cette référence justifie directement l'exploration d'un terme de Lévy dans notre innovation effective.

Mandelbrot, B. B. & Van Ness, J. W. (1968). "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications." ***SIAM Review*****, 10(4), 422–437.**
Texte majeur pour les processus à mémoire longue et l'usage de noyaux en loi de puissance. Le mouvement brownien fractionnaire y est construit par une moyenne mobile pondérée du bruit brownien. Il fournit un arrière-plan conceptuel à notre idée qu'une mémoire sans échelle caractéristique s'exprime naturellement par des noyaux algébriques.

Mantegna, R. N. & Stanley, H. E. (2000). ***An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*****. Cambridge University Press.**
Ouvrage de synthèse qui relie lois d'échelle, distributions lourdes, corrélations et méthodes de physique statistique appliquées aux marchés. Il fournit le cadre général dans lequel une variable financière peut être traitée comme la sortie macroscopique d'un système complexe sans prétendre qu'elle obéit à une loi mécanique microscopique.

19.2. Multifractalité et cascades

Mandelbrot, B. B., Fisher, A. & Calvet, L. (1997). "A Multifractal Model of Asset Returns." Cowles Foundation Discussion Paper 1164.
Le modèle multifractal des rendements d'actifs (MMAR) est une étape décisive entre la vision fractale de Mandelbrot et les modèles multifractals continus. Il met au centre l'hétérogénéité des échelles de temps et la déformation multifractale du temps de marché.

Bacry, E., Delour, J. & Muzy, J.-F. (2001). "Multifractal Random Walk." ***Physical Review E*****, 64, 026103. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.026103.**
Référence centrale du modèle utilisé ici. Le MRW propose un processus à incréments stationnaires et invariance continue de dilatation, sans imposer de ratio d'échelle discret. Les paramètres contrôlent directement le spectre multifractal et les corrélations des amplitudes. Notre écriture $s(t) = e^{\omega(t)}\varepsilon(t)$ et la covariance logarithmique de ω viennent directement de cette famille.

Muzy, J.-F. & Bacry, E. (2002). "Multifractal Stationary Random Measures and Multifractal Random Walks with Log Infinitely Divisible Scaling Laws." ***Physical Review E*****, 66, 056121. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.056121.**
Cette généralisation est particulièrement pertinente pour notre passage d'un MRW lognormal à une innovation plus proche d'un univers Lévy. Les auteurs construisent une classe de mesures et de marches multifractales à lois d'échelle log-infiniment divisibles, élargissant la cascade au-delà du seul cas lognormal.

Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A. & Stanley, H. E. (2002). "Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series." ***Physica A*****, 316, 87–114. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3.**
Référence méthodologique de la MF-DFA utilisée dans l'étude. Elle montre aussi l'importance des tests par séries mélangées pour distinguer la multifractalité due aux corrélations temporelles de celle due à une distribution marginale très large. C'est une étape de validation à poursuivre sur notre résidu.

19.3. Volatilité, mémoire longue et faits stylisés

Ding, Z., Granger, C. W. J. & Engle, R. F. (1993). "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model." ***Journal of Empirical Finance*****, 1(1), 83–106. DOI: 10.1016/0927-5398(93)90006-D.**
Référence directement alignée avec notre observation : les rendements eux-mêmes présentent peu de corrélation, tandis que leurs amplitudes ou puissances absolues restent corrélées sur de longs retards. Le résultat classique selon lequel $|r)^d$ peut avoir une mémoire forte est une validation historique de notre passage de $s(t)$ à $s^2(t)$ et $|s(t))$.

Baillie, R. T., Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O. (1996). "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." ***Journal of Econometrics***, **74(1), 3–30. DOI: 10.1016/S0304-4076(95)01749-6.**

Le modèle FIGARCH introduit une décroissance hyperbolique de l'influence des innovations passées sur la variance conditionnelle. Il représente une alternative économétrique naturelle à notre noyau de volatilité en loi de puissance. Notre démarche diffère en cherchant d'abord une description par noyau et, lorsque celle-ci devient sans fin, en passant à une cascade multifractale.

Nelson, D. B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach." ***Econometrica***, **59(2), 347–370.**

L'EGARCH travaille sur le logarithme de la variance et permet une réponse asymétrique aux chocs. Nous avons testé une idée voisine avec $log\left(1 + \sigma^2\right)$ avant de constater que le problème était moins celui d'une transformation de variance que celui d'une organisation à toutes les échelles.

Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues." ***Quantitative Finance***, **1, 223–236.**

Synthèse essentielle des faits stylisés : queues épaisses, faible autocorrélation des rendements, clustering de volatilité, dépendances non linéaires et irrégularité des trajectoires. Elle donne le contexte empirique général auquel nos observations sur le CAC 40 doivent être comparées.

19.4. Mémoire intégrale et dynamique réduite

Mori, H. (1965). "Transport, Collective Motion, and Brownian Motion." ***Progress of Theoretical Physics***, **33, 423–455.**

Avec les travaux de Zwanzig, ce texte fonde la projection de dynamiques de grande dimension sur quelques variables pertinentes. Une conséquence centrale est l'apparition d'une force de mémoire et d'un bruit effectif lorsque les degrés de liberté éliminés sont projetés. C'est exactement la structure conceptuelle de notre équation : variable d'ordre, noyau mémoire, innovation.

Zwanzig, R. (2001). ***Nonequilibrium Statistical Mechanics***. **Oxford University Press.**

Présentation de référence du formalisme de projection et des équations de Langevin généralisées. Pour notre étude, la valeur est surtout conceptuelle : la mémoire ne doit pas être vue comme un ajout ad hoc, mais comme le prix à payer lorsqu'un système à très grande dimension est réduit à une variable macroscopique.

19.5. Interactions sociales, mimétisme et microstructure

Kirman, A. (1993). "Ants, Rationality, and Recruitment." ***The Quarterly Journal of Economics***, **108(1), 137–156. DOI: 10.2307/2118498.**

Kirman montre qu'un mécanisme simple de recrutement stochastique produit des phénomènes de troupeau et des basculements collectifs. Cette référence soutient notre interprétation de $e^{\omega(t)}$ comme une susceptibilité collective : des interactions sociales locales peuvent modifier fortement l'amplitude de la réponse macroscopique.

Lux, T. & Marchesi, M. (1999). "Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market." ***Nature***, **397, 498–500. DOI: 10.1038/17290.**

Les auteurs montrent qu'un modèle multi-agents avec interactions entre catégories d'opérateurs peut produire scaling, volatilité en grappes et lois de puissance. La référence est importante pour donner un sens sociétal à notre cascade : les propriétés d'échelle peuvent émerger des interactions entre participants, sans être nécessairement imposées par les nouvelles externes.

Bouchaud, J.-P., Farmer, J. D. & Lillo, F. (2009). "How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand." In ***Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution***, **pp. 57–160. DOI: 10.1016/B978-012374258-2.50006-3.**

Référence particulièrement proche de notre terme mémoire. Les auteurs montrent que le flux d'ordres possède une mémoire longue, notamment parce que de grands ordres cachés sont exécutés par morceaux pendant des périodes prolongées. La dynamique de liquidité compense cette persistance pour préserver l'efficacité des prix. Cette microstructure fournit un mécanisme concret capable d'alimenter une mémoire macroscopique distribuée.

Sornette, D. (2003). ***Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*****. Princeton University Press.**
Ouvrage utile pour la lecture des crises comme phénomènes collectifs où l'amplification endogène et la proximité d'un régime critique peuvent être aussi importantes que la taille du choc extérieur. Il éclaire notre formule « choc × susceptibilité ».

20. Perspectives de validation

Pour transformer cette exploration en étude quantitative plus robuste, plusieurs tests sont prioritaires.

Stabilité temporelle : recalibrer le noyau et le MRW sur plusieurs sous-périodes.

Validation hors échantillon : vérifier que les structures identifiées ne sont pas seulement descriptives de l'échantillon d'apprentissage.

Surrogate tests : mélanger aléatoirement les observations pour séparer multifractalité de corrélation et multifractalité de distribution.

Comparaison inter-marchés : appliquer exactement la même procédure au S&P 500, au DAX et à des indices sectoriels.

Asymétrie : introduire explicitement l'effet du signe des chocs et les effets de levier.

Microstructure : relier le noyau du niveau à des données de flux d'ordres, de liquidité ou de volatilité réalisée lorsque celles-ci sont disponibles.

Cascades alternatives : tester des modèles log-stables ou log-infiniment divisibles au-delà du MRW lognormal.

Incertitude : quantifier les intervalles de confiance des paramètres par bootstrap ou Monte Carlo.

Le cadre final doit donc être vu comme une **hypothèse structurante et falsifiable**, non comme une conclusion close. Sa valeur actuelle est de réunir, dans une chaîne analytique cohérente, mémoire longue, géométrie de phase, intermittence, multifractalité, cascade et agrégation stable.